

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Яремко О.Э., Яремко Н.Н., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-204-212>

УДК 517.958



Аналитическое решение двухкомпонентной системы реакция-диффузия с обратимой химической реакцией в случае различных коэффициентов диффузии

Олег Эмануилович ЯРЕМКО¹, Наталия Николаевна ЯРЕМКО²

¹ ФГАОУ ВО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
127055, Российская Федерация, г. Москва, Вадковский переулок, 3А

² ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Рассматривается линейная двухкомпонентная система уравнений в частных производных реакция-диффузия на действительной оси, моделирующая обратимую химическую реакцию. Основное внимание уделено случаю различных коэффициентов диффузии, при котором операторы диффузии и реакции не коммутируют, однако, выполняется закон сохранения полной массы. Это исключает факторизацию решения и приводит к нетривиальной пространственно-временной динамике. С помощью преобразования Фурье задача сводится к семейству линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для сравнения приведено классическое факторизованное решение в случае равных коэффициентов диффузии, когда операторы коммутируют. Решение строится методом последовательных приближений Пикара для интегрального уравнения Вольтерра, который имеет высокую скорость сходимости, а его члены ряда допускают прозрачную физическую интерпретацию. Выражения для концентрации представлены в виде суммы прямого диффузионного вклада молекул, не претерпевших реакций и вклада молекул, прошедших определенную последовательность переходов между состояниями. Полученные формулы предоставляют эффективный инструмент как для качественного анализа пространственно-временной динамики, так и для количественных расчетов с контролируемой точностью в прикладных задачах химической кинетики, транспорта веществ.

Ключевые слова: реакция-диффузия, матричная экспонента, преобразование Фурье, ряд Пикара, уравнение Вольтерра

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFS-24-05/0110).

Для цитирования: Яремко О.Э., Яремко Н.Н. Аналитическое решение двухкомпонентной системы реакция-диффузия с обратимой химической реакцией в случае различных коэффициентов диффузии // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 154. С. 204–212. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-204-212>



Analytical solution of a two-component reaction-diffusion system with a reversible chemical reaction in the case of distinct diffusion coefficients

Oleg E. YAREMKO¹, Nataliia N. YAREMKO²

¹ Moscow State University of Technology “STANKIN”

3A Vadkovsky Lane, Moscow 127055, Russian Federation

² National University of Science and Technology “MISIS”

4 Leninsky Prospekt, Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. We consider a linear two-component system of reaction–diffusion partial differential equations on the real axis, modeling a reversible chemical reaction. The main focus is on the case of distinct diffusion coefficients, where the diffusion and reaction operators do not commute, but the law of total mass conservation holds. This precludes solution factorization and leads to non-trivial spatiotemporal dynamics. Using the Fourier transform, the problem is reduced to a family of linear systems of ordinary differential equations. For comparison, the classical factorized solution is presented for the case of equal diffusion coefficients, where the operators commute. The solution is constructed using the Picard successive approximation method for the Volterra integral equation, which exhibits a high convergence rate, and its series terms admit a transparent physical interpretation. The expressions for concentration are represented as a sum of the direct diffusion contribution of molecules that have not undergone reactions and that of molecules that have undergone a certain sequence of transitions between states. The obtained formulas provide an effective tool both for qualitative analysis of spatiotemporal dynamics and for quantitative calculations with controlled accuracy in applied problems of chemical kinetics and mass transport.

Keywords: reaction–diffusion, matrix exponential, Fourier transform, Picard iteration series, Volterra equation

Acknowledgements: The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project no. FSFS-24-05/0110).

Mathematics Subject Classification: 35A08, 35K57.

For citation: Yaremko O.E., Yaremko N.N. Analytical solution of a two-component reaction-diffusion system with a reversible chemical reaction in the case of distinct diffusion coefficients. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 31:154 (2026), 204–212. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-154-204-212>

Введение

Рассмотрим систему уравнений в частных производных, описывающую обратимую химическую реакцию $A \rightleftharpoons B$ с учетом пространственной диффузии [1, с. 399], [2, с. 333], [3, с. 78]

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_1 & k_2 \\ k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (0.1)$$

где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — концентрации компонентов A и B соответственно, $D_1, D_2 > 0$ — их коэффициенты диффузии, а $k_1, k_2 > 0$ — константы скорости прямой и обратной реакций. Начальное условие задается как

$$\mathbf{U}(x, 0) = \Phi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]^T,$$

где $\mathbf{U} = [u_1, u_2]^T$. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ непрерывны и ограничены в $\mathbb{R}$, решение ищется в классе функций, ограниченных на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Рассматривая изолированную систему, т. е. систему в отсутствие входящего или исходящего потоков вещества, требуем выполнения граничных условий: при $|x| \rightarrow \infty$ функции $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ стремятся к нулю.

О п р е д е л е н и е 0.1. *Функция полной массы* определяется формулой

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(x, t) + u_2(x, t)) dx.$$

Утверждение 0.1. *Решение системы дифференциальных уравнений (0.1) обладает свойством сохранения полной массы*

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (u_1(x, t) + u_2(x, t)) dx = \text{const.}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы доказать сохранение $M(t)$, нужно проверить, что $dM/dt = 0$. Переставляя операции интегрирования и дифференцирования, на основании свойств решения задачи Коши [4, с. 227], получаем

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t} \right) dx.$$

Подставляем выражения для производных по времени из уравнений системы

$$\frac{dM}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - k_1 u_1 + k_2 u_2 \right) + \left(D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + k_1 u_1 - k_2 u_2 \right) \right] dx.$$

Соберем члены диффузии

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} dx$$

и члены реакции

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_1 u_1 - k_2 u_2) dx.$$

Вклад членов реакции равен 0. Проведем интегрирование членов диффузии, учитывая, что $\frac{\partial u_i}{\partial x}$ стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} dx = D_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial x} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Вклад диффузионных членов зануляется из-за граничных условий. Таким образом,

$$\frac{dM}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad M(t) = M(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) dx.$$

То есть полная масса остается постоянной во времени, и ее значение равно исходной полной массе. $\square$

1 Решение в пространстве Фурье

Применяя преобразование Фурье [5, с. 62] по переменной x к системе дифференциальных уравнений (0.1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{U}}(k, t) = \mathbf{M}(k) \hat{\mathbf{U}}(k, t),$$

где

$$\mathbf{M}(k) = \begin{bmatrix} -D_1 k^2 - k_1 & k_2 \\ k_1 & -D_2 k^2 - k_2 \end{bmatrix}.$$

Решение этой задачи Коши имеет вид

$$\hat{\mathbf{U}}(k, t) = e^{t\mathbf{M}(k)} \hat{\mathbf{F}}(k),$$

где $e^{t\mathbf{M}(k)}$ — матричная экспонента. Обратное преобразование Фурье дает окончательное решение в исходном физическом пространстве

$$\mathbf{U}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{t\mathbf{M}(k)} \hat{\mathbf{F}}(k) dk.$$

Структура этого решения зависит от соотношения между D_1 и D_2 .

1.1 Случай коммутации матриц диффузии и реакции

Представим матрицу $\mathbf{M}(k)$ как сумму

$$\mathbf{M}(k) = -\mathbf{D}k^2 + \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -D_1 & 0 \\ 0 & -D_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ -k_1 & k_2 \end{bmatrix},$$

матрицы диффузии и реакции, соответственно. Факторизуем матричную экспоненту

$$e^{t\mathbf{M}(k)} = e^{t\mathbf{B}} e^{-\mathbf{D}k^2 t}.$$

Используя интерполяционную формулу Сильвестра [6, с. 108], получаем:

при $k_1 + k_2 \neq 0$

$$e^{t\mathbf{B}} = \frac{1}{k_1 + k_2} \begin{bmatrix} k_1 e^{t(k_1+k_2)} + k_2 & k_2 (1 - e^{t(k_1+k_2)}) \\ k_1 (1 - e^{t(k_1+k_2)}) & k_2 e^{t(k_1+k_2)} + k_1 \end{bmatrix},$$

при $k_1 + k_2 = 0$, т. е. $k_2 = -k_1$

$$e^{t\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 + k_1 t & k_1 t \\ -k_1 t & 1 - k_1 t \end{bmatrix}.$$

Следовательно, решение принимает форму

$$\mathbf{U}(x, t) = e^{t\mathbf{B}} \mathbf{V}(x, t),$$

где компоненты вектор-функции

$$\mathbf{V}(x, t) = \begin{bmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{bmatrix}$$

находятся по формуле Пуассона [7, с. 49] для уравнения теплопроводности

$$v_i(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D_i t}} \varphi_i(\xi) d\xi, i = 1, 2.$$

Это решение описывает процесс, в котором диффузия и реакция являются независимыми. Полученные формулы служат основой для анализа более сложного случая некоммутирующих матриц.

1.2 Итерационное разложение Пикара

Если матрицы $\mathbf{D}$, и $\mathbf{B}$ не коммутируют, то факторизация матричной экспоненты $e^{-\mathbf{D}k^2t+t\mathbf{B}}$ невозможна. Рассмотрим систему уравнений реакция-диффузия (0.1). Применяя преобразование Фурье по переменной x , получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = -k^2 \mathbf{D} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Матрица $-k^2 \mathbf{D}$ описывает чистую диффузию, а матрица $\mathbf{B}$ — химические реакции. Решая систему обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) методом вариации постоянных, получаем интегральное уравнение Вольтерра II рода [8, с. 351]

$$\hat{\mathbf{U}}(k, t) = e^{-k^2 \mathbf{D}t} \hat{\mathbf{U}}(k, 0) + \int_0^t e^{-k^2 \mathbf{D}(t-s)} \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}}(k, s) ds. \quad (1.2)$$

Применим метод последовательных приближений Пикара [9, с. 272] к уравнению (1.2).

$$\hat{\mathbf{U}}^{n+1}(k, t) = e^{-k^2 \mathbf{D}t} \hat{\mathbf{U}}(k, 0) + \int_0^t e^{-k^2 \mathbf{D}(t-s)} \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}}^n(k, s) ds. \quad (1.3)$$

В результате получаем итерационное разложение Пикара [10, с. 308]:

$$\hat{\mathbf{U}}(k, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mathbf{U}}^{(n)}(k, t). \quad (1.4)$$

Для анализа решения полезно представление общего члена итерационного ряда (1.4) через начальное условие

$$\hat{\mathbf{U}}^{(n)}(k, t) = \int_{\Delta_n(t)} e^{-k^2(t-t_1)\mathbf{D}} \mathbf{B} e^{-k^2(t_1-t_2)\mathbf{D}} \mathbf{B} \dots \mathbf{B} e^{-k^2 t_n \mathbf{D}} \hat{\mathbf{U}}(k, 0) dt_1 \dots dt_n,$$

где $\Delta_n(t) = \{0 \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq t\}$ — стандартный n -мерный симплекс, а $dt = dt_1 \dots dt_n$. Разложение получается последовательным применением формулы (1.3).

2 Решение в исходном физическом пространстве

2.1 Основная теорема

Рассмотрим начальное условие в виде

$$\mathbf{U}(x, 0) = \Phi(x) = [\varphi_1(x), 0]^T.$$

Теорема 2.1. Компоненты n -го члена разложения Пикара (1.4) имеют вид

$$u_1^{(2m)}(x, t) = (k_1 k_2)^m \int_{\Delta_{2m}(t)} e^{-k_1(t-t_1)-k_2(t_1-t_2)-\dots-k_1 t_{2m}} \cdot v_1(x, \Sigma^{(2m)}(t_1, \dots, t_{2m})) dt_1 \cdot dt_2 \cdot \dots \cdot dt_{2m}, \quad (2.1)$$

$$u_2^{(2m+1)}(x, t) = k_1 (k_1 k_2)^m \int_{\Delta_{2m+1}(t)} e^{-k_1(t-t_1)-k_2(t_1-t_2)-\dots-k_2 t_{2m+1}} \cdot v_1(x, \Sigma^{(2m+1)}(t_1, \dots, t_{2m+1})) dt_1 \cdot dt_2 \cdot \dots \cdot dt_{2m+1}, \quad (2.2)$$

где

$$v_1(x, \Sigma^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \Sigma^{(n)}(t_1, \dots, t_{2m})}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\Sigma^{(n)}(t_1, \dots, t_n)}} \varphi_1(\xi) d\xi,$$

$v_1(x, \Sigma^{(n)})$ — решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, $\Sigma^{(n)}$ — суммарная дисперсия, накопленная за время t :

$$\Sigma^{(n)}(t_1, \dots, t_n) = D_1(t - t_1) + D_2(t_1 - t_2) + D_1(t_2 - t_3) + \dots + \begin{cases} D_1 t_n, & n \text{ четно,} \\ D_2 t_n, & n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Все остальные компоненты равны нулю: $u_1^{(2m+1)} \equiv 0$, $u_2^{(2m)} \equiv 0$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n . При отсутствии переходов ($n = 0$) имеем чистую диффузию компоненты A

$$u_1^{(0)}(x, t) = e^{-k_1 t} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi D_1 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4D_1 t}} \varphi_1(\xi) d\xi,$$

что соответствует формуле (2.1) с $\Sigma^{(0)} = D_1 t$. Предположим, что формулы (2.1)–(2.2) верны для порядка n . Согласно рекуррентной формуле (1.3) $(n+1)$ -й член разложения получается как результат добавления перехода $A \xrightarrow{k_1} B$ или $B \xrightarrow{k_2} A$. При этом вторая компонента члена ряда с нечетным номером $u_2^{(2m+1)}$ получается из первой компоненты $u_1^{(2m)}$ члена ряда с номером $2m$ умножением последней на множитель k_1 и заменой

$D_1 \rightarrow D_2$ в последнем интервале дисперсии. Аналогично, первая компонента члена ряда $u_1^{(2m+2)}$ получается из второй компоненты $u_2^{(2m+1)}$, вычисленной на предыдущем шаге умножением на k_2 и заменой $D_2 \rightarrow D_1$.

Поскольку в Фурье-пространстве экспоненты диффузионной части процесса являются скалярными функциями $e^{-D_j k^2 \tau}$, их произведение по мультипликативному свойству экспоненты можно записать в виде

$$e^{-D_1 k^2 (t-t_1)} e^{-D_2 k^2 (t_1-t_2)} \dots = e^{-k^2 [D_1(t-t_1) + D_2(t_1-t_2) + \dots]} = e^{-k^2 \Sigma^{(n)}}.$$

Обратное преобразование Фурье дает гауссиан с дисперсией $\Sigma^{(n)}$

$$\mathcal{F}^{-1}[e^{-k^2 \Sigma^{(n)}}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi \Sigma^{(n)}}} e^{-\frac{x^2}{4\Sigma^{(n)}}}.$$

Чередование состояний $A \leftrightarrow B$ приводит к нулевым вкладам для $u_1^{(2m+1)}$ и $u_2^{(2m)}$, так как после нечетного числа переходов система не может вернуться в исходное состояние A . $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Формулы для решения задачи Коши с начальным условием вида

$$\mathbf{U}(x, 0) = \Phi(x) = [0, \varphi_2(x)]^T.$$

получаются из формул (2.1), (2.2) заменой $k_1 \leftrightarrow k_2$, $D_1 \leftrightarrow D_2$.

2.2 Оценка скорости сходимости

Объем n -мерного симплекса $\Delta_n(t)$ равен $t^n/n!$ [11]. Поскольку экспоненциальные множители в (2.1), (2.2) ограничены единицей, получаем оценки:

$$\|u_1^{(2m)}(x, t)\|_{L^1} \leq \frac{(k_1 k_2 t^2)^m}{(2m)!} \|\varphi_1(x)\|_{L^1}, \quad \|u_2^{(2m+1)}(x, t)\|_{L^1} \leq k_1 \frac{(k_1 k_2 t^2)^m t}{(2m+1)!} \|\varphi_1(x)\|_{L^1}.$$

Эти оценки показывают факториальную скорость сходимости ряда. При малом значении времени $k_{\max} t < 1$ достаточно учесть члены до второго порядка включительно $n = 2$, тогда погрешность не превышает 5%. При $k_{\max} t < 2$ достаточно четырех членов, тогда погрешность не превосходит 1% от $\|\varphi_1(x)\|_{L^1}$. Аналитическое решение позволяет проверить точность численной схемы [12, с. 185], а также изучить влияние коэффициентов реакции на решение. Наличие фундаментальной матрицы в явном виде дает возможность решать неоднородные задачи. Отметим ограниченность метода разложения в ряд Пикара: при $k_{\max} t > 5$ использование ряда Пикара нецелесообразно, так как он проигрывает дискретному преобразованию Фурье.

2.3 Физический смысл разложения в ряд Пикара

Для физической интерпретации процессов в системах с обратными реакциями и различными коэффициентами диффузии, где метод спектрального разложения теряет наглядность, представление Пикара ценно. Метод Пикара для линейной двухкомпонентной реакции-диффузии — метод точного последовательного вычисления поколений реагирующих частиц. Члены ряда Пикара — это не приближения, а точные аналитические решения для частиц, испытывающих заданное число реакций. Итерация Пикара — это точный расчет очередного поколения на основе уже точно известного распределения предыдущего. Сумма членов ряда есть точное решение исходной задачи.

Заключение

В работе проведено систематическое исследование линейной двухкомпонентной системы реакция-диффузия, моделирующей обратимую химическую реакцию $A \rightleftharpoons B$ с различными коэффициентами диффузии. Для системы дифференциальных уравнений реакция-диффузии доказана эквивалентность системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Как следствие аналитическое решение найдено в виде итерационного разложения Пикара. Получены явные формулы для произвольного n -го члена разложения в виде кратных интегралов по симплексу $\Delta_n(t)$. Установлена прямая связь между порядком разложения и «историей молекулы» — последовательностью химических превращений за время t : четные порядки ($n = 2m$) соответствуют возврату в исходное состояние ($A \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow A$), а нечетные порядки ($n = 2m+1$) — нахождению в противоположном состоянии ($A \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow B$). Такая интерпретация позволяет провести количественный анализ вклада различных механизмов переноса в наблюдаемое распределение концентраций. Доказана высокая скорость сходимости ряда, гарантирующая быструю сходимость при малых значениях времени.

Таким образом, впервые для некоммутирующего случая получено явное выражение для общего члена итерационного разложения с четкой физической интерпретацией. Разработан критерий применимости приближений: при $k_{\max}t < 2$ достаточно учесть 2-3 члена ряда для достижения точности с погрешностью менее 1%. При больших временах, когда система приближается к химическому равновесию, ряд требует учета большого числа слагаемых, и тогда предпочтительнее использовать метод Фурье.

Перспективы дальнейших исследований состоят в обобщении разложения на системы с $n > 2$ компонентами [13], распространении подхода на случай кусочно-постоянных коэффициентов диффузии [14]. Планируется разработка эффективных алгоритмов вычисления многократных интегралов по симплексам. Метод последовательных приближений Пикара можно рекомендовать как математическую основу для создания n -компонентных систем, в которых можно контролируемо вызывать неустойчивости Тьюринга и волновые неустойчивости.

Полученные результаты могут найти применение в химической кинетике, при моделирование диффузионного разделения фаз в сплавах с учетом химических превращений. Таким образом, работа может быть полезной для анализа систем реакция-диффузия [15] с различными коэффициентами диффузии.

References

- [1] J. D. Murray, *Mathematical Biology I: An Introduction*, 3rd edition, Springer, 2001, 551 pp.
- [2] J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*, Clarendon Press, Oxford University Press, 1975, 421 pp.
- [3] P. Stroeve, *Diffusion with Reversible Chemical Reaction in Heterogeneous Media*, Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Chemical Engineering, 1973, 517 pp.
- [4] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, 1977, 735 с.; англ. пер.: A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of Mathematical Physics*, Dover Publications, New York, 1990.
- [5] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, 2nd edition, Oxford University Press, 1959, 510 pp.
- [6] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, 1966, 576 с.; англ. пер.: F. R. Gantmacher, *Matrix Theory, I*, American Mathematical Society, Providence, 1990.
- [7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd edition, American Mathematical Society, 2010, 749 pp.

- [8] В. М. Вержицкий, *Численные методы (математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения)*, Директ-Медиа, М., 2013, 400 с. [V. M. Verzhbitsky, *Numerical Methods (Mathematical Analysis and Ordinary Differential Equations)*, Direct-Media Publ., Moscow, 2013 (In Russian), 400 pp.]
- [9] В. И. Арнольд, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, МЦНМО, Электронное издание, 2014, 344 с.; англ. ориг.: V. Arnold, *Ordinary Differential Equations*, Springer Science, Berlin, 1992.
- [10] Ф. Г. Авхадиев, *Основы численных методов*, Издательство Казанского университета, Казань, 2022, 444 с. [F. G. Avkhadiyev, *Fundamentals of Numerical Methods*, Kazan University Press, Kazan, 2022 (In Russian), 444 pp.]
- [11] И. Х. Сабитов, “Об одном методе вычисления объемов тел”, *Сибирские электронные математические известия*, **10** (2013), 615–626. [I. Kh. Sabitov, “On a method for computing volumes of bodies”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **10** (2013), 615–626 (In Russian)].
- [12] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Наука, М., 1971, 552 с.; англ. пер.: A. A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, CRC Press, Providence, 2001.
- [13] S. Hata, H. Nakao, A. S. Mikhailov, “Sufficient conditions for wave instability in three-component reaction-diffusion systems”, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, **1** (2014), 1–17.
- [14] W. E. Fitzgibbon, J. J. Morgan, Bao Q. Tang, Hong-Ming Yin, “Reaction-diffusion-advection systems with discontinuous diffusion”, *SIAM J. Math. Anal.*, **53**:6 (2021), 6771–6803.
- [15] E. Villar-Sepulveda, A. R. Champneys, A. L. Krause, “Designing reaction-cross-diffusion systems with Turing and wave instabilities”, *Journal of Mathematical Biology*, **91** (2025), art. no. 37.

Информация об авторах

Яремко Олег Эмануилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: yareмки8@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4618-0527>

Яремко Наталия Николаевна, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: yareмки@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1491-624X>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Яремко Олег Эмануилович
 E-mail: yareмки8@gmail.com

Поступила в редакцию 05.12.2025 г.
 Поступила после рецензирования 16.04.2026 г.
 Принята к публикации 05.06.2026 г.

Information about the authors

Oleg E. Yaremko, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Applied Mathematics Department, Moscow State University of Technology “STANKIN”, Moscow, Russian Federation. E-mail: yareмки8@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4618-0527>

Nataliia N. Yaremko, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation. E-mail: yareмки@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1491-624X>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Oleg E. Yaremko
 E-mail: yareмки8@gmail.com

Received 05.12.2025
 Reviewed 16.04.2026
 Accepted for press 05.06.2026