

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Арабян М.О., Оганисян З.Б., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-105-114>

УДК 517.977.5



Об условиях оптимальности задачи максимизации минимальной частоты оболочки вращения при заданном весе

Мариам Овсеповна АРАБЯН, Зограб Багратович ОГАНИСЯН

Ереванский государственный университет

0025, Республика Армения, г. Ереван ул. Алека Манукяна, 1

Аннотация. Рассматриваются пологие упругие оболочки с заданной круговой границей. Ищется осесимметричная форма оболочки, которая максимизирует фундаментальную частоту колебаний при заданном весе оболочки. Выбор функционалов, рассмотренных при оптимальном проектировании, является частью постановок задач оптимизации. На этот выбор влияют многие обстоятельства: основное назначение конструкции, условия эксплуатации, свойства модели. Частота колебаний — одна из основных характеристик конструкции. Наиболее типичными в теории оптимального проектирования сжатых конструкций являются задачи максимизации критического значения ω_0 (ω_0 — минимальное из собственных частот) при заданном весе конструкции и задачи минимизации веса при ограничении $\omega_0 \geq \mu$, где μ — заданное число. В отличие от динамических задач оптимального проектирования, в которых ставятся ограничения не только на фундаментальную частоту, но и на высшие частоты, учет в задачах оптимального проектирования ограничений по устойчивости основан на рассмотрении только минимальных собственных значений. На основе полученной кратности минимального собственного значения и дифференцируемости по Фреше того же функционала в настоящей работе получены необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: оболочка вращения, частотный функционал, условия оптимальности, градиент, дифференцируемость по Фреше

Для цитирования: Арабян М.О., Оганисян З.Б. Об условиях оптимальности задачи максимизации минимальной частоты оболочки вращения при заданном весе // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 154. С. 105–114.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-105-114>

SCIENTIFIC ARTICLE

© М. Н. Arabyan, Z. B. Hovhannisyan, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-105-114>

On the optimality conditions for the problem of maximizing the minimum frequency of a rotation shell for a given weight

Mariam H. ARABYAN, Zohrab B. HOVHANNISYAN

Yerevan State University

1 Alex Manoogian, Yerevan 0025, Republic of Armenia

Abstract. Shallow elastic shells with a given circular boundary are considered. An axisymmetric shell shape is sought that maximizes the fundamental oscillation frequency for a given shell weight. The choice of functionals considered in optimal design is a part of the optimization problem formulation. This choice is influenced by many factors, including the primary purpose of the structure, operating conditions, and model properties. Oscillation frequency is one of the key characteristics of a structure. The most typical in the theory of optimal design of compressed structures are problems of maximizing the critical value of ω_0 (ω_0 is the minimum of the natural frequencies) for a given structural weight and problems of minimizing the weight subject to the constraint $\omega_0 \geq \mu$, where μ is a given number. Unlike dynamic optimal design problems, in which constraints are imposed not only on the fundamental frequency but also on higher frequencies, the consideration of stability constraints in optimal design problems is based on considering only the minimum eigenvalues. Based on the obtained multiplicity of the minimum eigenvalue and the Frechet differentiability of the same functional, the necessary optimality conditions are obtained in this paper.

Keywords: rotation shell, frequency functional, optimality conditions, gradient, Frechet differentiability

Mathematics Subject Classification: 34B09, 49R05.

For citation: Arabyan M.H., Hovhannisyan Z.B. On the optimality conditions for the problem of maximizing the minimum frequency of a rotation shell for a given weight. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:154 (2026), 105–114. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-105-114>

Введение

Интерес к исследованиям в области оптимального проектирования значительно усилился в связи с быстрым развитием авиационной и космической техники, судостроения. На основе оптимального проектирования достигается значительное снижение веса летательных аппаратов, улучшение механических характеристик конструкций.

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления, описываемая задачей на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, некоторые из которых неинтегрируемы вблизи нуля. Для решения этой проблемы в предыдущей статье [1] были введены некоторые специальные весовые пространства. Затем были установлены теоремы вложения и свойства функций весовых пространств, а также существование решений краевой задачи и задачи на собственные значения.

Целью настоящей работы является получение необходимых условий для оптимизационной задачи. На основе установленной дифференцируемости по Фреше частотного функционала методом Лагранжа получены условия оптимальности максимизации минимальной частоты оболочки вращения при заданном весе.

В таких задачах оптимального управления кратность собственного значения не определяется, а рассматривается только как гипотеза [2–4]. Различные вопросы отыскания оптимальных и равнопрочных форм оболочек для минимизации веса рассматривались в работе [5] и монографии [6, с. 11–17], а для максимизации основной частоты неглубоких упругих арок – в работах [7, 8]. Отметим также, что подобные задачи оптимального управления изучаются в работах [9–11].

1 Основные обозначения и постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу оптимизации из теории тонких оболочек. Далее используется полярная система координат.

Обозначим $W = W(r)$, $\varphi = \varphi(r)$. Здесь переменная $r \in [0, b]$ указывает текущий радиус, $W(r)$ — амплитуда перемещения точек срединной поверхности в осевом направлении, $\varphi(r)$ — функция напряжения, характеризующая тангенциальное перемещение.

При определенных предположениях поперечные колебания оболочки вращения описываются следующей системой двух дифференциальных уравнений (подробнее см. [12], [13, с. 533–547] и [14, с. 76–86]).

Строгая постановка задачи гласит: найти все (λ, u) , с $\lambda \in \mathbb{R}$ и $u = (\varphi, W)$, такие, что

$$(Lu)_1 \equiv (rDW'')' + \left(\left(\nu D' - \frac{D}{r} \right) W' \right)' + (f'\varphi)' = \lambda rh\rho W, \quad (1.1)$$

$$(Lu)_2 \equiv (ar\varphi')' - \left(\frac{a}{r} + \nu a' \right) \varphi - f'W' = 0. \quad (1.2)$$

Опишем величины, входящие в систему дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2). Функция $f(r)$ определяет форму срединной поверхности оболочки вращения; $\rho(r) > 0$ — удельный вес материала оболочки; $h(r)$ — заданная толщина оболочки, удовлетворяющая условию

$$0 < h_0 \leq h(r) \leq h_1; \quad (1.3)$$

и наконец, $D(r)$ — жесткость на изгиб, $D(r) \geq D_0 > 0$, определяемая как

$$D(r) = \frac{Eh^3(r)}{12(1-\nu^2)}, \quad a(r) = \frac{1}{Eh(r)}, \quad (1.4)$$

где $b = \text{const}$, $b > 0$, $E > 0$ модуль Юнга, ν , $-1 < \nu < 0.5$ коэффициент Пуассона.

Задача на собственные значения представляет собой систему двух уравнений (1.1), (1.2), дополненную следующими граничными условиями:

$$W'|_{r=0} = (rDW'')' + \left(\nu D' - \frac{D}{r}\right)W'|_{r=0} = 0, \quad (1.5)$$

$$W|_{r=b} = W'|_{r=b} = 0, \quad (1.6)$$

$$a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=0} = a(\nu\varphi - r\varphi')|_{r=b} = 0. \quad (1.7)$$

Обозначим через $\lambda_1 = w^2(f')$ минимальное собственное значение задачи (1.1)–(1.7), где $w(f')$ — минимальная частота колебаний оболочки. Отметим, что граничные условия (1.5)–(1.7) взяты для случая закрепленного края при $r = b$. В случае шарнирно-опертого края условие (1.6) заменяется условием

$$W|_{r=b} = -D \left(W'' + \nu \frac{W'}{r} \right) \Big|_{r=b} = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, имеем две задачи на собственные значения: задача (1.1)–(1.7) и задача (1.1)–(1.5), (1.7), (1.8). Мы представим решение первой задачи. Вторая задача исследуется аналогично.

Рассмотрим стандартную задачу максимизации минимальной частоты оболочки вращения

$$\lambda_1(f') = \omega^2(f') \rightarrow \sup, \quad (1.9)$$

при условии

$$J(f') = \int_0^b 2\pi r h \rho \sqrt{1 + (f'(r))^2} dr = J_0. \quad (1.10)$$

Пусть $p(r) = f'(r)$ — фиксированный элемент управления.

Чтобы изучить проблему собственных значений, нам нужно в первую очередь изучить следующую краевую задачу:

$$(Lu)_1 = s_1 \quad (1.11)$$

$$(Lu)_2 = s_2 \quad (1.12)$$

с граничными условиями (1.5)–(1.7).

Первый вопрос, который возникает при изучении задачи (1.1)–(1.7), (1.9), (1.10), это как решить задачу (1.1)–(1.7) для фиксированного управления $p(r)$. На самом деле некоторые коэффициенты системы не интегрируемы в $[0, b]$. Поэтому требуется тщательный анализ. С этой целью в следующем разделе рассматриваются конкретные весовые пространства, определенные ранее в работе [1].

2 Весовые пространства, обобщенное решение и некоторые вспомогательные результаты

В [1] вводятся весовые гильбертовы пространства $\tilde{H}^1[0, b]$, $\tilde{H}^2[0, b]$ со следующими скалярными произведениями:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{\tilde{H}^1} &= \int_0^b \left(r u' v' + \frac{uv}{r} \right) dr, \\ \langle u, v \rangle_{\tilde{H}^2} &= \int_0^b \left(r u'' v'' + \frac{u' v'}{r} + uv \right) dr,\end{aligned}$$

соответственно. Здесь мы имеем $u, v, u', v', u'', v'' \in L_{1,loc}(0, b)$. Соответствующие нормы определяются как обычно.

Приведем следующий результат из [1] о вложениях для рассматриваемых пространств.

Теорема 2.1. *Любая функция $u \in \tilde{H}^1[0, b]$ может быть отождествлена с непрерывной на $[0, b]$ функцией, а любая функция $v \in \tilde{H}^2[0, b]$ — с непрерывно дифференцируемой на $[0, b]$ функцией, удовлетворяющими следующим оценкам и условиям:*

$$\begin{aligned}\max_{[0, b]} |u| &\leq c_2 \|u\|_{\tilde{H}^1[0, b]}, \quad u(0) = 0, \\ \max_{[0, b]} (|v'| + |v|) &\leq c_3 \|v\|_{\tilde{H}^2[0, b]}, \quad v'(0) = 0.\end{aligned}$$

Теперь приступим к исследованию задачи на собственные значения (1.1)–(1.7).

Определим линейное подпространство V пространства $\tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2$ соотношением

$$V = \left\{ v : v = (v_1, v_2) \in \tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2, \quad v_2(b) = v_2'(b) = 0 \right\}.$$

Тип механических граничных условий, включенных в определение V , заключается в том, что оболочка зажата по всей границе.

На пространстве $V \times V$ определим билинейную форму

$$\begin{aligned}B(u, v) &= \int_0^b \left[r D u_2'' v_2'' + (D - \nu D' r) \frac{u_2' v_2'}{r} - p u_1 v_2' \right. \\ &\quad \left. + a r u_1' v_1' + (a + \nu a' r) \frac{u_1 v_1}{r} + p u_2' v_1 \right] dr - a \nu u_1 v_1 \Big|_0^b,\end{aligned}$$

порожденную дифференциальным оператором и граничными условиями рассматриваемой задачи (1.1)–(1.7).

В дальнейшем нам понадобятся следующие

О п р е д е л е н и е 2.1. Для любой пары $s = (s_1, s_2)$ функций $s_1, s_2 \in L_2[0, b]$ функцию $u \in V$ назовем обобщенным решением задачи (1.5)–(1.7), (1.11), (1.12), если выполняется следующее соотношение:

$$B(u, v) = \langle s_1, v_2 \rangle_{L_2} + \langle s_2, v_1 \rangle_{L_2} \quad \forall v = (v_1, v_2) \in V. \quad (2.1)$$

Как показано в [1, Теорема 5], билинейная форма $B(u, v)$ положительно определена и ограничена, как только:

- 1) $D(r), D(r) - \nu D'(r)r, a'(r) \in L_\infty[0, b], \quad p \in L_1[0, b],$
- 2) $D(r) \geq D_0 > 0, \quad D(r) - \nu D'(r)r \geq D_{10} > 0, \quad a(r) \geq a_0 > 0,$
- 3) $t(r) = h(r)\rho(r) \in L_\infty[0, b], \quad t(r) \geq t_0.$

Далее мы представляем результат [1] о существовании и единственности решения краевой задачи (2.1).

Теорема 2.2. *Предположим, что два из вышеуказанных условий 1)–3) выполнены. Тогда для любой пары $s = (s_1, s_2)$ функций $s_1, s_2 \in L_2[0, b]$ задача (2.1) имеет единственное решение $u \in V$. Кроме того, для решения u справедлива следующая оценка:*

$$\|u\|_V \leq c_1 (\|s_1\|_{L_2}^2 + \|s_2\|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Возьмем любую функцию $\psi \in L_2[0, b]$. Тогда условие

$$B(u, v) = \langle \sqrt{rt} \psi, v_2 \rangle_{L_2} \quad \forall v \in V,$$

получаемое из (2.1) для $s = (\sqrt{rt}\psi, 0)^T$, определяет функцию $u \in V$. Таким образом, определен оператор $G : \psi \in L_2[0, b] \rightarrow u = G\psi \in V$, и верна оценка

$$\|u\|_{\tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2} = \|G\psi\|_{\tilde{H}^1 \times \tilde{H}^2} \leq c_1 \left\| \sqrt{rt} \psi \right\|_{L_2}.$$

В [1] показано, что оператор $F_1\psi = \sqrt{rt}(G\psi)_2$ как оператор, отображающий $L_2[0, b]$ на $L_2[0, b]$, компактный и самосопряженный.

Легко видеть, что если μ является собственным числом оператора F_1 , а ψ соответствующая собственная функция, т. е. $F_1\psi = \mu\psi$, то $\lambda = \frac{1}{\mu}$ и $u = G\psi$ — собственное значение и собственная функция задачи

$$B(u, v) = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2} \quad \forall v \in V. \quad (2.2)$$

Действительно, мы имеем

$$B(u, v) = B(G\psi, v) = \langle \sqrt{rt} \psi, v_2 \rangle_{L_2} = \frac{1}{\mu} \langle rt(G\psi)_2, v_2 \rangle_{L_2} = \lambda \langle rtu_2, v_2 \rangle_{L_2} \quad \forall v \in V.$$

Таким же образом мы можем доказать, что если λ собственное число, а u соответствующая собственная функция задачи (2.2), тогда $\mu = \frac{1}{\lambda}$ и $\psi = \sqrt{r\bar{h}\rho}u_2$ являются собственным числом и собственной функцией оператора F_1 .

Как показано в [1, теорема 6], если выполняются все условия 1)–3), то

- а) существует последовательность $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\}$ положительных собственных значений задачи (2.2), с $\lambda_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$;
- б) каждому собственному значению λ_k соответствует только конечное число линейных независимых собственных функций из V .

3 Дифференцируемость функционала $\lambda_1(p)$

Теперь приведем результаты [15] о дифференцируемости функционала $\lambda_1(p)$ — минимального собственного значения задачи (2.2).

Следующая теорема имеет решающее значение для нашего исследования. Ее использованием получена дифференцируемость по Фреше функционала $\lambda_1(p)$ и его градиентной формулы.

Теорема 3.1 (см. [15]). *Допустим, что функции $D(r), a(r), t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3) и $p \in L_2[0, b]$. Пусть $\lambda_1(p)$ — минимальное собственное значение задачи (2.2), а S_1 является подпространством собственных функций, соответствующих собственному значению $\lambda_1(p)$. Тогда $\dim S_1 = 1$.*

Теперь сформулируем теорему о дифференцируемости по Фреше функционала $\lambda_1(p)$.

Теорема 3.2 (см. [15]). *Пусть $\lambda_1(p)$ — минимальное собственное значение задачи (2.2). Тогда его производная по Фреше существует в гильбертовом пространстве $L_2[0, b]$ и равна:*

$$\frac{d\lambda_1(p)}{dp} = \frac{-2u'_2(p)u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p) \rangle_{L_2}},$$

где $u(p) = (u_1(p), u_2(p))$ — любая ненулевая функция из S_1 .

Теперь перейдем к изложению основного результата этой статьи.

4 Условия оптимальности

В этом разделе представлены необходимые условия оптимальности для задачи оптимизации (1.1)–(1.7), (1.9), (1.10).

Рассмотрим следующую оптимальную задачу с переменной p в банаховом пространстве $X = L_2[0, b]$:

$$\mathcal{B}_0(p(\cdot)) = \lambda_1(p) \rightarrow \sup, \quad (4.1)$$

$$F(p(\cdot)) = J(p) - J_0 = \int_0^b 2\pi r h \rho \sqrt{1 + (f'(r))^2} dr - J_0 = 0, \quad (4.2)$$

где J_0 является фиксированным числом, а $\lambda_1(p)$ — минимальное собственное значение задачи (2.2). Функционалы $\mathcal{B}_0$ и F определены в следующей области пространства X :

$$\mathcal{V} = \{p(\cdot) \in L_2[0, b] \mid p(r) \in V_1, \quad r \in [0, b]\},$$

где V_1 — открытое множество в $(-\infty, +\infty)$.

Построим функцию Лагранжа для задачи (4.1), (4.2), (2.2):

$$\mathcal{L}(p(\cdot), \bar{\lambda}_0, \bar{\lambda}_1) = \bar{\lambda}_0 \mathcal{B}_0(p) + \bar{\lambda}_1 F(p).$$

Справедлива следующая

Теорема 4.1. *Предположим, что функции $D(r), a(r), t(r)$ удовлетворяют условиям 1)–3) и $p_*(r)$ является точкой локального максимума в задаче (4.1), (4.2), (2.2). Пусть $\lambda_1(p_*)$ — минимальное собственное значение задачи (2.2), а $u(p_*)$ — соответствующая собственная функция. Тогда существует константа α такая, что*

$$-\frac{u'_2(p_*)u_1(p_*)}{\langle rtu_2(p_*), u_2(p_*) \rangle_{L_2}} + \alpha \frac{\pi r t p_*}{\sqrt{1 + p_*^2}} = 0.$$

Доказательство. Ранее (см. теорему 3.2) мы установили, что функционал $\mathcal{B}_0(p)$ имеет следующий градиент:

$$\mathcal{B}'_0(p) = -\frac{2u'_2(p)u_1(p)}{\langle rtu_2(p), u_2(p) \rangle_{L_2}}, \quad p \in L_2[0, b].$$

Нетрудно показать, что градиент функционала $F(p)$ определяется соотношением

$$F'(p) = \frac{2\pi r t p}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad p \in L_2[0, b].$$

Докажем, что образ $\text{Im } F'(p)$ является замкнутым множеством и что, более того, выполнено равенство

$$\text{Im } F'(p_*)X = \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Возможны два случая:

- I) $p_* \equiv 0 \quad \forall r \in [0, b]$,
- II) существует точка c , $c \in (0, b]$, такая, что

$$\int_0^c \frac{2\pi r t p_*}{\sqrt{1 + p_*^2}} dr \neq 0.$$

В случае I) докажем, что

$$u_1(p_*) \equiv 0. \quad (4.4)$$

Действительно, из соотношения (2.2) с $v = (v_1, 0)^T$ получим

$$\int_0^b (a r u'_1(p) v'_1 + (a + \nu a' r) \frac{u_1(p) v_1}{r} + p(u'_2(p) v_1) dr - a \nu u_1(p) v_1)|_0^b = 0 \quad \forall v \in V. \quad (4.5)$$

Далее подставим в (4.5) $p = p_*$, $v_1 = u_1(p_*)$. Используя соотношение 1) и положительную определенность билинейной формы $B(u, v)$, получаем требуемое соотношение (4.4).

В случае II) докажем, что для любого $z \in \mathbb{R}$ уравнение

$$\int_0^b \frac{2\pi r t p_*}{\sqrt{1 + p_*^2}} \cdot x dr = z \quad (4.6)$$

имеет решение $x = x(r)$. Действительно, легко проверить, что

$$x(r) = \begin{cases} \frac{z}{c}, & 0 \leq r \leq c \\ \int_0^c \frac{2\pi r t p_*}{\sqrt{1+p_*^2}} dr, & c < r \leq b. \\ 0, & \end{cases}$$

Следовательно, согласно (4.6) получаем равенство (4.3). Таким образом, образ $\text{Im} F'$ совпадает с $\mathbb{R}$, т. е. выполнено условие регулярности отображения F . Отсюда вытекает, что $\bar{\lambda}_0 = 1$. Наконец, с учетом правила множителей Лагранжа [16, с. 253], получаем, что утверждение теоремы 4.1 справедливо. $\square$

References

- [1] M. H. Arabyan, “Boundary-value problems and associated eigenvalue problems for systems describing vibrations of a rotation shell”, *New York Journal of Mathematics*, **25** (2019), 1350–1367.
- [2] R. H. Plaut, L. W. Johnson, R. Parbery, “Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 1: Maximum fundamental frequency”, *Journal of Applied Mechanics*, **51** (1984), 526–530.
- [3] R. H. Plaut, L. W. Johnson, “Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 2: Maximum buckling load”, *Journal of Applied Mechanics*, **51** (1984), 531–535.
- [4] R. H. Plaut, L. W. Johnson, “Optimal forms of shallow shells with circular boundary. Part 3: Maximum enclosed volume”, *Journal of Applied Mechanics*, **51** (1984), 536–539.
- [5] S. N. Krivoshapko, “Optimal shells of revolution and main optimization”, *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, **15:3** (2019), 201–209.
- [6] B. Velichkov, *Existence and Regularity Results for Some Shape Optimization Problems*, Publications of the Scuola Normale Superiore, **19**, Edizioni della Normale Pisa, Pisa, 2015, 349 pp.
- [7] M. H. Arabyan, “On the existence of solutions of two optimization problems”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **177** (2018), 291–315.
- [8] L. Yu. Stupishin, A. G. Kolesnikov, K. E. Nikitin, “Optimal design of Flexible Shallow Shells on Elastic Foundation”, *Journal of Applied Engineering Science*, **15:3** (2017), 345–349.
- [9] U. G. Abdulla, E. Cosgrove, J. Goldfarb, “On the Frechet differentiability in optimal control of coefficients in parabolic free boundary problems”, *Evolution Equations and Control Theory*, **6:3** (2017), 319–344.
- [10] Y. He, B. Z. Guo, “The existence of optimal solution for a shape optimization problem on starlike domain”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **152:1** (2012), 21–30.
- [11] G. Wang, L. Wang, D. Yang, “Shape optimization of an elliptic equation in an exterior domain”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **45:2** (2006), 532–547.
- [12] Э. И. Григолюк, “Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек”, *Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук*, **3** (1955), 33–68. [E. I. Grigolyuk, “Nonlinear oscillations and stability of shallow rods and shells”, *Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences*, **3** (1955), 33–68 (In Russian)].
- [13] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2-nd ed., McGraw-Hill, New York, 1959.
- [14] S. Timoshenko, *Strength of Materials: Advanced Theory and Problems*, **II**, 2-nd ed., Krieger Publishing Company, Melbourne (Florida), 1976, 456 pp.
- [15] М. О. Арабян, “Об условиях оптимальности задачи минимизации веса оболочки вращения при заданной частоте колебаний”, *Дифференциальные уравнения*, **59:9** (2023), 1266–1282; англ. пер.: М. Н. Arabyan, “On the optimality conditions in the weight minimization problem for a shell of revolution at a given vibration frequency”, *Differential Equations*, **59:9** (2023), 1262–1279.
- [16] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979. [V. M. Alekseyev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].

Информация об авторах

Арабян Мариам Овсеповна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и моделирования, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения.

E-mail: arabyan.mariam@ysu.am

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3461-6368>

Оганисян Зограб Багратович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры численного анализа и моделирования, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения. E-mail: zorhh@ysu.am

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5873-5231>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Арабян Мариам Овсеповна

E-mail: arabyan.mariam@ysu.am

Поступила в редакцию 11.03.2026 г.

Поступила после рецензирования 18.05.2026 г.

Принята к публикации 05.06.2026 г.

Information about the authors

Mariam H. Arabyan, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modelling Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia.

E-mail: arabyan.mariam@ysu.am

ORCID: <https://orcid.org/0009-0009-3461-6368>

Zograb B. Hovhannisyan, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Numerical Analysis and Mathematical Modelling Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia.

E-mail: zorhh@ysu.am

ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-5873-5231>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Mariam H. Arabyan

E-mail: arabyan.mariam@ysu.am

Received 11.03.2026

Reviewed 18.05.2026

Accepted for press 05.06.2026