

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Измаилов А.Ф., Янь Ч., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-142-167>

УДК 519.6



Ускорение сходимости кусочного метода Ньютона к особым решениям нелинейных уравнений

Алексей Ферилович ИЗМАИЛОВ, Чжибай ЯНЬ

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

119991, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

Аннотация. Статья посвящена способам ускорения сходимости вариантов метода Ньютона к особым решениям системы нелинейных уравнений. Для уравнений с гладкими отображениями литература, посвященная этим вопросам, весьма обширна. В частности, известно, что в естественных предположениях имеет место линейная сходимость базового метода Ньютона к особым решениям, с асимптотическим общим частным $1/2$, из широких областей начальных точек. Используя специальный характер такой сходимости, ее можно в определенных смыслах ускорить за счет соответствующих модификаций базового метода Ньютона, а именно, процедур экстраполяции и оверрелаксации. Помимо обзора соответствующих теорий локальной сходимости, основные результаты работы состоят в распространении указанных алгоритмов и теорем об их локальной сходимости и скорости сходимости на кусочный метод Ньютона для уравнений с кусочно-гладким отображением. Важную роль при этом играют разработанные ранее конструкции, позволяющие охарактеризовать гладкие кусочные отображения, которые могут быть активными на итерациях методов. Статья также содержит результаты численного сравнения рассматриваемых способов ускорения кусочного метода Ньютона на кусочно-гладких переформулировках нелинейных комплементарных задач, включая некоторые иллюстративные примеры.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, кусочно-гладкое уравнение, кусочный метод Ньютона, линейная сходимость, сверхлинейная сходимость, экстраполяция, оверрелаксация, ускорение Андерсона

Для цитирования: Измаилов А.Ф., Янь Ч. Ускорение сходимости кусочного метода Ньютона к особым решениям нелинейных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 154. С. 142–167. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-142-167>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. F. Izmailov, Z. Yan, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-142-167>

Acceleration of convergence of the piecewise Newton method to singular solutions of nonlinear equations

Alexey F. IZMAILOV, Zhibai YAN

Lomonosov Moscow State University

1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

Abstract. This paper is devoted to techniques intended for acceleration of convergence of the variants of the Newton method to singular solutions of systems of nonlinear equations. For equations with smooth mappings, there exists a rich literature on these issues. In particular, it is known that under natural assumptions, the rate of convergence of the basic Newton method to singular solutions is linear, with the asymptotic common ratio equal to $1/2$, from wide domains of starting points. Making use of a special pattern of such convergence, it can be in some senses accelerated by introducing the corresponding modifications of the basic Newton method, namely, the extrapolation and overrelaxation procedures. Besides providing a survey of the related local convergence theories, the main results of the paper consist of extensions of the specified algorithms and their local convergence and rate-of-convergence theorems to the piecewise Newton method for equations with piecewise smooth mappings. The important role in this is played by previously developed constructions allowing to characterize smooth local selection mappings that can be active along the iterations of the method. The paper also contains the results of numerical comparison of the considered acceleration techniques for the piecewise Newton method for piecewise-smooth reformulations of nonlinear complementarity problems, including some illustrative examples.

Keywords: nonlinear equation, piecewise smooth equation, piecewise Newton method, linear convergence, superlinear convergence, extrapolation, overrelaxation, Anderson acceleration

Mathematics Subject Classification: 47J05, 49M15, 65H10, 90C33.

For citation: Izmailov A.F., Yan Z. Acceleration of convergence of the piecewise Newton method to singular solutions of nonlinear equations. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:154 (2026), 142–167.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-142-167>

Введение

Рассматривается нелинейное уравнение

$$\Phi(u) = 0 \quad (0.1)$$

с заданным отображением $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Решение $\bar{u}$ уравнения (0.1), в котором Φ дифференцируемо, называется особым, если матрица Якоби $\Phi'(\bar{u})$ вырождена, и неособым в противном случае. Данная статья посвящена способам ускорения сходимости вариантов метода Ньютона к особым решениям уравнения (0.1).

Для случая гладкого Φ литература, посвященная этим вопросам, весьма обширна; см. обзор в [1], а также в разд. 1 ниже. В частности, известно, что в естественных предположениях имеет место линейная сходимость базового метода Ньютона к особым решениям, с асимптотическим общим частным $1/2$, из широких областей начальных точек. Используя специальный характер такой сходимости, ее можно в определенных смыслах ускорить за счет соответствующих модификаций базового метода Ньютона, а именно, процедур экстраполяции и оверрелаксации. Еще одной альтернативной является ускорение Андерсона, первоначально возникшее в контексте методов простой итерации в задачах поиска неподвижной точки отображения [2], но в последнее время рассматриваемое как способ ускорения сходимости ньютоновских методов к особым решениям нелинейных уравнений [3]. Описание этих алгоритмов и соответствующие теоретические результаты о локальной сходимости и скорости сходимости приводятся в разд. 1.

Основные результаты работы содержатся в разд. 2, где указанные алгоритмы и теоремы об их локальной сходимости и скорости сходимости распространяются на кусочный метод Ньютона для уравнения (0.1) с кусочно-гладким отображением Φ . Важную роль при этом играют конструкции из [4], позволяющие охарактеризовать гладкие кусочные отображения, которые могут быть активными на итерациях методов.

Разд. 3 содержит результаты численного сравнения рассматриваемых способов ускорения кусочного метода Ньютона на кусочно-гладких переформулировках нелинейных комплементарных задач, а также некоторые иллюстративные примеры.

Используемые в статье обозначения вполне стандартны. Через $L^\perp$ обозначается ортогональное дополнение линейного подпространства L , а через $\text{lin } M$ — линейная оболочка множества M . Через $B(\bar{u}, \delta) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \|u - \bar{u}\| \leq \delta\}$ обозначается замкнутый шар радиуса $\delta > 0$ с центром в точке $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, причем норма $\|\cdot\|$ везде считается евклидовой. Образ (множество значений) и ядро (множество нулей) линейного оператора A обозначаются как $\text{im } A$ и $\text{ker } A$, соответственно.

1 Ускорители метода Ньютона для гладких уравнений

Для дальнейшего понадобится некоторая дополнительная терминология. Предполагая двукратную дифференцируемость Φ в точке $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, отображение Φ называется 2-регулярным в точке $\bar{u}$ по направлению $v \in \mathbb{R}^p$, если матрица $\Phi'(\bar{u}) + \Pi\Phi''(\bar{u})[v]$ невырождена, где Π — ортогональный проектор в $\mathbb{R}^p$ на $(\text{im } \Phi'(\bar{u}))^\perp$, а $\Phi''(\bar{u})[v]$ — матрица линейного оператора, определяемого равенством $(\Phi''(\bar{u})[v])u = \Phi''(\bar{u})[v, u]$, $u \in \mathbb{R}^p$. Если $\Phi'(\bar{u})$ невырождена, то Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по любому направлению, включая $v = 0$.

Условие 2-регулярности по направлению v можно эквивалентным образом интерпретировать как условие невырожденности линейного оператора $\mathcal{B}(v) : \text{ker } \Phi'(\bar{u}) \rightarrow (\text{im } \Phi'(\bar{u}))^\perp$,

определяемого как сужение оператора $\Pi\Phi''(\bar{u})[v]$ на $\ker \Phi'(\bar{u})$. Это свойство можно сформулировать и без использования проекторов, например так: включения $\Phi''(\bar{u})[\bar{v}, v] \in \text{im } \Phi'(\bar{u})$ и $v \in \ker \Phi'(\bar{u})$ одновременно выполняются только при $v = 0$.

Множество $U \subset \mathbb{R}^p$ называется звездным относительно точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, если для любых $u \in U$ и $t \in (0, 1]$ имеет место $tu + (1 - t)\bar{u} \in U$. Направление $v \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ называется исключенным для такого звездного множества U , если $\bar{u} + tv \notin U$ для любого $t > 0$. Звездное относительно данной точки множество называется асимптотически плотным, если соответствующее множество исключенных направлений, лежащих на единичной сфере, является тощим, т. е. его дополнение до единичной сферы открыто и плотно (в топологии индуцированной из $\mathbb{R}^p$).

1. Для текущего приближения $u^k \in \mathbb{R}^p$ метод Ньютона (МН) генерирует следующее приближение $u^{k+1} = u^k + v^k$, где v^k определяется как решение линейного уравнения

$$\Phi(u^k) + \Phi'(u^k)v = 0. \quad (1.1)$$

О классических свойствах локальной сходимости МН к неособым решениям см., например, [5, разд. 2.1.1]. Для случая особых решений имеет место следующий результат [1, теорема 2.1], [6, теорема 6.1].

Теорема 1.1. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ дважды дифференцируемо вблизи точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, и его вторая производная удовлетворяет условию Липшица относительно $\bar{u}$, т. е.

$$\Phi''(u) - \Phi''(\bar{u}) = O(\|u - \bar{u}\|) \quad \text{при } u \rightarrow \bar{u}.$$

Пусть $\bar{u}$ является особым решением (0.1), и существует $\bar{v} \in \ker \Phi'(\bar{u})$ такой, что Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по направлению $\bar{v}$.

Тогда существует асимптотически плотное звездное относительно $\bar{u}$ открытое множество $U \subset \mathbb{R}^p$ такое, что для любого начального приближения $u^0 \in U$ МН однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, причем $u^k \neq \bar{u}$ для всех k , и скорость сходимости является в точности линейной с асимптотическим общим частным $1/2$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u^{k+1} - \bar{u}\|}{\|u^k - \bar{u}\|} = \frac{1}{2}, \quad (1.2)$$

а последовательность $\{(u^k - \bar{u})/\|u^k - \bar{u}\|\}$ сходится к некоторому $v \in \ker \Phi'(\bar{u})$. Множество U может быть выбрано так, чтобы все направления из $\ker \Phi'(\bar{u})$, по которым отображение Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$, не были исключенными.

В доказательствах теоремы 1.1 и приводимых ниже теорем 1.2–1.4 ключевую роль играют оценки, собранные в следующей лемме, которая характеризует один шаг МН из точки u^k , лежащей в $K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v})$ с достаточно малыми $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, где для всякого $v \in \mathbb{R}^p$

$$K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, v) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \|u - \bar{u}\| \leq \varepsilon, \|\|v\|(u - \bar{u}) - \|u - \bar{u}\|v\| \leq \delta\|u - \bar{u}\|\|v\|\}.$$

В этой лемме используется однозначное представление каждого $u \in \mathbb{R}^p$ в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in (\ker \Phi'(\bar{u}))^\perp$ и $u_2 \in \ker \Phi'(\bar{u})$.

Лемма 1.1. Пусть выполнены предположения теоремы 1.1.

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любого $u^k \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v})$ линейный оператор $\mathcal{B}(u^k - \bar{u})$ обратим, итерационное уравнение (1.1) МН имеет единственное решение v^k , и выполняются оценки

$$(\mathcal{B}(u^k - \bar{u}))^{-1} = O(\|u^k - \bar{u}\|^{-1}), \quad (1.3)$$

$$u_1^k + v_1^k - \bar{u}_1 = O(\|u_1^k - \bar{u}_1\| \|u^k - \bar{u}\|) + O(\|u^k - \bar{u}\|^3), \quad (1.4)$$

$$u_2^k + v_2^k - \bar{u}_2 = \frac{1}{2}(u_2^k - \bar{u}_2) + O(\|u_1^k - \bar{u}_1\|) + O(\|u^k - \bar{u}\|^2) \quad (1.5)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если дополнительно предположить, что Φ трижды дифференцируемо вблизи точки $\bar{u}$, его третья производная удовлетворяет условию Липшица относительно $\bar{u}$, т. е.

$$\Phi'''(u) - \Phi'''(\bar{u}) = O(\|u - \bar{u}\|) \quad \text{при } u \rightarrow \bar{u},$$

то оценку (1.5) можно уточнить следующим образом:

$$u_2^k + v_2^k - \bar{u}_2 = \frac{1}{2}(u_2^k - \bar{u}_2) + \mathcal{T}(u^k) + O(\|u_1^k - \bar{u}_1\|) + O(\|u^k - \bar{u}\|^3), \quad (1.6)$$

где отображение $\mathcal{T} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ определяется равенством

$$\mathcal{T}(u) = \frac{1}{3!}(\mathcal{B}(u - \bar{u}))^{-1} \Pi \Phi'''(\bar{u})[u_2 - \bar{u}_2, u_2 - \bar{u}_2, u_2 - \bar{u}_2].$$

Доказательство. Первая часть утверждения леммы, и в частности, оценки (1.3)–(1.5), приводятся в [7, лемма 1], со ссылкой на доказательство в [8, лемма 1]. Они уточняют оценки, полученные в [9, лемма 1]. Подобные результаты были известны и ранее; см., например, [6, лемма 4.1].

Пусть $u^k \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v})$. Без ограничения общности будем считать, что $\bar{u} = 0$. Обозначим $A = \Phi'(\bar{u})$, $B = \Phi''(\bar{u})$, $C = \Phi'''(\bar{u})$. Оценка типа (1.6) неявным образом используется в доказательстве [10, теорема 7.4]. Она выводится из ингредиентов доказательства в [9, лемма 1], если используемый там остаточный член $R(u)$ в представлении

$$\Phi(u) = Au + \frac{1}{2}B[u, u] + R(u)$$

в соответствующих предположениях гладкости оценить как

$$R(u) = \frac{1}{3!}C[u - \bar{u}, u - \bar{u}, u - \bar{u}] + O(\|u - \bar{u}\|^4) \quad \text{при } u \rightarrow \bar{u}.$$

А именно, пусть $u^k \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v})$. Тогда, при известном v_1^k , уравнение для определения v_2^k имеет вид (см. [9, (15)]):

$$\begin{aligned} \Pi(B[u^k] + O(\|u^k\|^2))v_2 &= -\Pi\left(\frac{1}{2}B[u^k, u^k] + \frac{1}{3!}C[u^k, u^k, u^k] + O(\|u^k\|^4)\right) \\ &\quad -\Pi(B[u^k] + O(\|u^k\|^2))v_1^k \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Обозначая через $\tilde{\mathcal{B}}(u^k)$ линейный оператор в левой части, рассматриваемый как оператор из $\ker A$ в $(\operatorname{im} A)^\perp$, и используя (1.4), можем переписать это уравнение в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{B}}(u^k)v_2 &= -\frac{1}{2}\mathcal{B}(u^k)u_2^k - \Pi \left(\frac{1}{2}B[u^k, u_1^k] + \frac{1}{3!}C[u^k, u^k, u^k] \right) \\ &\quad - \Pi(B[u^k] + O(\|u^k\|^2))(-u_1^k + O(\|u_1^k\|\|u^k\|) + O(\|u^k\|^3)) + O(\|u^k\|^4) \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{B}(u^k)u_2^k - \frac{1}{3!}\Pi C[u^k, u^k, u^k] + O(\|u_1^k\|\|u^k\|) + O(\|u^k\|^4) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Как показано в [9],

$$(\tilde{\mathcal{B}}(u^k))^{-1} = (\mathcal{B}(u^k))^{-1} + O(1) = O(\|u^k\|^{-1}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

и поэтому

$$v_2 = -\frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{3!}(\mathcal{B}(u^k))^{-1}\Pi C[u^k, u^k, u^k] + O(\|u_1^k\|) + O(\|u^k\|^3) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

что и дает оценку (1.6). $\square$

2. Характер сходимости к особым решениям, установленный в теореме 1.1, служит основой для способов ускорения МН в таких ситуациях, одним из которых является экстраполяция [1]. Ее простейший вариант (экстраполяция глубины 1) состоит в генерировании, параллельно с последовательностью $\{u^k\}$ МН, вспомогательной последовательности $\{\hat{u}^k\}$, получаемой удвоением шага МН: для каждого k полагаем

$$\hat{u}^{k+1} = u^k + 2v^k. \quad (1.7)$$

Поскольку (1.7) никак не влияет на основную итерационную последовательность $\{u^k\}$, эта процедура легко совмещается с любыми реализациями МН, в том числе с его глобализованными вариантами, и это не связано с какими-либо дополнительными вычислительными затратами, кроме одного лишнего вычисления Φ на каждой итерации, необходимого для оценки качества полученного $\hat{u}^{k+1}$.

Следующая теорема является частным случаем результата в [1, теорема 4.1], который был получен в [11].

Теорема 1.2. Пусть выполнены предположения теоремы 1.1, и множество U выбрано в соответствии с этой теоремой. Пусть Φ трижды дифференцируемо в точке $\bar{u}$.

Тогда для любого начального приближения $u^0 \in U$ МН с экстраполяцией однозначно определяет последовательности $\{u^k\}$ и $\{\hat{u}^k\}$, эти последовательности сходятся к $\bar{u}$, причем $u^k \neq \bar{u}$ для всех k , и существует число $\varkappa(u^0) \geq 0$ такое, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{u}^{k+2} - \bar{u}\|}{\|u^k - \bar{u}\|^2} = \varkappa(u^0). \quad (1.8)$$

В частности, если $\varkappa(u^0) > 0$, то $\hat{u}^k \neq \bar{u}$ для всех k , и скорость сходимости последовательности $\{\hat{u}^k\}$ является в точности линейной с асимптотическим общим частным $1/4$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\hat{u}^{k+1} - \bar{u}\|}{\|\hat{u}^k - \bar{u}\|} = \frac{1}{4}. \quad (1.9)$$

Если же $\varkappa(u^0) = 0$, то

$$\widehat{u}^{k+2} - \bar{u} = O(\|u^k - \bar{u}\|^3) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

и, в частности,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\widehat{u}^k - \bar{u}\|^{1/k} \leq \frac{1}{8}. \quad (1.11)$$

Такая версия теоремы возникает как результат анализа утверждения и доказательства в [11, теорема 4.2]. Оценка (1.9) немедленно следует из (1.8) при $\varkappa(u^0) > 0$. Оценка (1.11) выводится из (1.10) с помощью [12, п. 9.3.1]; см. доказательство теоремы 2.2 ниже. Отметим также, что в [11, теорема 4.2] и [1, теорема 4.1] нет требований трехкратной дифференцируемости Φ , но, на самом деле, избежать их, видимо, нельзя: это требуется для существования предела в (1.8).

Более сложные варианты экстраполяции (большой глубины) [1] позволяют получить дальнейшее увеличение скорости сходимости, давая асимптотическое общее частное $1/8$, $1/16$ и т. д.

3. Другим способом ускорения сходимости МН к особым решениям является *оверрелаксация*, которая уже не связана с генерированием каких-либо вспомогательных последовательностей, а имеет целью более высокую скорость сходимости основной последовательности соответствующим образом модифицированного МН.

Двухшаговая оверрелаксация состоит в следующем. Фиксируем параметры $\tau \in (0, 1)$ и $c > 0$. Для четных k (начиная с $k = 0$) вычисляем v^k как решение итерационного уравнения МН (1.1), и полагаем $u^{k+1} = u^k + v^k$. Далее, вычисляем v^{k+1} как решение итерационного уравнения МН (1.1), в которое вместо u^k подставлено u^{k+1} , и полагаем

$$t_k = 2 - c\|v^{k+1}\|^\tau, \quad u^{k+2} = u^{k+1} + t_k v^{k+1}. \quad (1.12)$$

Таким образом, каждый второй шаг такого метода «асимптотически» удваивается. Полное удвоение каждого второго, а тем более каждого шага может выводить приближения из области сходимости.

Локальная сходимость такого процесса характеризуется следующим результатом из [1, теорема 4.2], оригинальная версия которого получена в [13, теорема 1.3].

Теорема 1.3. Пусть выполнены предположения теоремы 1.1.

Тогда для любых $\tau \in (0, 1)$ и $c > 0$ найдется звездное относительно $\bar{u}$ открытое множество $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ такое, что для любого начального приближения $u^0 \in \tilde{U}$ МН с двухшаговой оверрелаксацией однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, и скорость сходимости подпоследовательности $\{u^{2k}\}$ является сверхлинейной, а именно,

$$\|u^{2(k+1)} - \bar{u}\| = O(\|u^{2k} - \bar{u}\|^{1+\tau}) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty. \quad (1.13)$$

Множество $\tilde{U}$ может быть выбрано так, чтобы все направления из $\ker \Phi'(\bar{u})$, по которым отображение Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$, не были исключенными.

Заметим, что в этой и последующих теоремах не утверждается, что множество $\tilde{U}$ является асимптотически плотным, в отличие от множества U в теореме 1.1. Однако, можно утверждать, что и «асимптотически тощим» это множество не является, поскольку из его

звездности и открытости вытекает, что для любого его элемента u оно содержит множество вида $(\bar{u} + B(0, \varepsilon) \cap \text{cone } B(u - \bar{u}, \delta)) \setminus \{\bar{u}\}$ с достаточно малыми $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. В частности, согласно последнему утверждению теоремы 1.3, можно взять $u = \bar{u} + tv$ для любого направления $v \in \ker \Phi'(\bar{u}) \setminus \{0\}$, по которому Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$, и любого достаточно малого $t > 0$: тогда $\tilde{U}$ содержит множество вида $K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, v) \setminus \{\bar{u}\}$ с достаточно малыми $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, причем элементарная тригонометрия позволяет заключить, что

$$K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, v) = \bar{u} + B(0, \varepsilon) \cap \text{cone } B\left(v, \delta \sqrt{4\|v\|^2 - \delta^2} / (2\|v\|^2)\right)$$

(формула подразумевает, что $\delta < 2\|v\|$).

В [13] предполагается четырехкратная непрерывная дифференцируемость Φ , а в доказательстве явно используется третья производная в решении. Однако, таких требований гладкости можно избежать (с помощью теоремы о среднем и липшицевости второй производной относительно решения), как это делается в теореме 2.3 ниже, обобщающей теорему 1.3.

Кроме того, один из ключевых элементов теории в [6] состоит в демонстрации того, что для любых наперед заданных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется асимптотически плотное звездное относительно $\bar{u}$ открытое множество U такое, что *один шаг* МН из любой точки $u^0 \in U$ приводит в $K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, v)$ с соответствующим $v \in \ker \Phi'(\bar{u}) \setminus \{0\}$ (зависящим от u^0). Таким образом, если предварять запуск обсуждаемых методов одним шагом базового МН, то можно гарантировать утверждаемые свойства сходимости и скорости сходимости из асимптотически плотного звездного множества начальных точек.

Отметим также, что в [11, разд. 3.3] рассматривается двухшаговая схема, в которой t_k в (1.12) выбирается не указанным там способом, а как фиксированное число $t \in (1, 2)$, либо как элемент неубывающей последовательности, сходящейся к 2. В первом случае в [11, теорема 3.5] установлена двухшаговая линейная сходимость с асимптотическим общим частным $(1 - t/2)/2$, а во втором в [11, следствие 3.6] установлено *существование* такой последовательности $\{t_k\}$, для которой имеет место двухшаговая сверхлинейная сходимость (без конструктивных способов построения такой последовательности).

4. *Трехшаговая оверрелаксация* не требует выбора параметров τ и s и состоит в полном удвоении каждого третьего шага. А именно, для k кратных 3 (начиная с $k = 0$), вычисляем v^k как решение итерационного уравнения МН (1.1), полагаем $u^{k+1} = u^k + v^k$; вычисляем v^{k+1} как решение итерационного уравнения МН (1.1), в которое вместо u^k подставлено u^{k+1} , и полагаем $u^{k+2} = u^{k+1} + v^{k+1}$; вычисляем v^{k+2} как решение итерационного уравнения МН (1.1), в которое вместо u^k подставлено u^{k+2} , и полагаем

$$u^{k+3} = u^{k+2} + 2v^{k+2}. \quad (1.14)$$

В смысле отсутствия необходимости выбирать параметры τ и s реализация данной схемы проще, чем для двухшаговой оверрелаксации, но обоснование локальной сходимости требует существенно более жестких предположений. Следующий результат приводится в [1, теорема 4.3], со ссылкой на оригинальное утверждение — в [11, теорема 3.3], а также на версию этого результата в банаховых пространствах — в [10, теорема 7.4]. В [11, теорема 3.3] предполагается липшицевость третьей производной, а не ее липшицевость только относительно $\bar{u}$, как в теореме 1.4, но на самом деле нужно именно последнее свойство; см. доказательство теоремы 2.4 ниже, которая обобщает теорему 1.4.

Теорема 1.4. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ трижды дифференцируемо вблизи точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, и его третья производная удовлетворяет условию Липшица относительно $\bar{u}$. Пусть $\bar{u}$ является особым решением (0.1), и отображение Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по любому направлению из $\ker \Phi'(\bar{u}) \setminus \{0\}$. Предположим дополнительно, что

$$\Phi'''(\bar{u})[v, v, v] \notin \text{im } \Phi'(\bar{u}) \quad \forall v \in \ker \Phi'(\bar{u}) \setminus \{0\}.$$

Тогда существует звездное относительно $\bar{u}$ открытое множество $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ такое, что для любого начального приближения $u^0 \in \tilde{U}$ МН с трехшаговой оверрелаксацией однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, и скорость сходимости подпоследовательности $\{u^{3k}\}$ является квадратичной:

$$\|u^{3(k+1)} - \bar{u}\| = O(\|u^{3k} - \bar{u}\|^2) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.15)$$

Множество $\tilde{U}$ может быть выбрано так, чтобы все направления из $\ker \Phi'(\bar{u}) \setminus \{0\}$ не были исключенными.

З а м е ч а н и е 1.1. Из оценок (1.4) и (1.5) в лемме 1.1 легко вывести, что при соответствующем выборе $\tilde{U}$, оценка (1.13) в теореме 1.3 гарантирует двухшаговую сверхлинейную сходимость всей последовательности $\{u^k\}$, т. е. выполнение

$$\|u^{k+2} - \bar{u}\| = O(\|u^k - \bar{u}\|^{1+\tau}) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

Аналогично, оценка (1.15) в теореме 1.4 гарантирует трехшаговую квадратичную сходимость всей последовательности $\{u^k\}$, т. е. выполнение

$$\|u^{k+3} - \bar{u}\| = O(\|u^k - \bar{u}\|^2) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (1.17)$$

См. замечание 2.1 ниже.

Требование 2-регулярности Φ в точке $\bar{u}$ по любому направлению из $\ker \Phi'(\bar{u}) \setminus \{0\}$ может выполняться только при $\dim \ker \Phi'(\bar{u})$, равном 1 или четном. Это очевидным образом следует из того, что иначе $\det \mathcal{B}(v)$ есть однородный полином нечетной степени на подпространстве $\ker \Phi'(\bar{u})$ размерности больше 1, а всякий такой полином имеет нетривиальные нули. Более того, из теоремы Хопфа [14, р. 235] вытекает, что на самом деле и для четных размерностей больше 2 такое невозможно, т. е. указанное требование может выполняться только при $\dim \ker \Phi'(\bar{u}) = 1$ или 2.

5. Сравнительно недавно в контексте особых решений уравнений стала обсуждаться еще одна стратегия ускорения итерационных методов, а именно, итерация МН с *ускорением Андерсона* (глубины 1), состоящая в следующем (см. [3] и приводимые там ссылки на более ранние работы). Вычисляем v^k как решение итерационного уравнения (1.1) МН. Для $k = 0$ полагаем $u^1 = u^0 + v^0$; иначе, если $v^k = v^{k-1}$, то полагаем $\gamma_k = 0$, а в противном случае

$$\gamma_k = \frac{\langle v^k - v^{k-1}, v^k \rangle}{\|v^k - v^{k-1}\|^2}, \quad u^{k+1} = (1 - \gamma_k)(u^k + v^k) + \gamma_k(u^{k-1} + v^{k-1}), \quad (1.18)$$

что соответствует решению задачи оптимизации

$$\|(1 - \gamma)v^k + \gamma v^{k-1}\|^2 \rightarrow \min, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Некоторую мотивировку такого выбора можно найти в [15], где показано, что вблизи неособого решения величина

$$\theta_k = \frac{\|(1 - \gamma_k)v^k + \gamma_k v^{k-1}\|}{\|v^k\|}$$

(которая всегда не превосходит 1, поскольку γ_k минимизирует числитель, который совпадает со знаменателем при $\gamma_k = 0$) входит как множитель в линейную часть оценки $\|v^{k+1}\|$ через $\|v^k\|$, где $\|v^k\|$ может рассматриваться как невязка в точке u^k задачи поиска неподвижной точки ньютоновского итерационного отображения $u \mapsto u - (\Phi'(u))^{-1}\Phi(u)$.

В случае предполагаемой сходимости к особому решению, для того, чтобы удерживать приближения в области сходимости, применяется модификация описанного алгоритма, а именно, МН с ускорением Андерсона с γ -safeguardings [3]. Фиксируем $r \in (0, 1)$. Для $k = 0$ вычисляем v^0 как решение итерационного уравнения (1.1) МН и полагаем $u^1 = u^0 + v^0$. Для $k \geq 1$ вычисляем v^k как решение итерационного уравнения (1.1) МН и γ_k согласно первому равенству в (1.18). Если $\gamma_k = 0$ или $\gamma_k \geq 1$, то полагаем $\lambda_k = 0$, иначе полагаем $\beta_k = r\|v^k\|/\|v^{k-1}\|$. Если $|\gamma_k|/(1 - \gamma_k) > \beta_k$, то полагаем $\lambda_k = \beta_k/(\gamma_k(\beta_k + \text{sign } \gamma_k))$; иначе $\lambda_k = 1$. Полагаем

$$u^{k+1} = (1 - \lambda_k \gamma_k)(u^k + v^k) + \lambda_k \gamma_k(u^{k-1} + v^{k-1}).$$

Результат о локальной сходимости описанного метода приводится в [3, теорема 6.1].

Теорема 1.5. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ трижды непрерывно дифференцируемо вблизи точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$. Пусть $\bar{u}$ является решением (0.1), причем $\dim \ker \Phi'(\bar{u}) = 1$, т. е. $\ker \Phi'(\bar{u}) = \text{lin}\{\bar{v}\}$ для некоторого $\bar{v} \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, и отображение Φ 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по направлению $\bar{v}$.

Тогда для любого $r \in (0, 1)$ найдутся звездное относительно $\bar{u}$ открытое множество $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^p$ и числа $C > 0$ и $\kappa \in (0, 1)$ такие, что для любого начального приближения $u^0 \in \tilde{U}$ МН с ускорением Андерсона с γ -safeguardings однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, и скорость сходимости характеризуется неравенствами

$$\|u_1^{k+1} - \bar{u}_1\| \leq C \max\{|1 - \lambda_k \gamma_k| \|u^k - \bar{u}\|^2, |\lambda_k \gamma_k| \|u^{k-1} - \bar{u}\|^2\},$$

$$\|u_2^{k+1} - \bar{u}_2\| \leq \kappa \theta_k^\lambda \|u_2^k - \bar{u}_2\|$$

для всех $k \geq 1$, где

$$\theta_k^\lambda = \frac{\|(1 - \lambda_k \gamma_k)v^k + \lambda_k \gamma_k v^{k-1}\|}{\|v^k\|}.$$

Множество $\tilde{U}$ может быть выбрано так, чтобы направления $\bar{v}$ и $-\bar{v}$ не были исключенными.

Приведенная теорема обосновывает принципиальную применимость и локальную сходимость МН с ускорением Андерсона с γ -safeguardings в случае особых решений, и в некотором роде объясняет наблюдаемый на практике положительный эффект от этого ускорения, если последовательность $\{\lambda_k \gamma_k\}$ ограничена, а θ_k^λ становится малым, по крайней мере начиная с некоторого k . Необходимо, однако, отметить, что конкретных утверждений о поведении последовательностей $\{\lambda_k \gamma_k\}$ и $\{\theta_k^\lambda\}$ в [3] не приводится.

Как утверждается в [16] (со ссылкой на результаты в [17]), в случае сходимости к неособому решению лучше использовать МН без ускорения Андерсона (и других модификаций, обсуждавшихся выше). В этой связи в [16] была разработана техника адаптивных γ -safeguardings, служащая именно этой цели: идентификации сходимости к особому/неособому решению и, соответственно, «включение»/«выключение» ускорения Андерсона.

Помимо этого, в [18] обсуждалось применение ускорения Андерсона к возмущенным методам Ньютона, в частности, к методу Левенберга–Марквардта. Также упомянем работу [19], где был разобран специальный случай $p = 1$, а также работу [20], где приводятся результаты сравнительно численного тестирования МН и его вариантов с двухшаговой оверрелаксацией и с ускорением Андерсона.

2 Ускорители метода Ньютона для кусочно-гладких уравнений

Пусть теперь отображение Φ является только кусочно-гладким вблизи $\bar{u}$, т. е. оно непрерывно вблизи $\bar{u}$, и существуют непрерывно-дифференцируемые вблизи $\bar{u}$ кусочные отображения $\Phi^1, \dots, \Phi^q : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ такие, что

$$\Phi(u) \in \{\Phi^1(u), \dots, \Phi^q(u)\} \quad \forall u \in \mathbb{R}^p.$$

Одно из важнейших приложений уравнений вида (0.1) с кусочно-гладким Φ связано с переформулировками комплементарных задач; см. разд. 3.

Для всякого $u \in \mathbb{R}^p$ определим множество

$$\mathcal{A}(u) = \{j \in \{1, \dots, q\} \mid \Phi(u) = \Phi^j(u)\}$$

индексов активных в точке u кусочных отображений. Согласно определению кусочно-гладкого отображения, $\mathcal{A}(u) \neq \emptyset$ для любого $u \in \mathbb{R}^p$, причем многозначное отображение $\mathcal{A}(\cdot)$ очевидно полунепрерывно сверху вблизи фиксированного $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, и в частности $\mathcal{A}(u) \subset \mathcal{A}(\bar{u})$ для любого $u \in \mathbb{R}^p$, достаточно близкого к $\bar{u}$. Решение $\bar{u}$ уравнения (0.1) с кусочно-гладким отображением Φ будем считать особым, если матрица $(\Phi^j)'(\bar{u})$ вырождена хотя бы для одного $j \in \mathcal{A}(\bar{u})$.

Из [21, лемма 4.6.1] следует, что Φ дифференцируемо в точке $\bar{u}$ по любому направлению $v \in \mathbb{R}^p$, причем его производная в этой точке по направлению v удовлетворяет включению

$$\Phi'(\bar{u}; v) \in \{(\Phi^j)'(\bar{u})v \mid j \in \mathcal{A}(\bar{u})\} \quad \forall v \in \mathbb{R}^p.$$

В связи с этим введем множество индексов

$$\mathcal{A}(\bar{u}, v) = \{j \in \mathcal{A}(\bar{u}) \mid v \in \ker(\Phi^j)'(\bar{u})\}.$$

Ниже потребуется следующий результат из [4, предложение 1].

Предложение 2.1. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ является кусочно-гладким вблизи точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, с гладкими кусочными отображениями $\Phi^1, \dots, \Phi^q : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Пусть $\bar{u}$ является решением (0.1), и пусть для некоторого $\bar{v} \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ выполняется

$$\Phi'(\bar{u}; \bar{v}) = 0. \quad (2.1)$$

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\mathcal{A}(u) \subset \mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v}) \quad \forall u \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v}).$$

1. Считая фиксированным произвольное отображение $\mathcal{J} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$, удовлетворяющее условию

$$\mathcal{J}(u) \in \{(\Phi^j)'(u) \mid j \in \mathcal{A}(u)\} \quad \forall u \in \mathbb{R}^p, \quad (2.2)$$

кусочный метод Ньютона (КМН) генерирует следующее приближение как $u^{k+1} = u^k + v^k$, где v^k определяется как решение линейного уравнения

$$\Phi(u^k) + \mathcal{J}(u^k)v = 0. \quad (2.3)$$

Следующий результат получен в [4, теорема 1].

Теорема 2.1. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ является кусочно-гладким вблизи точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, с гладкими кусочными отображениями $\Phi^1, \dots, \Phi^q : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Пусть $\bar{u}$ является решением (0.1), и пусть для некоторого $\bar{v} \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ выполнены следующие предположения:

- 1) для каждого $j \in \mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v})$ кусочное отображение Φ^j дважды дифференцируемо вблизи $\bar{u}$, его вторая производная удовлетворяет условию Липшица относительно $\bar{u}$, имеет место равенство $\ker(\Phi^j)'(\bar{u}) = \mathcal{N}$, где линейное подпространство $\mathcal{N}$ не зависит от j , и Φ^j 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по направлению $\bar{v}$;
- 2) имеет место (2.1).

Пусть отображение $\mathcal{J} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ удовлетворяет (2.2).

Тогда для любых $\hat{\varepsilon} > 0$ и $\hat{\delta} > 0$ найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любого начального приближения $u^0 \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\}$ КМН однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, причем $u^k \neq \bar{u}$ и $u^k \in K_{\hat{\varepsilon}, \hat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$ для всех k , и скорость сходимости является в точности линейной с асимптотическим общим частным $1/2$, т. е. выполняется (1.2).

Отметим, что в [4, теорема 1] утверждение несколько более точное, в частности, в плане оценок скорости сходимости. Соответствующие уточнения возможны и для теоремы 1.1 (см. [9, теорема 1, замечание 2]). Здесь, однако, ограничимся приведенными формулировками.

2. Для КМН с экстраполяцией удастся установить геометрическую скорость сходимости с асимптотическим знаменателем $1/4$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены предположения теоремы 2.1.

Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любого начального приближения $u^0 \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v})$ КМН с экстраполяцией однозначно определяет последовательности $\{u^k\}$ и $\{\hat{u}^k\}$, обе эти последовательности сходятся к $\bar{u}$, причем

$$\hat{u}^{k+2} - \bar{u} = O(\|u^k - \bar{u}\|^2) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

и, в частности,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|\hat{u}^k - \bar{u}\|^{1/k} \leq \frac{1}{4}. \quad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 2.1 и (2.2), $\hat{\varepsilon} > 0$ и $\hat{\delta} > 0$ можно выбрать столь малыми, что при $u^k \in K_{\hat{\varepsilon}, \hat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$ итерационное уравнение (2.3) имеет вид

$$\Phi^j(u^k) + (\Phi^j)'(u^k)v = 0 \quad (2.6)$$

с некоторым $j \in \mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v})$. Выбирая $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ для этих $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ согласно теореме 2.1, получаем, что для $u^0 \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v})$ КМН с экстраполяцией однозначно определяет последовательности $\{u^k\}$ и $\{\widehat{u}^k\}$, $\{u^k\}$ сходится к $\bar{u}$, причем $u^k \neq \bar{u}$ и $u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$ для всех k , и выполняется (1.2).

Всюду далее будем использовать однозначное представление каждого $u \in \mathbb{R}^p$ в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \mathcal{N}^\perp$ и $u_2 \in \mathcal{N}$. Из оценок (1.4) и (1.5) в лемме 1.1, применяемой к уравнению

$$\Phi^j(u) = 0,$$

при достаточно малых $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ имеем неравенства

$$\|u_1^k + v_1^k - \bar{u}_1\| \leq C(\|u_1^k - \bar{u}_1\| \|u^k - \bar{u}\| + \|u^k - \bar{u}\|^3), \quad (2.7)$$

$$\left\| u_2^k + v_2^k - \bar{u}_2 - \frac{1}{2}(u_2^k - \bar{u}_2) \right\| = \left\| \frac{1}{2}(u_2^k - \bar{u}_2) + v_2^k \right\| \leq C(\|u_1^k - \bar{u}_1\| + \|u^k - \bar{u}\|^2) \quad (2.8)$$

$$\forall u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}),$$

причем $C > 0$ в этих оценках может быть выбрано независимым от $j \in \mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v})$, используемого в (2.6), поскольку множество индексов $\mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v})$ конечно. Далее считаем, что $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ выбраны таким образом, и тогда оценки (2.7) и (2.8) имеют место для всех k , поскольку $\{u^k\} \subset K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$.

Из (2.7) и (2.8) очевидно следуют оценки

$$u^{k+1} - \bar{u} = O(\|u^k - \bar{u}\|),$$

(это также следует непосредственно из (1.2)), и

$$\begin{aligned} v_1^{k+1} &= -(u_1^{k+1} - \bar{u}) + O(\|u^{k+1} - \bar{u}\|^2), \\ v_2^{k+1} &= -\frac{1}{2}(u_2^{k+1} - \bar{u}) + O(\|u^{k+1} - \bar{u}\|^2) \\ &\text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Используя эти оценки, из (1.7), (2.7) и (2.8) выводим

$$\begin{aligned} \widehat{u}_1^{k+2} - \bar{u}_1 &= v_1^{k+1} + u_1^{k+2} - \bar{u}_1 = -(u_1^{k+1} - \bar{u}) + O(\|u^{k+1} - \bar{u}\|^2) = O(\|u^k - \bar{u}\|^2), \\ \widehat{u}_2^{k+2} - \bar{u}_2 &= u_2^{k+2} - \bar{u}_2 + v_2^{k+1} = O(\|u_1^{k+1} - \bar{u}_1\|) + O(\|u^{k+1} - \bar{u}\|^2) = O(\|u^k - \bar{u}\|^2) \\ &\text{при } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что и дает (2.4).

Согласно (2.4), существует $C > 0$ такое, что

$$\|\widehat{u}^{k+2} - \bar{u}\| \leq C\|u^k - \bar{u}\|^2 \quad \forall k,$$

и поскольку $\{u^k\}$ сходится к $\bar{u}$, отсюда следует, что $\{\widehat{u}^k\}$ также сходится к $\bar{u}$, и более того,

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} \|\widehat{u}^k - \bar{u}\|^{1/k} &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} C^{1/k} \|u^{k-2} - \bar{u}\|^{2/k} = \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \|u^{k-2} - \bar{u}\|^{1/k} \right)^2 \\ &\leq \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u^{k-1} - \bar{u}\|}{\|u^{k-2} - \bar{u}\|} \right)^2 = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|u^{k-1} - \bar{u}\|}{\|u^{k-2} - \bar{u}\|} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

где второе неравенство следует из [12, п. 9.3.1], а второе и третье равенства — из (1.2). Тем самым доказано (2.5). $\square$

Проблема с получением в кусочно-гладком случае более полного аналога теоремы 1.2 состоит в существовании предела в (1.8), если в процессе итераций происходит бесконечное число переключений с одного гладкого кусочного отображения на другое: $\mathcal{J}(u^k) = (\Phi^j)'(u^k)$ реализуется с разными j . Вместе с тем, контрпример, демонстрирующий неулучшаемость оценки (2.5), на данный момент авторам не известен.

3. Для КМН с двухшаговой оверрелаксацией удастся получить следующее обобщение теоремы 1.3.

Теорема 2.3. Пусть выполнены предположения теоремы 2.1.

Тогда для любых $\tau \in (0, 1)$, $c > 0$, $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ найдутся $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любого начального приближения $u^0 \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v})$ КМН с двухшаговой оверрелаксацией однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, причем $u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$ для всех k , и скорость сходимости подпоследовательности $\{u^{2k}\}$ является сверхлинейной, а именно, выполняется (1.13).

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.2, выберем $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ столь малыми, что для $u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$ итерационное уравнение (2.3) имеет вид (2.6) с некоторым $j \in \mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v})$, это уравнение имеет единственное решение v^k , и имеют место оценки (2.7) и (2.8), причем $C > 0$ в этих оценках не зависит от $j \in \mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v})$, используемого в (2.6).

Пусть $\bar{\varepsilon} = \varepsilon > 0$ и $\bar{\delta} = \delta > 0$ выбраны для указанных $\widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\delta}$ согласно теореме 2.1, и тогда, в частности, для четного k и $u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\}$, корректно определено $u^{k+1} \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$, а значит, и u^{k+2} . В дальнейшем $\bar{\varepsilon}$, ε , $\bar{\delta}$ и δ будут по мере необходимости уменьшаться, но всегда предполагаются выполненными условия $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$ и $\delta \in (0, \bar{\delta}]$.

Оставшаяся часть доказательства использует ингредиенты доказательств в [13, теорема 1.3] и [9, теорема 1]. Без ограничения общности будем считать, что $\bar{u} = 0$ и $\|\bar{v}\| = 1$. Сразу заметим, что при этом для любого $u \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\}$ имеют место неравенства

$$\|u_1\| \leq \delta \|u\|, \quad (1 - \delta)\|u\| \leq \|u_2\|, \quad (2.9)$$

$$\left\| \frac{u_2}{\|u_2\|} - \bar{v} \right\| \leq 2\delta \quad (2.10)$$

(см. доказательство в [9, теорема 1]).

Для четного k и $u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$ положим

$$\rho_k = c \|v^{k+1}\|^\tau; \quad (2.11)$$

тогда $t_k = 2 - \rho_k$. Из (2.7) и (2.8) имеем:

$$u_1^{k+1} = u_1^k + v_1^k = O(\|u_1^k\| \|u^k\|) + O(\|u^k\|^3), \quad (2.12)$$

$$u_2^{k+1} = u_2^k + v_2^k = \frac{1}{2} u_2^k + O(\|u_1^k\|) + O(\|u^k\|^2), \quad (2.13)$$

$$u_1^{k+1} + v_1^{k+1} = O(\|u_1^{k+1}\| \|u^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^3), \quad (2.14)$$

$$u_2^{k+1} + v_2^{k+1} = \frac{1}{2} u_2^{k+1} + O(\|u_1^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^2) \quad (2.15)$$

при $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$.

Из (2.14) и (2.15) далее выводим

$$v_1^{k+1} = -u_1^{k+1} + O(\|u_1^{k+1}\| \|u^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^3), \quad (2.16)$$

$$v_2^{k+1} = -\frac{1}{2}u_2^{k+1} + O(\|u_1^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^2) \quad (2.17)$$

при $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$.

Тогда

$$\begin{aligned} u_1^{k+2} &= u_1^{k+1} + t_k v_1^{k+1} = u_1^{k+1} + v_1^{k+1} + (1 - \rho_k) v_1^{k+1} \\ &= (1 - \rho_k) v_1^{k+1} + O(\|u_1^{k+1}\| \|u^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^3) \\ &= -(1 - \rho_k) u_1^{k+1} + O(\|u_1^{k+1}\| \|u^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^3) \\ &= O(\|u_1^k\| \|u^k\|) + O(\|u^k\|^3) \quad \text{при } \bar{\varepsilon} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где первое равенство следует из (1.12), третье из (2.14), четвертое из (2.16), а последнее из (2.12). В частности, найдется $C_1 > 0$ такое, что

$$\|u_1^{k+2}\| \leq C_1 \|u^k\|^2 \quad \forall u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}), \quad (2.19)$$

если $\bar{\varepsilon} > 0$ выбрано достаточно малым.

Аналогично,

$$\begin{aligned} u_2^{k+2} &= u_2^{k+1} + t_k v_2^{k+1} = u_2^{k+1} + 2v_2^{k+1} - \rho_k v_2^{k+1} = -\rho_k v_2^{k+1} + O(\|u_1^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} \rho_k u_2^{k+1} + O(\|u_1^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^2) \\ &= \left(\frac{1}{4} \rho_k u_2^k + O(\rho_k \|u_1^k\|) + O(\rho_k \|u^k\|^2) \right) + (O(\|u_1^k\| \|u^k\|) + O(\|u^k\|^3)) + O(\|u^k\|^2) \\ &= \frac{1}{4} \rho_k u_2^k + O(\rho_k \|u_1^k\|) + O(\|u^k\|^2) \quad \text{при } \bar{\varepsilon} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где первое равенство следует из (1.12), третье и четвертое из (2.17), а пятое из (2.12) и (2.13).

Далее, из (2.12), (2.13), (2.16), (2.17) выводим

$$v_1^{k+1} = O(\|u_1^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^3) = O(\|u_1^k\| \|u^k\|) + O(\|u^k\|^3),$$

$$v_2^{k+1} = -\frac{1}{4}u_2^k + O(\|u_1^k\|) + O(\|u^k\|^2)$$

при $\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$,

и поэтому, согласно (2.11), и с учетом второго неравенства в (2.9),

$$\begin{aligned} \rho_k &= c \left\| -\frac{1}{4}u_2^k + O(\|u_1^k\|) + O(\|u^k\|^2) \right\|^\tau = \frac{c}{4^\tau} \|u_2^k\|^\tau (1 + O(\|u_1^k\|/\|u^k\|) + O(\|u^k\|))^\tau \\ &= \frac{c}{4^\tau} \|u_2^k\|^\tau (1 + O(\|u_1^k\|/\|u^k\|) + O(\|u^k\|)) \\ &= \frac{c}{4^\tau} \|u_2^k\|^\tau + O(\|u_1^k\|/\|u^k\|^{1-\tau}) + O(\|u^k\|^{1+\tau}) \quad \text{при } \bar{\varepsilon} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда, согласно (2.20),

$$u_2^{k+2} = \frac{c}{4^{1+\tau}} \|u_2^k\|^\tau u_2^k + O(\|u_1^k\| \|u^k\|^\tau) + O(\|u^k\|^2) \quad \text{при } \bar{\varepsilon} \rightarrow 0. \quad (2.21)$$

Таким образом, найдется $C_2 > 0$ такое, что

$$\left\| u_2^{k+2} - \frac{c}{4^{1+\tau}} \|u_2^k\|^\tau u_2^k \right\| \leq C_2 (\|u_1^k\| \|u^k\|^\tau + \|u^k\|^2) \quad \forall u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}), \quad (2.22)$$

если $\bar{\varepsilon} > 0$ выбрано достаточно малым.

Из (2.18) и (2.21) вытекает оценка

$$u^{k+2} = O(\|u^k\|^{1+\tau}) \quad \text{при } \bar{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad (2.23)$$

откуда и из (2.12) и (2.13) следует, в частности, что для любого $q \in (1/2, 1)$ выполняется

$$\max\{\|u^{k+1}\|, \|u^{k+2}\|\} \leq q \|u^k\| \quad \forall u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}), \quad (2.24)$$

если $\bar{\varepsilon} > 0$ выбрано достаточно малым. С другой стороны, из (2.9), (2.18) и (2.21) следует существование $\gamma > 0$ такого, что

$$0 < \gamma \|u^k\|^{1+\tau} \leq \|u_2^{k+2}\| \leq \|u^{k+2}\| \quad \forall u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\} \quad (2.25)$$

при достаточно малых $\bar{\varepsilon} > 0$ и $\bar{\delta} > 0$.

Из (2.19), (2.22) и (2.25) имеем: существует $C > 0$ такое, что при достаточно малых $\bar{\varepsilon} > 0$ и $\bar{\delta} > 0$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u^{k+2}}{\|u^{k+2}\|} - \frac{u_2^k}{\|u_2^k\|} \right\| &= \left\| \frac{\|u_2^k\| u^{k+2} - \|u^{k+2}\| u_2^k}{\|u^{k+2}\| \|u_2^k\|} \right\| = \frac{C(\|u_1^k\| \|u^k\|^\tau + \|u^k\|^2)}{\|u^{k+2}\|} \\ &\leq \frac{C(\|u_1^k\| \|u^k\|^\tau + \|u^k\|^2)}{\gamma \|u^k\|^{1+\tau}} = \frac{C}{\gamma} \left(\frac{\|u_1^k\|}{\|u^k\|} + \|u^k\|^{1-\tau} \right) \quad \forall u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

и аналогично

$$\left\| \frac{u_2^{k+2}}{\|u_2^{k+2}\|} - \frac{u_2^k}{\|u_2^k\|} \right\| \leq \frac{C}{\gamma} \left(\frac{\|u_1^k\|}{\|u^k\|} + \|u^k\|^{1-\tau} \right) \quad \forall u^k \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\} \quad (2.27)$$

Пусть ε и δ выбраны так, что

$$2\delta + \frac{C}{\gamma} \left(\delta + \left(\frac{C_1}{\gamma} + 1 \right) \frac{\varepsilon^{1-\tau}}{1 - q^{1-\tau}} \right) \leq \bar{\delta}, \quad (2.28)$$

и пусть $u^0 \in K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\}$. Предположим, что для некоторого четного k КМН с двухшаговой оверрелаксацией сгенерировал точки u^j , $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, причем все они лежат в $K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$. Тогда, согласно выбору $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\delta}$, алгоритм однозначно определяет u^{k+1} и u^{k+2} , и, в силу (2.24), с учетом первого неравенства в (2.25),

$$0 < \|u^{k+2}\| \leq q \|u^k\| \leq q^2 \|u^{k-2}\| \leq \dots \leq q^{1+k/2} \|u^0\| \leq q^{1+k/2} \varepsilon \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}. \quad (2.29)$$

Используя (2.10), (2.26), (2.27), а также (2.19) и (2.25), далее выводим

$$\left\| \frac{u^{k+2}}{\|u^{k+2}\|} - \bar{v} \right\| \leq \left\| \frac{u_2^k}{\|u_2^k\|} - \bar{v} \right\| + \left\| \frac{u^{k+2}}{\|u^{k+2}\|} - \frac{u_2^k}{\|u_2^k\|} \right\|$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left\| \frac{u_2^{k-2}}{\|u_2^{k-2}\|} - \bar{v} \right\| + \left\| \frac{u_2^k}{\|u_2^k\|} - \frac{u_2^{k-2}}{\|u_2^{k-2}\|} \right\| + \left\| \frac{u^{k+2}}{\|u^{k+2}\|} - \frac{u_2^k}{\|u_2^k\|} \right\| \\
& \leq \dots \leq \left\| \frac{u_2^0}{\|u_2^0\|} - \bar{v} \right\| + \sum_{j \in \{2, 4, \dots, k\}} \left\| \frac{u_2^j}{\|u_2^j\|} - \frac{u_2^{j-2}}{\|u_2^{j-2}\|} \right\| + \left\| \frac{u^{k+2}}{\|u^{k+2}\|} - \frac{u_2^k}{\|u_2^k\|} \right\| \\
& \leq 2\delta + \frac{C}{\gamma} \sum_{j \in \{0, 2, \dots, k\}} \left(\frac{\|u_1^j\|}{\|u^j\|} + \|u^j\|^{1-\tau} \right) \\
& \leq 2\delta + \frac{C}{\gamma} \left(\frac{\|u_1^0\|}{\|u^0\|} + \frac{C_1}{\gamma} \sum_{j \in \{2, 4, \dots, k\}} \frac{\|u^{j-2}\|^2}{\|u^{j-2}\|^{1+\tau}} + \sum_{j \in \{0, 2, \dots, k\}} \|u^j\|^{1-\tau} \right) \\
& \leq 2\delta + \frac{C}{\gamma} \left(\delta + \frac{C_1}{\gamma} \sum_{j \in \{2, 4, \dots, k\}} (q^{j/2-1}\varepsilon)^{1-\tau} + \sum_{j \in \{0, 2, \dots, k\}} (q^{j/2}\varepsilon)^{1-\tau} \right) \\
& = 2\delta + \frac{C}{\gamma} \left(\delta + \left(\frac{C_1}{\gamma} \sum_{j \in \{2, 4, \dots, k\}} (q^{1-\tau})^{j/2-1} + \sum_{j \in \{0, 2, \dots, k\}} (q^{1-\tau})^{j/2} \right) \varepsilon^{1-\tau} \right) \\
& \leq 2\delta + \frac{C}{\gamma} \left(\delta + \left(\frac{C_1}{\gamma} + 1 \right) \frac{\varepsilon^{1-\tau}}{1 - q^{1-\tau}} \right) \leq \bar{\delta},
\end{aligned}$$

где предпоследнее неравенство следует из первого неравенства в (2.9) и (2.29), а последнее неравенство следует из (2.28).

Тем самым показано, что $u^{k+2} \in K_{\bar{\varepsilon}, \bar{\delta}}(\bar{u}, \bar{v})$, а значит, КМН с двухшаговой оверрелаксацией однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, причем неравенство в (2.24) имеет место для всех k , а значит, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, а из оценки (2.23) следует оценка (1.13). $\square$

4. Для КМН с трехшаговой оверрелаксацией также удастся обобщить теорему 1.4. Для линейного подпространства $\mathcal{N}$ в $\mathbb{R}^p$ введем множество

$$\mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\bar{u}) = \bigcup_{v \in \mathcal{N}} \mathcal{A}(\bar{u}, v) = \{j \in \mathcal{A}(\bar{u}) \mid \ker(\Phi^j)'(\bar{u}) \cap \mathcal{N} \neq \{0\}\}.$$

Кроме этого, как и в доказательстве теоремы 2.2, будем использовать однозначное представление каждого $u \in \mathbb{R}^p$ в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \mathcal{N}^\perp$ и $u_2 \in \mathcal{N}$. В теореме 2.4 потребуются множества вида

$$K_{\varepsilon, \delta}^{\mathcal{N}}(\bar{u}) = \{u \in \mathbb{R}^p \mid \|u - \bar{u}\| \leq \varepsilon, \|u_1 - \bar{u}_1\| \leq \delta \|u_2 - \bar{u}_2\|\}.$$

Теорема 2.4. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ является кусочно-гладким вблизи точки $\bar{u} \in \mathbb{R}^p$, с гладкими кусочными отображениями $\Phi^1, \dots, \Phi^q : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$. Пусть $\bar{u}$ является решением (0.1), и пусть выполнены следующие предположения:

- 1) существует линейное подпространство $\mathcal{N} \neq \{0\}$ в $\mathbb{R}^p$ такое, что для каждого $j \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\bar{u})$ кусочное отображение Φ^j трижды дифференцируемо вблизи точки $\bar{u}$, его третья производная удовлетворяет условию Липшица относительно $\bar{u}$, имеет место равенство $\ker(\Phi^j)'(\bar{u}) = \mathcal{N}$, Φ^j 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по любому направлению из $\mathcal{N} \setminus \{0\}$, и

$$(\Phi^j)'''(\bar{u})[v, v, v] \notin \text{im}(\Phi^j)'(\bar{u}) \quad \forall v \in \mathcal{N} \setminus \{0\}; \quad (2.30)$$

- 2) для всех $\bar{v} \in \mathcal{N}$ имеет место (2.1).

Пусть отображение $\mathcal{J} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^{p \times p}$ удовлетворяет (2.2).

Тогда найдутся $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ такие, что для любого начального приближения $u^0 \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u})$ КМН с трехшаговой оверрелаксацией однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, причем $u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u})$ для всех k , и скорость сходимости подпоследовательности $\{u^{3k}\}$ является квадратичной, т. е. выполняется (1.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для всякого $j \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\bar{u})$ определим $\mathcal{B}^j$ и $\mathcal{T}^j$, соответственно, как $\mathcal{B}$ и $\mathcal{T}$ выше, но с Φ^j вместо Φ .

Элементарная тригонометрия позволяет заключить, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\tilde{\delta} \in (0, 2]$ справедливо равенство

$$K_{\varepsilon, \tilde{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}) = \bigcup_{v \in \mathcal{N}, \|v\|=1} K_{\varepsilon, \delta}(\bar{u}, v),$$

где $\delta = \tilde{\delta} \sqrt{1 - \tilde{\delta}^2/4} / (1 - \tilde{\delta}^2/2)$. Используя этот факт и компактность единичной сферы в $\mathbb{R}^p$, применяя лемму 1.1 (и, в частности, оценки (1.3) и (1.6)) и предложение 2.1 к каждому $\bar{v} \in \mathcal{N} \setminus \{0\}$, получаем, что $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ можно выбрать столь малыми, что для $u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u})$ итерационное уравнение (2.3) имеет вид (2.6) с некоторым $j \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\bar{u})$, это уравнение имеет единственное решение v^k , и имеет место неравенство

$$\|(\mathcal{B}^j(u^k - \bar{u}))^{-1}\| \leq C \|u^k - \bar{u}\|^{-1} \quad \forall u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}), \quad (2.31)$$

а также (2.7) и

$$\begin{aligned} \left\| u_2^k + v_2^k - \bar{u}_2 - \frac{1}{2}(u_2^k - \bar{u}_2) - \mathcal{T}^j(u^k) \right\| &= \left\| \frac{1}{2}(u_2^k - \bar{u}_2) + v_2^k - \mathcal{T}^j(u^k) \right\| \\ &\leq C(\|u_1^k - \bar{u}_1\| + \|u^k - \bar{u}\|^3) \quad \forall u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

причем $C > 0$ в этих неравенствах не зависит от $j \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\bar{u})$, используемого в (2.6).

Сразу заметим, что из (2.30) и (2.31) следует существование не зависящих от $j \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}(\bar{u})$ чисел $\gamma > 0$ и $\Gamma > 0$ таких, что

$$\gamma \|u^k - \bar{u}\|^2 \leq \|\mathcal{T}^j(u^k)\| \leq \Gamma \|u^k - \bar{u}\|^2 \quad \forall u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}), \quad (2.33)$$

если $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ достаточно малы.

Снова будем считать, что $\bar{u} = 0$. Пусть k кратно трем. Из оценок (2.7) и (2.8) следует, что для любых $q_- \in (0, 1/2)$ и $q_+ \in (1/2, 1)$ можно выбрать $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\widehat{\delta} > 0$ столь малыми, что для $u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}$ корректно определено u^{k+1} , причем

$$q_- \|u^k\| \leq \|u_2^{k+1}\| \leq \|u^{k+1}\| \leq q_+ \|u^k\|, \quad (2.34)$$

и из последнего неравенства немедленно получаем, что

$$\|u^{k+1}\| \leq q_+ \widehat{\varepsilon} \leq \widehat{\varepsilon}.$$

Возьмем любое $q \in (0, \widehat{\delta} q_-]$. Из (2.7) следует, что, уменьшая при необходимости $\widehat{\varepsilon} > 0$, будем иметь

$$\|u_1^{k+1}\| \leq q \|u^k\| \leq \frac{q}{q_-} \|u_2^{k+1}\| \leq \widehat{\delta} \|u_2^{k+1}\|,$$

где второе неравенство следует из первого неравенства в (2.34). Тем самым показано, что $u^{k+1} \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}$, а значит, корректно определено и $u^{k+2} \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}$, а значит, и u^{k+3} .

Далее, также, как и в доказательстве теоремы 2.3, получаем оценки (2.12)–(2.15) при $\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0$, из которых выводим

$$u_1^{k+2} = O(\|u_1^{k+1}\| \|u^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^3) = O(\|u^k\|^3), \quad (2.35)$$

$$u_2^{k+2} = \frac{1}{4}u_2^k + O(\|u_1^{k+1}\|) + O(\|u^{k+1}\|^2) \quad (2.36)$$

при $\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0$.

Далее, из (2.7) и (2.32) имеем

$$u_1^{k+2} + v_1^{k+2} = O(\|u_1^{k+2}\| \|u^{k+2}\|) + O(\|u^{k+2}\|^3),$$

$$u_2^{k+2} + v_2^{k+2} = \frac{1}{2}u_2^{k+2} + \mathcal{T}^j(u^{k+2}) + O(\|u_1^{k+2}\|) + O(\|u^{k+2}\|^2)$$

при $\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0$,

и поэтому

$$v_1^{k+2} = -u_1^{k+2} + O(\|u_1^{k+2}\| \|u^{k+2}\|) + O(\|u^{k+2}\|^3), \quad (2.37)$$

$$v_2^{k+2} = -\frac{1}{2}u_2^{k+2} + \mathcal{T}^j(u^{k+2}) + O(\|u_1^{k+2}\|) + O(\|u^{k+2}\|^3) \quad (2.38)$$

при $\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0$.

Далее, согласно (1.14),

$$u_1^{k+3} = u_1^{k+2} + 2v_1^{k+2} = -u_1^{k+2} + O(\|u_1^{k+2}\| \|u^{k+2}\|) + O(\|u^{k+2}\|^3) = O(\|u^k\|^3) \quad (2.39)$$

при $\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0$,

где второе равенство следует из (2.37), а последнее из (2.35), (2.36). Аналогично,

$$u_2^{k+3} = u_2^{k+2} + 2v_2^{k+2} = \mathcal{T}^j(u^{k+2}) + O(\|u_1^{k+2}\|) + O(\|u^{k+2}\|^3) = \mathcal{T}^j(u^{k+2}) + O(\|u^k\|^3) \quad (2.40)$$

при $\widehat{\varepsilon} \rightarrow 0$,

где второе равенство следует из (2.38), а последнее из (2.35), (2.36).

Из (2.33), (2.39) и (2.40) имеем:

$$u^{k+3} = O(\|u^k\|^2), \quad \frac{\|u_1^{k+3}\|}{\|u_2^{k+3}\|} = O(\|u^k\|) \quad \text{при } \widehat{\varepsilon} \rightarrow 0, \quad (2.41)$$

откуда и из последнего неравенства в (2.34) (которое, в силу сказанного выше, остается справедливым, если заменить в нем k на $k+1$) получаем

$$\max\{\|u^{k+1}\|, \|u^{k+2}\|, \|u^{k+3}\|\} \leq q_+ \|u^k\| \leq q_+ \widehat{\varepsilon} \leq \widehat{\varepsilon}, \quad \|u_1^{k+3}\| \leq \widehat{\delta} \|u_2^{k+3}\| \quad (2.42)$$

$$\forall u^k \in K_{\widehat{\varepsilon}, \widehat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}),$$

если $\widehat{\varepsilon} > 0$ выбрано достаточно малым.

Тем самым показано, что $u^{k+3} \in K_{\hat{\varepsilon}, \hat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u})$, а значит, КМН с трехшаговой оверрелаксацией однозначно определяет последовательность $\{u^k\}$, причем первое неравенство в (2.42) имеет место для всех k , а значит, эта последовательность сходится к $\bar{u}$, а из первой оценки в (2.41) следует оценка (1.15). $\square$

Напомним, что согласно обсуждению после теоремы 1.4, требование 2-регулярности по любому ненулевому направлению из $\mathcal{N}$ в теореме 2.4 может выполняться только при $\dim \mathcal{N} = 1$ или 2.

З а м е ч а н и е 2.1. В доказательстве теоремы 2.4 использовался тот вытекающий из оценок (2.7) и (2.8) факт, что для любых $q_- \in (0, 1/2)$ и $q_+ \in (1/2, 1)$ можно выбрать $\hat{\varepsilon} > 0$ и $\hat{\delta} > 0$ столь малыми, что для $u^k \in K_{\hat{\varepsilon}, \hat{\delta}}^{\mathcal{N}}(\bar{u}) \setminus \{\bar{u}\}$ КМН корректно определяет u^{k+1} , причем выполнено (2.34). В предположениях теоремы 2.3 аналогичный факт имеет место для $u^k \in K_{\hat{\varepsilon}, \hat{\delta}}(\bar{u}, \bar{v}) \setminus \{\bar{u}\}$. Из первых двух неравенств (2.34) немедленно следует, что при соответствующем выборе $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, оценка (1.13), получаемая в теореме 2.3, гарантирует двухшаговую сверхлинейную сходимость всей последовательности $\{u^k\}$, т. е. выполнение (1.16). Аналогично, оценка (1.15), получаемая в теореме 2.4, гарантирует трехшаговую квадратичную сходимость всей последовательности $\{u^k\}$, т. е. выполнение (1.17).

5. Вопрос с теоретическим обоснованием КМН с ускорением Андерсона (с γ -safeguards) на сегодняшний день остается открытым. Напомним, что, как отмечено выше, даже для гладкого случая существующее обоснование (теорема 1.5) едва ли может считаться полным.

3 Численное сравнение и примеры

Рассмотрим нелинейную комплементарную задачу (НКЗ)

$$u \geq 0, \quad F(u) \geq 0, \quad \langle u, F(u) \rangle = 0, \quad (3.1)$$

где $F : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ — заданное гладкое отображение. Эту задачу можно эквивалентным образом переформулировать как (0.1), если, например, задать $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ как

$$\Phi(u) = \min\{u, F(u)\}, \quad (3.2)$$

где минимум берется покомпонентно. Такое отображение Φ очевидно является кусочно-гладким, с набором гладких кусочных отображений $\Phi^j : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ с компонентами

$$\Phi_i^j(u) = \begin{cases} u_i, & \text{если } i \in I(j), \\ F_i(u), & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q,$$

где $q = 2^p$, а $j \mapsto I(j)$ — любое фиксированное биективное отображение множества $\{1, \dots, q\}$ в множество всех различных подмножеств множества $\{1, \dots, p\}$ (включая $\emptyset$ все $\{1, \dots, p\}$). В [4], в числе прочего, приводятся достаточные условия выполнения предположений теоремы 2.1 для такого Φ в терминах исходной задачи (3.1), а также разбираются некоторые примеры, демонстрирующие поведение КМН. Отметим, что если в решении $\bar{u}$ НКЗ (3.1) нарушается условие строгой дополнительнойности $\bar{u} + F(\bar{u}) > 0$, то $\mathcal{A}(\bar{u})$ состоит более чем из одного индекса, и при этом типичным является нарушение гладкости Φ даже вблизи $\bar{u}$.

Ниже приводятся результаты численного сравнения обсуждавшихся в разд. 2 алгоритмов на наборе небольших НКЗ вида (3.1), взятых из [22], а также некоторых других примерах НКЗ, в решениях которых нарушается условие строгой дополненности, взятых из различных источников. Полное описание тестового набора содержится в [23], но здесь этот набор был сокращен: из него были удалены задачи, являющиеся на самом деле линейными комплементарными задачами, поскольку для них характерна ситуация, когда КМН, применяемый к переформулировке (0.1) с отображением из (3.2), попадает в решение за один шаг. В результате осталось 15 задач. Для тех из них, которые взяты из [22], будут использоваться введенные там идентификаторы; для остальных приводятся ссылки на их источники. Информация об известных решениях $\bar{u}$ этих задач (в большинстве случаев нарушающих условие строгой дополненности) представлена в [23, таблица 3.1].

В сравнении участвовали следующие алгоритмы:

- КМН;
- КМН-Э — КМН с экстраполяцией глубины 1;
- КМН-О2 — КМН с двухшаговой оверрелаксацией, с параметрами $\tau = 0.9$ и $c = 1$;
- КМН-О3 — КМН с трехшаговой оверрелаксацией;
- КМН-А — КМН с ускорением Андерсона глубины 1 с γ -safeguardings, с параметром $r = 0.5$.

Успешная остановка запусков всех алгоритмов, кроме КМН-Э, происходила, если в ходе 50 итераций генерировалось приближение u^k , удовлетворяющее

$$\|\Phi(u^k)\| \leq 10^{-11}.$$

Для КМН-Э критерий успешной остановки имел вид

$$\min\{\|\Phi(u^k)\|, \|\Phi(\hat{u}^k)\|\} \leq 10^{-11}.$$

Во всех остальных случаях запуск считался неудачным.

Для каждой тестовой задачи выполнялась 1000 запусков каждого из алгоритмов из случайных начальных точек, равномерно распределенных в гиперкубе с полуребрами 0.1 и центром в $\bar{u}$. В таблице 1 для каждого алгоритма и каждой тестовой задачи приводится процент успешных запусков, и через косую черту среднее количество итераций на один успешный запуск. Лучший результат по количеству итераций в каждой строке выделен зеленым цветом, а худший красным. На разных задачах лучший результат показывают разные ускорители, но, в целом, эффект от использования ускорителей очевиден, и наибольший выигрыш обычно дает экстраполяция, но это может быть связано со спецификой тестовых задач в данном наборе.

Все неудачные запуски для DIS61, quadknot и ne-hard связаны с тем, что на какой-то итерации алгоритм не может решить соответствующую итерационную линейную систему (2.3), т. е. очередное приближение u^k покидает область обратимости матрицы $\mathcal{J}(u^k)$. Напомним, что в результатах разд. 2 области сходимости алгоритмов могут не только не содержать окрестности решения, но и не быть асимптотически плотными.

Для полноты картины далее обсуждается поведение алгоритмов на трех отдельных задачах из тестового набора.

Таблица 1. Численные результаты

Тестовые задачи	КМН	КМН-Э	КМН-О2	КМН-О3	КМН-А
quarp	100/ 11	100/10	100/7	100/8	100/ 6
DIS61	100/ 14	100/4	93/5	53/ 3	100/9
quarquad, 1	100/ 4	100/ 4	100/ 6	100/ 4	100/ 4
quarquad, 2	100/ 11	100/10	100/7	100/8	100/ 6
quadknot	35/ 14	50/ 1	38/4	35/3	38/9
munson4	100/ 15	100/ 1	100/4	100/3	100/9
ne-hard	47/9	52/ 5	48/ 10	40/9	47/7
quad1	100/ 8	100/ 2	100/ 2	100/ 2	100/5
quad2	100/ 7	100/ 2	100/ 2	100/ 2	100/5
quarn	100/ 11	100/10	100/7	100/8	100/ 6
[24, Example 3.3], 1	100/1	100/1	100/1	100/1	100/1
[24, Example 3.3], 2	100/ 8	100/ 1	100/2	100/2	100/5
[24, Example 3.4]	100/ 14	100/ 2	100/4	100/3	100/9
[25, Example 8]	100/ 14	100/ 2	100/4	100/3	100/9
[26, Example 1]	100/ 14	100/ 2	100/4	100/3	100/9

Пример 3.1. (Задача из [25, пример 8].) Для $p = 2$, $F(u) = ((u_1 - 1)^2, u_1 + u_2 - 1)$, НКЗ (3.1) имеет два решения $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

Отображение Φ , вводимое согласно (3.2), является кусочно-гладким, с гладкими кусочными отображениями

$$\Phi^1(u) = ((u_1 - 1)^2, u_2), \quad \Phi^2(u) = ((u_1 - 1)^2, u_1 + u_2 - 1),$$

$$\Phi^3(u) = (u_1, u_2), \quad \Phi^4(u) = (u_1, u_1 + u_2 - 1),$$

причем для $\bar{u} = (1, 0)$ имеем: $\mathcal{A}(\bar{u}) = \{1, 2\}$,

$$(\Phi^1)'(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\Phi^2)'(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{im}(\Phi^1)'(\bar{u}) = \text{im}(\Phi^2)'(\bar{u}) = \{0\} \times \mathbb{R},$$

$$\ker(\Phi^1)'(\bar{u}) = \text{lin}\{\bar{v}^1\}, \quad \ker(\Phi^2)'(\bar{u}) = \text{lin}\{\bar{v}^2\},$$

где $\bar{v}^1 = (1, 0)$, $\bar{v}^2 = (-1, 1)$, и, в частности, решение $\bar{u}$ является особым, причем $\mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v}^1) = \{1\}$, $\mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v}^2) = \{2\}$. Непосредственно проверяется, что (2.1) выполняется как для $\bar{v} = \bar{v}^1$, так и для $\bar{v} = \bar{v}^2$.

Далее,

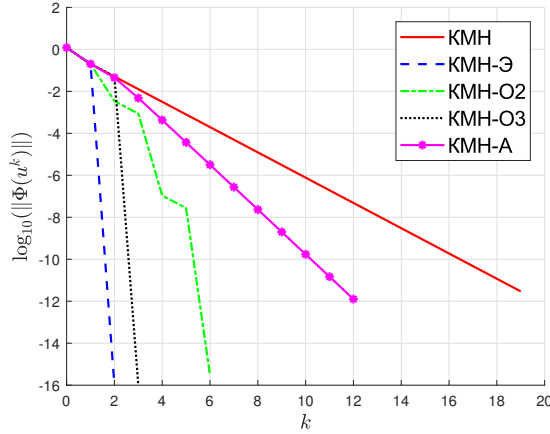
$$(\Phi^1)''(\bar{u})[\bar{v}^1] = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Phi^2)''(\bar{u})[\bar{v}^2] = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и для $v^1 = (t, 0) \in \ker(\Phi^1)'(\bar{u})$ и $v^2 = (t, -t) \in \ker(\Phi^2)'(\bar{u})$, $t \in \mathbb{R}$, имеем:

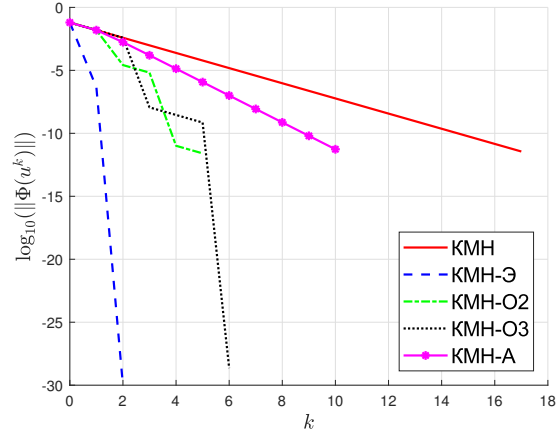
$$(\Phi^1)''(\bar{u})[\bar{v}^1, v^1] = (2t, 0), \quad (\Phi^2)''(\bar{u})[\bar{v}^2, v^2] = (-2t, 0)$$

попадают в $\text{im}(\Phi^1)'(\bar{u}) = \text{im}(\Phi^2)'(\bar{u})$ только при $v^1 = v^2 = 0$. Таким образом, Φ^1 2-регулярно в точке $\bar{u}$ по направлению $\bar{v}^1$, а Φ^2 по направлению $\bar{v}^2$.

Таким образом, предположения теоремы 2.1 в этом примере выполнены как для $\bar{v} = \bar{v}^1$ с $\mathcal{N} = \text{lin}\{\bar{v}^1\}$, так и для $\bar{v} = \bar{v}^2$ с $\mathcal{N} = \text{lin}\{\bar{v}^2\}$, а значит, справедливы соответствующие утверждения теорем 2.1–2.3. Вместе с тем, предположение (2.30) теоремы 2.4 очевидно нарушается.



(а) Пример 3.1.



(б) Пример 3.2.

Рис. 1. Убывание невязки

На рис. 1а для тестируемых алгоритмов показаны графики логарифма невязки рассматриваемого уравнения в зависимости от номера итерации, для запусков из начальной точки $u^0 = (1.9, 0.9)$. КМН сходится линейно, что соответствует теореме 2.1, а КМН с двухшагой оверрелаксацией сходится в соответствии с оценкой (1.13), утверждаемой в теореме 2.3. КМН с экстраполяцией попадает в точное решение на второй итерации, что не противоречит теореме 2.2, а КМН с трехшаговой оверрелаксацией на третьей, несмотря на нарушение (2.30) в теореме 2.4.

В примере 3.1 для каждого из подходящих $\bar{v}$ множество $\mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v})$ состоит из единственного индекса. В следующем примере, взятом из [4, пример 2], это не так, и КМН переключается между разными гладкими кусочными отображениями в процессе итераций.

Пример 3.2. Для $p = 1$, $\Phi(u) = \min\{-u^2, -u_2 + \varphi(u)\}$ с функцией $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(u) = \begin{cases} u^5 \sin(1/u), & \text{если } u \neq 0, \\ 0, & \text{если } u = 0, \end{cases}$$

уравнение (0.1) имеет решение $\bar{u} = 0$.

Отображение Φ является кусочно-гладким, с гладкими кусочными отображениями

$$\Phi^1(u) = -u^2, \quad \Phi^2(u) = -u_2 + \varphi(u),$$

причем $\mathcal{A}(\bar{u}) = \{1, 2\}$, $(\Phi^1)'(\bar{u}) = (\Phi^2)'(\bar{u}) = 0$, откуда следует, что для любого $\bar{v} \neq 0$ выполняются равенства $\mathcal{A}(\bar{u}, \bar{v}) = \{1, 2\}$ и (2.1). Кроме того, $(\Phi^1)''(\bar{u}) = (\Phi^2)''(\bar{u}) = -2$, и поэтому оба отображения Φ^1 и Φ^2 2-регулярны в точке $\bar{u}$ по любому ненулевому направлению. Таким образом, все предположения теоремы 2.1 в этом примере выполнены с $\mathcal{N} = \mathbb{R}$.

Результаты запусков КМН и его вариантов с ускорителями из начальной точки $u^0 = 0.25$ представлены на рис. 1б.

В заключение приведем пример, демонстрирующий ситуацию, когда предположения теорем 2.1 и 2.4 не выполняются.

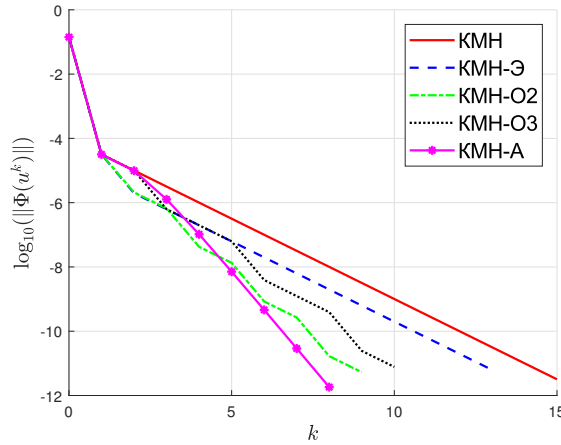


Рис. 2. Убывание невязки. Пример 3.3

Пример 3.3. (Задача quarquad из [22].) Для $p = 2$, $F(u) = (-(1 - u_1)^4 + u_2, 1 - u_1^2)$, НКЗ (3.1) имеет три решения $(2, 1)$, $(0, 1)$ и $(1, 0)$.

Отображение Φ , вводимое согласно (3.2), является кусочно-гладким, но в решении $\bar{u} = (1, 0)$ активным является только одно гладкое кусочное отображение (поскольку в этом решении выполняется условие строгой дополнителности): само Φ вблизи $\bar{u}$ имеет вид

$$\Phi(u) = (-(1 - u_1)^4 + u_2, u_2)$$

и является гладким. При этом

$$\Phi'(\bar{u}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Phi''(\bar{u}) = 0, \quad \Phi'''(\bar{u}) = 0,$$

а значит, решение $\bar{u}$ является особым, но ни 2-регулярность Φ в точке $\bar{u}$ по какому-либо направлению, ни условие (2.30) выполняться не могут.

Тем не менее, рис. 2 (с запусками из $u^0 = (0.9, 0.1)$) показывает, что экстраполяция и (особенно двухшаговая) оверрелаксация дают некоторый ускоряющий эффект для этой задачи, несмотря на то, что (К)МН сходится линейно с асимптотическим общим частным $3/4$, а не $1/2$. Интересно, что наибольший эффект в этом примере дает ускорение Андерсона.

References

- [1] A. Griewank, “On solving nonlinear equations with simple singularities or nearly singular solutions”, *SIAM Rev.*, **27** (1985), 537–563.
- [2] D. G. Anderson, “Iterative procedures for nonlinear integral equations”, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **12**:4 (1965), 547–560.
- [3] M. Dallas, S. Pollock, “Newton–Anderson at singular points”, *Int. J. Numer. Anal. Mod.*, **20**:5 (2023), 667–692.

- [4] A. Fischer, A. F. Izmailov, M. Jelitte, “Newton-type methods near critical solutions of piecewise smooth nonlinear equations”, *Comput. Optim. Appl.*, **80** (2021), 587–615.
- [5] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, Cham, 2014.
- [6] A. Griewank, “Starlike domains of convergence for Newton’s method at singularities”, *Numer. Math.*, **35** (1980), 95–111.
- [7] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “A general perturbed Newtonian framework and critical solutions of nonlinear equations”, *Set-Valued Var. Anal.*, **33**:1 (2025), art. no. 3.
- [8] A. Fischer, A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Unit stepsize for the Newton method close to critical solutions”, *Math. Program.*, **187** (2021), 697–721.
- [9] A. F. Izmailov, A. S. Kurennoy, M. V. Solodov, “Critical solutions of nonlinear equations: local attraction for Newton-type methods”, *Math. Program.*, **167** (2018), 335–379.
- [10] D. W. Decker, H. B. Keller, C. T. Kelley, “Convergence rates for Newton’s method at singular points”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20** (1983), 296–314.
- [11] A. Griewank, *Analysis and Modification of Newton’s Method at Singularities*, PhD Thesis, Australian National University, Canberra, 1980.
- [12] Дж. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975; англ. ориг.: J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, London, 1970.
- [13] C. T. Kelley, R. Suresh, “A new acceleration method for Newton’s method at singular points”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20** (1983), 1001–1009.
- [14] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Numbers*, Springer, New York, 1991.
- [15] S. Pollock, L. G. Rebholtz, “Anderson acceleration for contractive and noncontractive operators”, *IMA J. Numer. Anal.*, **41** (2021), 2841–2872.
- [16] M. Dallas, S. Pollock, L. G. Rebholtz, “Analysis of an adaptive safeguarded Newton–Anderson algorithm of depth one with applications to fluid problems”, *J. Adv. Comp. Sci. Eng.*, **2**:3 (2024), 246–270.
- [17] L. G. Rebholtz, M. Xiao, “The effect of Anderson acceleration on superlinear and sublinear convergence”, *J. Adv. Comp. Sci. Eng.*, **96** (2023), art. no. 34.
- [18] M. Dallas, “Anderson acceleration for perturbed Newton methods”, 2025 [arXiv:2508.12513](https://arxiv.org/abs/2508.12513).
- [19] S. Pollock, “Fast convergence to higher multiplicity zeros”, 2019 [arXiv:1911.10647](https://arxiv.org/abs/1911.10647).
- [20] S. Pollock, H. Schwartz, “Benchmarking results for the Newton-Anderson method”, *Res. Appl. Math.*, **8** (2020), art. no. 100095.
- [21] F. Facchinei, J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, New York, 2003.
- [22] C. Oberlin, S. J. Wright, “An accelerated Newton method for equations with semismooth Jacobians and nonlinear complementarity problems”, *Math. Program.*, **117** (2009), 355–386.
- [23] A. Izmailov, E. Uskov, Z. Yan, “Newton method vs. semismooth Newton method for singular solutions of nonlinear complementarity problems”, *Adv. Syst. Sci. Appl.*, **23** (2023), 16–26.
- [24] A. F. Izmailov, A. V. Arutyunov, “Stability of possibly nonisolated solutions of constrained equations with applications to complementarity and equilibrium problems”, *Set-Valued Var. Anal.*, **26** (2018), 327–352.
- [25] А. Н. Дарыина, А. Ф. Измаилов, “Об идентификации активных индексов в смешанных ком-плементарных задачах”, *Вопросы моделирования и анализа в задачах принятия решений*, ВЦ РАН, М., 2004, 72–87. [A. N. Daryina, A. F. Izmailov, “On the identification of active indices in mixed complementary problems”, *Modeling and analysis issues in decision making problems*, Computing Center of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 2004, 72–87 (In Russian)].
- [26] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, “Error bounds for 2-regular mappings with Lipschitzian derivatives and their applications”, *Math. Program.*, **89** (2001), 413–435.

Информация об авторах

Измаилов Алексей Ферилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Янь Чжибай, аспирант, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: yanzhibai@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6425-0332>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Измаилов Алексей Ферилович

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 26.03.2026 г.

Поступила после рецензирования 29.05.2026 г.

Принята к публикации 05.06.2026 г.

Information about the authors

Alexey F. Izmailov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Operations Research Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Zhibai Yan, Post-Graduate Student, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: yanzhibai@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-6425-0332>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Alexey F. Izmailov

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Received 26.03.2026

Reviewed 29.05.2026

Accepted for press 05.06.2026