

УДК 517.988.6, 517.922

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374

ОБ АНТИТОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ

© Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский

Рассматриваются вопросы существования решения x уравнения $\psi(x, x) = y$, где y известно, отображение $\psi(\cdot, \cdot)$ действует в упорядоченных пространствах и является по первому аргументу упорядоченно накрывающим, а по второму — антитонным. Используемое в статье понятие упорядоченного накрывания предложено в совместных работах А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского, С.Е. Жуковского в связи с исследованием точек совпадения отображений.

Ключевые слова: упорядоченно накрывающие отображения; антитонное отображение; операторные уравнения и неравенства.

Введение

В работах [1]–[3] предложено понятие упорядоченно накрывающего отображения и получены теоремы о точках совпадения упорядоченно накрывающего и монотонного отображений в упорядоченных пространствах. Если в качестве упорядоченно накрывающего отображения выбрать тождественное отображение, то результаты [1]–[3] совпадают с классическими принципами неподвижной точки (включая теоремы Кнастера–Тарского ([4], с. 25), Биркгофа–Тарского ([5], с. 266), Тарского–Канторовича ([4], с. 26)).

Здесь предлагается распространение понятия упорядоченного накрывания, доказываются утверждения об отображении, упорядоченно накрывающем по первому аргументу и антитонном по второму. Полученные результаты могут использоваться для исследования разрешимости уравнений и получения оценок их решений.

1. Упорядоченные пространства

Пусть заданы упорядоченные пространства $X \doteq (X, \preceq)$, $Y \doteq (Y, \preceq)$. Для $u, v \in X$, $V \subset X$ будем обозначать

$$\begin{aligned} O_X(u) &\doteq \{x \in X : x \preceq u\}, \\ [u, v]_X &\doteq \{x \in X : v \preceq x \preceq u\}, \\ \text{Low}_X(V) &\doteq \{x \in X : x \preceq v \ \forall v \in V\}. \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называем *упорядоченно накрывающим множеством* $W \subset Y$, если для любого $u \in X$ выполнено включение

$$O_Y(f(u)) \cap W \subset f(O_X(u)).$$

Отображение, упорядоченно накрывающее все пространство Y , называем *упорядоченно накрывающим*.

Заметим, что $f : X \rightarrow Y$ тогда и только тогда является упорядоченно накрывающим множеством W , когда

$$\forall u \in X \ \forall y \in W \ y \preceq f(u) \Rightarrow \exists x \in X \ f(x) = y \ \& \ x \preceq u.$$

Для целей данной работы оказывается удобной следующая модификация свойства упорядоченного накрытия.

О п р е д е л е н и е 2. Множеством упорядоченного накрытия отображения $f: X \rightarrow Y$ называем совокупность всех пар $(u, y) \in X \times Y$, удовлетворяющих условию: либо $y \not\leq f(u)$; либо $y \leq f(u)$ и тогда существует такой $x \in X$, что выполнены соотношения $f(x) = y$, $x \leq u$. Будем обозначать это множество $\mathfrak{B}(f)$.

Множество $\mathfrak{B}(f)$ упорядоченного накрытия любого отображения $f: X \rightarrow Y$ не пусто (например, ему принадлежит пара $(u, f(u))$ для всех $u \in X$). Отметим также, что упорядоченное накрытие множества W отображением f равносильно вложению $\mathfrak{B}(f) \supset X \times W$, а свойство упорядоченного накрытия — равенству $\mathfrak{B}(f) = X \times Y$.

Рассмотрим простейшие примеры нахождения множеств упорядоченного накрытия для вещественных функций.

Напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ называют *антитонным на* $W \subset X$, если для любых $x, u \in W$ из $x \succeq u$ следует $f(x) \preceq f(u)$. Антитонное на всем X отображение называют *антитонным*.

2. Теорема о возмущениях упорядоченно накрывающих отображений

Пусть определено отображение $\psi: X^2 \rightarrow Y$, которое по первому аргументу обладает некоторыми накрывающими свойствами. Следующее утверждение гарантирует сохранение этих свойств отображением $f: X \rightarrow Y$, $f(x) \doteq \psi(x, x)$, если ψ по второму аргументу является антитонным на некотором множестве.

Т е о р е м а 1. Пусть $y \in Y$, существует такой элемент $u_0 \in X$, что $f(u_0) \succeq y$, и выполнены условия:

- (а) при любом $x \in O_X(u_0)$ справедливо включение $(x, y) \in \mathfrak{B}(\psi(\cdot, x))$, где $\mathfrak{B}(\psi(\cdot, x))$ есть множество упорядоченного накрытия отображения $\psi(\cdot, x): X \rightarrow Y$;
- (б) при любом $x \in O_X(u_0)$ отображение $\psi(x, \cdot): X \rightarrow Y$ является антитонным на множестве $[x, u_0]_X$;
- (с) любая цепь $S \subset O_X(u_0)$ такая, что

$$\begin{aligned} \forall x \in S \quad \psi(x, x) \succeq y, \\ \forall x_1, x_2 \in S \quad x_1 \prec x_2 \Rightarrow \psi(x_1, x_2) \preceq y, \end{aligned} \quad (1)$$

ограничена снизу, т. е. $\text{Low}(S) \neq \emptyset$, и существует нижняя граница $\omega \in \text{Low}(S)$, удовлетворяющая неравенству $f(\omega) \succeq y$.

Тогда для любого $x \in O_X(u_0)$ выполнено $(x, y) \in \mathfrak{B}(f)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что уравнение

$$\psi(x, x) = y \quad (2)$$

разрешимо, причем существует решение $x \in O_X(u_0)$.

Определим множество

$$U_0 = \{x \in O_X(u_0) : f(x) \succeq y\}.$$

Это множество не пусто, $u_0 \in U_0$. Определим на U_0 бинарное отношение $\leq$, полагая для $v, u \in U_0$ выполненным $v \leq u$, если $v = u$, или если $v \prec u$ и $\psi(v, u) \preceq y$. Покажем, что это отношение определяет порядок на U_0 . Достаточно проверить транзитивность. Пусть $v \leq u$, $u \leq x$. Если $v = u$, или $u = x$, то соотношение $v \leq x$ очевидно. Пусть $v \neq u$ и $u \neq x$, тогда

$v \prec u \prec x$ и имеют место неравенства $\psi(v, u) \preceq y$, $\psi(u, x) \preceq y$. Согласно условию (b) выполнено $\psi(v, x) \preceq \psi(v, u) \preceq y$. Таким образом, $v \triangleleft x$.

Согласно теореме Хаусдорфа (см., например, [6], гл. 1) в $(U_0, \triangleleft)$ существует максимальная цепь S , которая содержит точку x_0 . В силу предположения (с) эта цепь имеет нижнюю границу w (относительно исходного порядка $\preceq$), и справедливо неравенство $\psi(w, w) \succeq y$.

Покажем, что построенная точка w является решением уравнения (2). Очевидно, $w \in O_X(u_0)$. Из условия (a) следует существование элемента $v \in X$, для которого выполнено

$$\psi(v, w) = y, \quad v \preceq w. \quad (3)$$

Из условия (b) получаем $\psi(v, v) \succeq y$. Для любого элемента $x \in S$ имеем $x \succeq v$, следовательно, в силу предположения (b), $\psi(v, x) \preceq \psi(v, v) = y$. Итак, $v \in U_0$ и множество $S \cup \{v\} \subset U_0$ относительно отношения $\succeq$ является цепью, а в силу максимальности цепи S имеем $v \in S$. Поэтому $v \succeq w$. Это неравенство и соотношения (3) означают, что $w = v$, $\psi(w, w) = y$.

Для произвольного $x \in O_X(u_0)$ справедливо включение $(x, y) \in \mathfrak{B}(\psi(\cdot, x))$ и возможны две ситуации.

1. Если $\psi(x, x) \not\succeq y$, то $(x, y) \in \mathfrak{B}(f)$.
2. В случае $\psi(x, x) \succeq y$, согласно доказанному выше (если принять $u_0 = x$), существует такой элемент $u \in X$, что $f(u) = y$ и $x \succeq u$. Полученные соотношения означают принадлежность пары (x, y) множеству упорядоченного накрывания отображения f . $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
2. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 5. С. 475–478.
3. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453. № 6. С. 595–598.
4. Granas A., Dugundji D. Fixed Point Theory // Springer-Verlag, New York. 2003.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-97504), государственной программы Министерства образования и науки РФ № 2014/285 (проект № 2476).

Поступила в редакцию 21 марта 2016 г.

Жуковская Татьяна Владимировна, Тамбовский государственный технический университет, г. Тамбов, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Жуковский Евгений Семенович, Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, e-mail: zukovskys@mail.ru

UDC 517.988.6, 517.922

DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-2-371-374

ABOUT ANTITONE PERTURBATIONS OF COVERING MAPPINGS OF ORDERED SPACES

© T. V. Zhukovskaia, E. S. Zhukovskiy

We consider the problem of existence of a solution x to the equation $\psi(x, x) = y$, where y is given, the mapping $\psi(\cdot, \cdot)$ acts in ordered spaces, is order-covering with respect to the first argument, and antitone with respect to the second one. The concept of order-covering used in the article was proposed in the joint works of A.V. Arutyunov, E.S. Zhukovskiy, S.E. Zhukovskiy regarding the studies of the mappings' coincidence points.

Key words: order-covering mappings; antitone mapping; operator equations and inequalities.

ACKNOWLEDGEMENTS: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (project № 14-01-97504) and by the state program of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation № 2014/285 (project № 2476).

REFERENCES

1. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // Topology and its Applications. 2015. V. 179. № 1. P. 13–33.
2. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. O tochkah sovpadeniya otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453. № 5. S. 475–478.
3. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Tochki sovpadeniya mnogoznachnyh otobrazhenij v chastichno uporyadochennyh prostranstvah // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453. № 6. S. 595–598.
4. Granas A., Dugundji D. Fixed Point Theory // Springer-Verlag, New York. 2003.
5. Lyusternik L.A., Sobolev V.I. Kratkij kurs funkcional' nogo analiza. M.: Vysshaya shkola, 1982.
6. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. EHlementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1981.

Received 21 March 2016.

Zhukovskaia Tatyana Vladimirovna, Tambov State Technical University, Tambov, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associated Professor of High Mathematics Department, e-mail: t_zhukovskaia@mail.ru

Zhukovskiy Evgeny Semenovich, Tambov State University named after G.R. Derzhavin, Tambov, the Russian Federation, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics, e-mail: zukovskys@mail.ru