

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ченцов А.Г., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-155-299-320>

УДК 515.12



Ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств: локализация свойств

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Аннотация. Исследуются вопросы структуры максимальных сцепленных систем и ультрафильтров на широко понимаемых измеримых пространствах (ИП) и на их непустых подпространствах. Исследуется роль множеств стоуновского типа в вопросах представления ультрафильтров на упомянутых подпространствах, включая возможность топологического отождествления в случае ИП с алгеброй или полуалгеброй множеств. Рассматриваются вопросы, связанные со свойствами и преобразованиями тривиальных (фиксированных) и свободных ультрафильтров на широко понимаемых ИП.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, подпространство, ультрафильтр

Для цитирования: Ченцов А.Г. Ультрафильтры широко понимаемых измеримых пространств: локализация свойств // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 155. С. 299–320. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-155-299-320>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. G. Chentsov, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-155-299-320>

Ultrafilters of widely understood measurable spaces; localization of properties

Aleksandr G. CHENTSOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation
Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin
19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Abstract. The issues of the structure of maximal linked systems and ultrafilters on widely understood measurable spaces (MS) and on their nonempty subspaces are investigated. The role of Stone-type sets in the representation of ultrafilters on the mentioned subspaces is investigated, including the possibility of topological identification in the case of MS with an algebra or semialgebra of sets. The issues related to the properties and transformations of trivial (fixed) and free ultrafilters on widely understood MS are considered.

Keywords: maximal linked system, subspace, ultrafilter

Mathematics Subject Classification: 54D80, 06E15.

For citation: Chentsov A.G. Ultrafilters of widely understood measurable spaces; localization of properties. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:155 (2026), 299–320. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-155-299-320>

Введение

Пространства максимальных сцепленных систем и ультрафильтров (у/ф) являются предметом многочисленных исследований (см. [1–5] и др.) на стыке теории множеств и общей топологии. В то же время представления наиболее важных свободных у/ф на семействе всех подмножеств (п/м) бесконечных множеств (имеются в виду у/ф с пустым пересечением всех своих множеств) неконструктивны; «наблюдаемыми» оказываются в упомянутом случае лишь тривиальные (фиксированные) у/ф, отвечающие точкам исходного множества. Ситуация, однако, меняется, если рассматривать фильтры и у/ф на некоторых «предваряющих» семействах п/м исходного множества. В качестве данных семейств могут, в частности, использоваться алгебры множеств и топологии (см. [6–10] и др.). Здесь в ряде случаев удается (см. [10, гл. 5, 6]) дать конструктивное описание всего множества свободных у/ф на возникающем, на основе «предваряющего» семейства, широко понимаемом измеримом пространстве (ИП); см., в частности, [10, теорема 6.2.1]. Появляются и некоторые новые возможности, связанные с исследованием топологических свойств; здесь у/ф полезно рассматривать как частный случай максимальных сцепленных систем (см., например, [10, гл. 7]). В настоящей работе мы следуем данному подходу.

В качестве «предваряющего» семейства используется, как правило, π -система [8, с. 14] п/м исходного множества, что позволяет охватить единой схемой конструкции из теории меры и общей топологии. В настоящей работе мы сосредоточимся на вопросах, связанных с локализацией свойств, присущих у/ф и максимальным сцепленным системам множеств. При этом используется переход к непустым подпространствам исходного широко понимаемого (имеется в виду оснащение исходного множества π -системой его п/м) ИП. Исследуются соотношения, связывающие множества максимальных сцепленных систем и у/ф на получающихся в результате подпространствах и множества стоуновского типа в исходном пространстве у/ф.

1 Общие сведения

Используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, пропозициональные связки, $\emptyset$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению; def заменяет фразу «по определению». Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Неупорядоченной парой объектов x и y называем единственное множество $\{x; y\}$, для которого $x \in \{x; y\}$, $y \in \{x; y\}$ и

$$\forall z \in \{x; y\} \quad (z = x) \vee (z = y).$$

Каждому объекту h сопоставляем синглетон $\{h\} \triangleq \{h; h\}$, в частности, семейство $\{\emptyset\}$ таково, что $\emptyset \in \{\emptyset\}$. Множества для нас являются объектами. Поэтому любым двум объектам p и q сопоставляется [6, с. 67] упорядоченная пара (УП) $(p, q) \triangleq \{\{p\}; \{p; q\}\}$ с первым элементом p и вторым элементом q . Если s есть УП, то через $\text{pr}_1(s)$ и $\text{pr}_2(s)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы s , однозначно определяемые условием $s = (\text{pr}_1(s), \text{pr}_2(s))$. Если же x , y и z — три объекта, то $(x, y, z) \triangleq ((x, y), z)$.

Множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех подмножеств (п/м) H и $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$; $\text{Fin}(H)$ есть def семейство всех непустых конечных п/м H , $\text{Fin}(H) \subset \mathcal{P}'(H)$. Если X и Y — множества, то [6, гл. II, § 4] имеем их декартово произведение

$$X \times Y \triangleq \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X \cup Y)) \mid \exists x \in X \exists y \in Y : z = (x, y)\}$$

со следующими свойствами:

$$((x, y) \in X \times Y \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y) \& (\forall z \in X \times Y \quad \exists u \in X \quad \exists v \in Y : z = (u, v)).$$

Для трех любых множеств A , B и C согласно [7, гл. 1] $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Ясно, что множеству $\mathbb{M}$ сопоставлено семейство $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(\mathbb{M})$; если $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то имеем двойственное к $\mathcal{M}$ семейство

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})).$$

Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \triangleq \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)) \quad (1.1)$$

семейства $\mathcal{A}$ на B ; обычно в наших построениях $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H))$ и $B \in \mathcal{P}(H)$, где H — множество. Если T — непустое множество и $\mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T))$, то

$$\langle \mathcal{T} - \text{link} \rangle[T] \triangleq \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{T}) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \quad \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \quad \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\}, \quad (1.2)$$

семейства из $\langle \mathcal{T} - \text{link} \rangle[T]$ (1.2) называем сцепленными; в виде

$$\langle \mathcal{T} - \text{link} \rangle_0[T] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{T} - \text{link} \rangle[T] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{T} - \text{link} \rangle[T] \quad (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Rightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\} \quad (1.3)$$

имеем семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathcal{T}$, именуемых также максимальными сцепленными системами (МСС). В (1.2), (1.3) $\mathcal{T}$ — некоторое «предваряющее» семейство п/м T . В последующих построениях оно будет уточняться, формируя своеобразную измеримую структуру на T .

Если $\mathcal{H}$ — непустое семейство, то в виде

$$(\text{Cen})[\mathcal{H}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \emptyset \quad \forall \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathcal{Z})\}$$

имеем семейство всех непустых центрированных подсемейств $\mathcal{H}$. Произвольному семейству $\mathcal{S}$ и множеству T сопоставляем семейство

$$[\mathcal{S}](T) \triangleq \{S \in \mathcal{S} \mid T \subset S\}$$

всех множеств из $\mathcal{S}$, содержащих T . Наконец, множеству $\mathbb{H}$ и (непустому) семейству $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{H}))$ сопоставляем семейство

$$(\text{COV})[\mathbb{H} \mid \mathcal{H}] \triangleq \{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}) \mid \mathbb{H} = \bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} Z\}$$

всех непустых покрытий $\mathbb{H}$ множествами из $\mathcal{H}$.

Специальные семейства.

В пределах настоящего пункта фиксируем множество $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \& (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \quad \forall A \in \mathcal{I} \quad \forall B \in \mathcal{I})\}$$

имеем семейство всех π -систем [8, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с нулем и единицей (имеются в виду $\emptyset$ и $\mathbf{I}$ соответственно); π -системы из

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall J \in \mathcal{I} \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus J \ \exists \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda) \& (\Lambda \cap J = \emptyset)\} \quad (1.4)$$

называем отделимыми; ясно, что $\mathcal{P}(\mathbf{I}) \in \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$. Кроме того, в виде

$$(\text{LAT})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I}\}$$

имеем семейство всех решеток п/м $\mathbf{I}$ с нулем и единицей. Наконец,

$$(\text{alg})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A}\} \quad (1.5)$$

есть семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$. При $\mathcal{A} \in (\text{alg})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$ имеем измеримое пространство (ИП) с алгеброй множеств; ясно, что $\mathcal{A} \subset \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$ (см. (1.4), (1.5)). В виде

$$(\text{top})[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\} = \{\tau \in (\text{LAT})_0[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\}$$

имеем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$; при $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \tau)$ реализуется топологическое пространство (ТП). При этом

$$(\text{clos})[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau] : \tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]\} \in \mathcal{P}'((\text{LAT})_0[\mathbf{I}])$$

есть семейство всех замкнутых топологий П. С. Александрова (см. [9, с. 98]). Из вышеупомянутых построений видно, что π -системы образуют очень общий класс семейств п/м фиксированного множества (здесь — множества $\mathbf{I}$), позволяющий, в частности, охватить ИП и ТП единичными представлениями. В этой связи в дальнейшем условимся при $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$ называть $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$ широко понимаемым ИП; см. [10, с. 16, 17]. Заметим в связи с (1.2), (1.3), что данные семейства в дальнейшем будут, как правило, иметь вид $\langle \mathcal{I} - \text{link} \rangle[\mathbf{I}]$ и $\langle \mathcal{I} - \text{link} \rangle_0[\mathbf{I}]$, где $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$. Важными частными случаями будут при этом фильтры и ультрафильтры (у/ф) на соответствующей π -системе.

Элементы топологии, 1

В настоящем пункте сохраняем фиксацию множества $\mathbf{I}$. В виде

$$\begin{aligned} (\text{c-top})[\mathbf{I}] &\triangleq \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \mid \forall \xi \in (\text{COV})[\mathbf{I} \mid \tau] \ \exists \zeta \in \text{Fin}(\xi) : \mathbf{I} = \bigcup_{G \in \zeta} G\} \\ &= \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \mid \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset \ \forall \mathcal{F} \in (\text{Cen})[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]]\} \end{aligned}$$

имеем семейство всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в компактное (см. [11, гл. 3]) ТП. При $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ и $x \in \mathbf{I}$ полагаем, что $N_\tau^0(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\}$, и получаем семейство

$$N_\tau(x) \triangleq \{H \in \mathcal{P}(\mathbf{I}) \mid \exists G \in N_\tau^0(x) : G \subset H\} \quad (1.6)$$

всех окрестностей x в $(\mathbf{I}, \tau)$; семейство (1.6) является фильтром (см. [11, I. 6]) на $\mathbf{I}$. При $\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}]$ и $M \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ имеем свойство $[\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]](M) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau])$ и замыкание

$$\begin{aligned} \text{cl}(M, \tau) &\triangleq \{x \in \mathbf{I} \mid M \cap G \neq \emptyset \ \forall G \in N_\tau^0(x)\} \\ &= \{x \in \mathbf{I} \mid M \cap H \neq \emptyset \ \forall H \in N_\tau(x)\} = \bigcap_{F \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]](M)} F \in [\mathbf{C}_{\mathbf{I}}[\tau]](M) \end{aligned}$$

множества M в $(\mathbf{I}, \tau)$. В виде

$$(\text{top})_0[\mathbf{I}] \triangleq \{\tau \in (\text{top})[\mathbf{I}] \mid \forall x \in \mathbf{I} \ \forall y \in \mathbf{I} \setminus \{x\} \ \exists G_1 \in N_\tau^0(x) \ \exists G_2 \in N_\tau^0(y) : G_1 \cap G_2 = \emptyset\}$$

имеем семейство всех топологий на множестве $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в T_2 -пространство; см. [11, гл. I]. При этом топологии из

$$(\mathbf{c} - \text{top})_0[\mathbf{I}] \triangleq (\mathbf{c} - \text{top})[\mathbf{I}] \cap (\text{top})_0[\mathbf{I}] \quad (1.7)$$

превращают $\mathbf{I}$ в компакт: если $\tau \in (\mathbf{c} - \text{top})_0[\mathbf{I}]$, то ТП $(\mathbf{I}, \tau)$ называют компактом.

Элементы топологии, 2

Напомним некоторые построения, связывающие различные ТП. Прежде всего отметим, что для множества $\mathbb{M}$, топологии $\tau \in (\text{top})[\mathbb{M}]$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{M})$ имеем $\tau|_H \in (\text{top})[H]$, а ТП $(H, \tau|_H)$ есть подпространство (п/п) $(\mathbb{M}, \tau)$; если $h \in H$, то (см. [12, (2.3.7), (2.3.8)])

$$(N_{\tau|_H}^0(h) = N_\tau^0(h)|_H) \& (N_{\tau|_H}(h) = N_\tau(h)|_H).$$

Для непустого множества $\mathbb{M}$ и $\tau \in (\text{top})[\mathbb{M}]$, как обычно,

$$(\tau - \text{comp})[\mathbb{M}] \triangleq \{\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\mathbb{M}) \mid \tau|_{\mathbf{K}} \in (\mathbf{c} - \text{top})[\mathbf{K}]\}$$

есть семейство всех п/м $\mathbb{M}$, компактных в ТП $(\mathbb{M}, \tau)$; в случае $\tau \in (\text{top})_0[\mathbb{M}]$ и $\mathbb{K} \in (\tau - \text{comp})[\mathbb{M}]$ в виде $(\mathbb{K}, \tau|_{\mathbb{K}})$ имеем (см. (1.7)) компакт.

Функции (общие обозначения).

В настоящем пункте фиксируем множества U и V , получая в виде

$$V^U \triangleq \{f \in \mathcal{P}(U \times V) \mid \forall x \in U \ \exists! y \in V : (x, y) \in f\}$$

множество всех функций, действующих из U в V ; при $g \in V^U$ и $u \in U$, как обычно, $\text{def } g(u) \in V$ таково, что $(u, g(u)) \in g$ ($g(u)$ есть значение g в точке u). Если $f \in V^U$ и $A \in \mathcal{P}(U)$, то $f^1(A) \triangleq \{f(a) : a \in A\} \in \mathcal{P}(V)$ есть образ A при действии f , а $(f|A) \triangleq f \cap (A \times V) \in V^A$ есть обычное сужение f на A ; прообразы п/м V обозначаются традиционно (см. [12, (2.2.6)]). Пусть $U \neq \emptyset$ и $V \neq \emptyset$; тогда

$$(\text{in})[U; V] \triangleq \{\varphi \in V^U \mid \forall u_1 \in U \ \forall u_2 \in U \ (\varphi(u_1) = \varphi(u_2)) \Rightarrow (u_1 = u_2)\},$$

$$V_{(*)}^U \triangleq \{f \in V^U \mid f^1(U) = V\},$$

$$(\text{bi})[U; V] \triangleq (\text{in})[U; V] \cap V_{(*)}^U = \{f \in V_{(*)}^U \mid \forall x_1 \in U \ \forall x_2 \in U \ (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)\}$$

(введены инъективные, сюръективные и биективные функции из U в V соответственно).

Элементы топологии, 3

В пределах настоящего пункта фиксируем непустые множества U и V , а также топологии $\tau_1 \in (\text{top})[U]$ и $\tau_2 \in (\text{top})[V]$. Тогда посредством

$$C(U, \tau_1, V, \tau_2) \triangleq \{f \in V^U \mid f^{-1}(G) \in \tau_1 \ \forall G \in \tau_2\},$$

$$\begin{aligned} C_{\text{cl}}(U, \tau_1, V, \tau_2) &\triangleq \{f \in C(U, \tau_1, V, \tau_2) \mid f^1(F) \in \mathbf{C}_V[\tau_2] \ \forall F \in \mathbf{C}_U[\tau_1]\} \\ &= \{f \in V^U \mid f^1(\text{cl}(A, \tau_1)) = \text{cl}(f^1(A), \tau_2) \ \forall A \in \mathcal{P}(U)\} \end{aligned}$$

определены множества непрерывных и замкнутых функций из (U, τ_1) в (V, τ_2) . Далее, посредством

$$\begin{aligned} C_c(U, \tau_1, V, \tau_2) &\triangleq C(U, \tau_1, V, \tau_2) \cap (\text{bi})[U; V], \\ (\text{Hom}[U; \tau_1; V; \tau_2]) &\triangleq C_{cl}(U, \tau_1, V, \tau_2) \cap (\text{bi})[U; V] \end{aligned} \quad (1.8)$$

в рассмотрение введены уплотнения и гомеоморфизмы, соответствующие нашим ТП (U, τ_1) и (V, τ_2) . Заметим, что (см. [11, гл. 3])

$$\begin{aligned} ((\tau_1 \in (\mathbf{c} - \text{top})[U]) \& (\tau_2 \in (\text{top})_0[V])) \implies ((C(U, \tau_1, V, \tau_2) = C_{cl}(U, \tau_1, V, \tau_2)) \\ \& ((\text{Hom})[U; \tau_1; V; \tau_2] = C_c(U, \tau_1, V, \tau_2))). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Добавление.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$; при $n \in \mathbb{N}$ в виде $\overline{1, n} \triangleq \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$ имеем дискретный интервал в $\mathbb{N}$ с левым концом 1 и правым концом n . Полагаем, что элементы $\mathbb{N}$ — натуральные числа — не являются множествами. С учетом этого используем, для любых множества H и числа $n \in \mathbb{N}$, вместо $H^{\overline{1, n}}$ более традиционное обозначение H^n для множества всех функций (кортежей) из $\overline{1, n}$ в H . Используем далее также индексную форму записи функций (семейства с индексом в [13, с. 11]).

2 Фильтры и сцепленные семейства

В настоящем разделе следуем определениям и обозначениям [10, гл. 1], фиксируя непустое множество E и π -систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (в дальнейшем E и $\mathcal{L}$ будут конкретизироваться по мере надобности). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) &\triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{F}) \& (A \cap B \in \mathcal{F} \forall A \in \mathcal{F} \forall B \in \mathcal{F}) \\ &\& ([\mathcal{L}](F) \subset \mathcal{F} \forall F \in \mathcal{F})\} \in \mathcal{P}'((\text{Cen})[\mathcal{L}]) \end{aligned}$$

(заметим, что $\{E\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$) есть семейство всех фильтров π -системы $\mathcal{L}$. При этом

$$(\mathcal{L} - \text{triv})[x] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \quad \forall x \in E. \quad (2.1)$$

В (2.1) введены тривиальные фильтры широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$. Тогда

$$\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) \triangleq \{(\mathcal{L} - \text{triv})[x] : x \in E\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{L})). \quad (2.2)$$

Используем (1.2) и (1.3) при $T = E$ и $\mathcal{T} = \mathcal{L}$. Тогда $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset (\mathcal{L} - \text{link})[E]$. В виде

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \implies (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \quad (2.3)$$

имеем множество всех у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$; $\forall \mathcal{F}_0 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \exists \mathcal{U}_0 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) : \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{U}_0$. Как следствие имеем, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$. Полагаем, что

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\} \quad \forall L \in \mathcal{L}. \quad (2.4)$$

Данные множества условимся называть стоуновскими; они играют далее важную роль (в этой связи отметим построения [10, 1.5], касающиеся случая $\mathcal{L} = \mathcal{P}(E)$). В связи с конкретизацией (1.3) заметим, что

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \implies (\mathcal{E} = \mathcal{S})\}; \quad (2.5)$$

при этом $\forall \mathcal{H}_1 \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \exists \mathcal{H}_2 \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] : \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$. Более подробные сведения о свойствах МСС см. в [10, 1.6]. Отметим два простых представления для множеств МСС и y/ϕ на $\mathcal{L}$ (см. [10, (1.6.9), (2.1.15)]) соответственно:

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap \Sigma \neq \emptyset \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Rightarrow (L \in \mathcal{E})\}, \quad (2.6)$$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} (L \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\}. \quad (2.7)$$

Представления (2.6) и (2.7) естественным образом связаны, поскольку (см. [10, предложение 4.1.2])

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid A \cap B \in \mathcal{E} \ \forall A \in \mathcal{E} \ \forall B \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]). \quad (2.8)$$

Наряду с (2.4) рассматриваем множества стоуновского типа в пространстве МСС:

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid L] \triangleq \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\} \ \forall L \in \mathcal{L}. \quad (2.9)$$

Отметим, что $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid \emptyset] = \emptyset$ и $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid E] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$; кроме того, при $L_1 \in \mathcal{L}$ и $L_2 \in \mathcal{L}$

$$(L_1 \subset L_2) \Rightarrow (\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid L_1] \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid L_2]); \quad (2.10)$$

в связи с (2.9), (2.10) см. [10, гл. 4]. При этом

$$[\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E} \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

В связи с (2.4) и (2.9) заметим, что (см. (2.8)) при $L \in \mathcal{L}$

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid L] \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}). \quad (2.11)$$

Отметим, что (см. [10, (1.4.16)]) $(\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{L}}(L) : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ и, в частности, $(\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}]$ является (открытой) базой топологии

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \triangleq \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G} \exists U \in \mathcal{U} : \Phi_{\mathcal{L}}(U) \subset \mathbb{G}\} \in (\text{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$$

стоуновского типа. При этом (см. [10, предложение 2.3.3])

$$\Phi_{\mathcal{L}}(L) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\} \ \forall L \in \mathcal{L}.$$

С учетом данного свойства проверяется (см. [10, (2.3.13)]), что

$$(\mathbb{U}\mathbb{F})[E; \mathcal{L}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]];$$

как следствие получаем, что

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \quad (2.12)$$

есть (непустое) нульмерное [11, 6.2] T_2 -пространство (если $\mathcal{L}$ — полуалгебра [14, гл. 1] или алгебра п/м E , то (2.12) — нульмерный компакт; в последнем случае реализуется пространство Стоуна). Заметим, что (2.12) является [10, (4.4.11)] п/п нульмерного T_2 -пространства с «единицей» $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. В этой связи напомним, что при $L \in \mathcal{L}$ множество

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid L] &= \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\} \\ &= \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid L \cap \Sigma \neq \emptyset \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\} \end{aligned}$$

таково, что реализуется (2.11). Семейство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \triangleq \{ \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0^0[E \mid L] : L \in \mathcal{L} \} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]))$$

является (открытой) предбазой топологии

$$\mathbb{T}_* \langle E \mid \mathcal{L} \rangle \in (\text{top})_0[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]] \quad (2.13)$$

стоуновского типа (подробнее см. в [10, раздел 4.4]). При этом упомянутое представление (2.12) как п/п имеет вид

$$\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^*[E] = \mathbb{T}_* \langle E \mid \mathcal{L} \rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}, \quad (2.14)$$

где $(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_* \langle E \mid \mathcal{L} \rangle)$ является нульмерным [11, 6.2] T_2 -пространством. В этой связи отметим, что

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \subset \mathbb{T}_* \langle E \mid \mathcal{L} \rangle \cap \mathbf{C}_{\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]}[\mathbb{T}_* \langle E \mid \mathcal{L} \rangle]. \quad (2.15)$$

Из (2.15) легко следует, что множества базы, порожденной предбазой $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]$, т. е. семейства всех конечных пересечений множеств из данной предбазы, открыто-замкнуты в топологии (2.13).

3 Подпространства широко понимаемых измеримых пространств

Напомним, что ранее на выбор E и $\mathcal{L}$ (см. предыдущий раздел) никаких дополнительных условий не налагалось; поэтому понятия и обозначения, соответствующие фиксации $(E, \mathcal{L})$, будут использоваться при различных конкретизациях данного широко понимаемого ИП. В то же время у нас будет использоваться и некоторое базовое ИП такого типа, для которого мы сохраняем обозначение $(E, \mathcal{L})$. Итак, далее E — фиксированное непустое множество и $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (дополнительные предположения будут оговариваться по мере надобности). В этой связи заметим, что, как легко проверить,

$$\mathcal{L}|_H = \{L \cap H : L \in \mathcal{L}\} \in \pi[H] \quad \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

Итак, при $H \in \mathcal{P}(E)$ в виде $(H, \mathcal{L}|_H)$ мы имеем п/п широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$. В случае $H \in \mathcal{L}$ п/п $(H, \mathcal{L}|_H)$ называем измеримым, понимая данный термин расширительно (точнее было бы $\mathcal{L}$ -измеримым). В данном наиболее важном для нас случае имеем, что

$$\mathcal{L}|_{\mathbb{L}} = \{\mathbb{L} \cap L : L \in \mathcal{L}\} = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda \subset \mathbb{L}\} \in \pi[\mathbb{L}] \quad \forall \mathbb{L} \in \mathcal{L}. \quad (3.1)$$

С учетом (3.1) получаем, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ в виде $(\mathbb{L}, \mathcal{L}|_{\mathbb{L}})$ реализуется непустое измеримое п/п $(E, \mathcal{L})$; определены непустые множества $\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle[\mathbb{L}]$ и $\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$, элементами которых являются непустые подсемейства $\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$. Ясно, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle[\mathbb{L}] \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E].$$

Для наших последующих целей важно, что при $H \in \mathcal{P}'(E)$ непустое п/п $(H, \mathcal{L}|_H)$ широко понимаемого ИП $(E, \mathcal{L})$ таково, что

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{E}] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid L \cap H \in \mathcal{E}\} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_H - \text{link} \rangle[H]; \quad (3.2)$$

кроме того, имеем, как легко проверить, свойство

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{F}] \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_H) \quad (3.3)$$

(учитываем общие положения раздела 2, позволяющие использовать (3.2) в случае фильтров). Напомним, что $\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \subset \mathcal{P}'(E)$.

Предложение 3.1. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$, то

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}] \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]. \quad (3.4)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$, получая в силу (3.2), что

$$\mu \triangleq (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}] \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E]. \quad (3.5)$$

Учитываем (2.5). Тогда, в частности, имеем в силу максимальности $\mathcal{E}$, что $\forall \Lambda \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$

$$(\Lambda \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \implies (\Lambda \in \mathcal{E}). \quad (3.6)$$

Выберем произвольно $D \in \mathcal{L}$. Тогда имеем, что $D \cap \mathbb{L} \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$. С учетом (3.6) получаем, что

$$((D \cap \mathbb{L}) \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \implies (D \cap \mathbb{L} \in \mathcal{E}). \quad (3.7)$$

Пусть справедливо следующее свойство

$$D \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mu. \quad (3.8)$$

Выберем произвольно $M \in \mathcal{E}$, получая, в частности, что $M \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$ (см. (1.2), (1.3)). Заметим, что (см. (3.1))

$$M \in \mathcal{L} : M \subset \mathbb{L}. \quad (3.9)$$

Из (3.2), (3.9) получаем, поскольку $M \cap \mathbb{L} = M \in \mathcal{E}$, что $M \in \mu$ (см. (3.5)), а тогда согласно (3.8) $D \cap M \neq \emptyset$. Как следствие, $(D \cap \mathbb{L}) \cap M = D \cap M \neq \emptyset$. Поскольку выбор M был произвольным, то

$$D \cap \mathbb{L} \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} : (D \cap \mathbb{L}) \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

В силу (3.7) получаем, что $D \cap \mathbb{L} \in \mathcal{E}$. Тогда в силу (3.2), (3.5) имеем по выбору D (действительно $D \in \mathcal{L}$), что $D \in \mu$ при условии (3.8). Итак, истинна импликация

$$(D \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mu) \implies (D \in \mu).$$

Коль скоро $D \in \mathcal{L}$ выбиралось произвольно, получили, что $\forall L \in \mathcal{L}$

$$(L \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mu) \implies (L \in \mu).$$

С учетом (2.6) и (3.5) получаем, как следствие, включение $\mu \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$. В силу (3.5) получаем (3.4). $\square$

Из (3.2) и предложения 3.1 вытекает, что $\forall \mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}] \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] : \mathcal{E} \subset (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}]. \quad (3.10)$$

Предложение 3.2. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$ и $\mathcal{C} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$, то

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{C}) \implies (\mathcal{C} = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}]). \quad (3.11)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathbb{L}$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$ в соответствии с условиями, полагая, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$. Покажем, что

$$\mathcal{C} \subset (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}]. \quad (3.12)$$

Допустим противное:

$$\mathcal{C} \setminus (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}] \neq \emptyset.$$

Выберем и зафиксируем $U \in \mathcal{C} \setminus (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}]$. Тогда в частности, $U \in \mathcal{L}$ и при этом $U \cap \mathbb{L} \notin \mathcal{E}$ (см. (3.2)). При этом $U \in \mathcal{C}$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$. Тогда

$$U \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}. \quad (3.13)$$

Тогда имеем, что $U \cap \Sigma = (U \cap \mathbb{L}) \cap \Sigma$ при $\Sigma \in \mathcal{E}$. Получили, что (см. (3.13))

$$U \cap \mathbb{L} \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} : (U \cap \mathbb{L}) \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \mathcal{E}.$$

В силу свойства, аналогичного (2.6), имеем, что $U \cap \mathbb{L} \in \mathcal{E}$, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает (3.12). В силу (3.2) и максимальности $\mathcal{C}$ получаем требуемое равенство следствия (3.11). $\square$

Соединяя (3.10) и предложение 3.2, получаем полезное утверждение: при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$ мы в виде $(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}]$ имеем единственную мажоранту $\mathcal{E}$ в классе МСС на $\mathcal{L}$.

Заметим теперь, что с учетом (2.8), (3.3) и предложения 3.1 легко устанавливается при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})$ свойство

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \quad (3.14)$$

при этом, как легко видеть, $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{U} \subset \mathcal{U}) \implies (\mathcal{U} = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}]). \quad (3.15)$$

Свойства (3.14), (3.15) будут существенны в дальнейшем, но сейчас вернемся к общему случаю преобразования МСС, получая при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, что

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot] \stackrel{\Delta}{=} ((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}])_{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]^{\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]}; \quad (3.16)$$

в силу (3.1) имеем, что при $L \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$ определено множество (2.9).

Предложение 3.3. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $L \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$, то справедлива следующая оценка образа:

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L} \mid L]) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid L]. \quad (3.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathbb{L}$ и L в соответствии с условиями. Выберем произвольно

$$\mathcal{I} \in (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L} \mid L]), \quad (3.18)$$

получая МСС на $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{I} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E].$$

При этом для некоторой МСС $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L} \mid L]$

$$\mathcal{I} = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{V}]. \quad (3.19)$$

Тогда (см. (2.9)) $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$ и $L \in \mathcal{V}$. При этом (см. (3.2), (3.19)) $\mathcal{I} = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \mathbb{L} \cap \Lambda \in \mathcal{V}\}$, где по выбору L имеем $L \subset \mathbb{L}$ (см. (3.1)); $L \in \mathcal{L}$. Тогда $\mathbb{L} \cap L = L \in \mathcal{V}$. В итоге (см. (3.19)) $L \in \mathcal{I}$. С учетом (2.9) имеем, что $\mathcal{I} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid L]$. Поскольку МСС $\mathcal{I}$ (3.18) выбиралась произвольно, (3.17) установлено. $\square$

Следствие 3.1. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, то

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid \mathbb{L}].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом простейших свойств [10, с. 89] имеем равенство

$$\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L} \mid \mathbb{L}] = \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]. \quad (3.20)$$

При этом $\mathbb{L} \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$ (см. (3.1)), а тогда в силу (3.20) и предложения 3.3

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]) = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L} \mid \mathbb{L}]) \subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid \mathbb{L}].$$

$\square$

П р е д л о ж е н и е 3.4. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, то

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot] \in C(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}], \mathbb{T}_*\langle \mathbb{L} \mid \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} \rangle, \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{L} \rangle). \quad (3.21)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Напомним, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{L}; \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}]$ есть [10, (4.4.1), (4.4.2)] открытая предбаза, порождающая топологию $\mathbb{T}_*\langle \mathbb{L} \mid \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} \rangle$. Аналогичным свойством обладает $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]$ в части порождения топологии $\mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{L} \rangle$. Выберем произвольно $\mathfrak{V} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]$ и

$$\Omega \in N_{\mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{L} \rangle}^0((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathfrak{V}]).$$

Учитывая представление открытых множеств в терминах порождающей предбазы, подберем $n \in \mathbb{N}$ и

$$(\mathbf{C}_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]^n$$

со следующим свойством:

$$((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathfrak{V}] \in \bigcap_{i=1}^n \mathbf{C}_i) \& (\bigcap_{i=1}^n \mathbf{C}_i \subset \Omega). \quad (3.22)$$

Тогда для некоторого кортежа $(D_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{L}^n$ имеем представления

$$\mathbf{C}_j = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E \mid D_j] \quad \forall j \in \overline{1, n}. \quad (3.23)$$

При этом (см. (3.22), (3.23)) получаем, что

$$((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathfrak{V}] \in \bigcap_{i=1}^n \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid D_i]) \& (\bigcap_{i=1}^n \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid D_i] \subset \Omega). \quad (3.24)$$

Вместе с тем $\mathbb{L} \cap D_j \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$ при $j \in \overline{1, n}$. Согласно (2.10) и предложению 3.3

$$\begin{aligned} (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle^0[\mathbb{L} \mid \mathbb{L} \cap D_j]) &\subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid \mathbb{L} \cap D_j] \\ &\subset \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid D_j] \quad \forall j \in \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Здесь $\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle^0[\mathbb{L} \mid \mathbb{L} \cap D_j] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{L}; \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}]$ при $j \in \overline{1, n}$. В силу (3.24) при $j \in \overline{1, n}$ имеем $D_j \in (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathfrak{V}]$, а потому (см. (3.2)) $\mathbb{L} \cap D_j \in \mathfrak{V}$. Тогда получаем, что (см. (2.9))

$$\mathbb{G} \triangleq \bigcap_{i=1}^n \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle^0[\mathbb{L} \mid \mathbb{L} \cap D_i] \in N_{\mathbb{T}_* \langle \mathbb{L} | \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} \rangle}^0(\mathfrak{V}). \quad (3.26)$$

При этом по свойствам операции взятия образа имеем (см. (3.24)–(3.26)), что

$$\begin{aligned} (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\mathbb{G}) &\subset \bigcap_{i=1}^n (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle^0[\mathbb{L} \mid \mathbb{L} \cap D_i]) \\ &\subset \bigcap_{i=1}^n \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid D_i] \subset \Omega. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Поскольку $\mathfrak{V}$ и Ω выбирались произвольно, установлено (см. (3.26), (3.27)), что $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}] \quad \forall A \in N_{\mathbb{T}_* \langle E | \mathcal{L} \rangle}^0((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{E}]) \quad \exists B \in N_{\mathbb{T}_* \langle \mathbb{L} | \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} \rangle}^0(\mathcal{E}) : (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot]^1(B) \subset A$. Получили (3.21) (см. [11, с. 58, предложение 1.4.1]). $\square$

Отметим, что в силу (3.16) и следствия 3.1 имеем, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot] \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid \mathbb{L}]^{\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}]}, \quad (3.28)$$

где $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid \mathbb{L}] \neq \emptyset$; из (3.28) и предложения 3.4 вытекает, что на самом деле

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot] \in C(\langle \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{link} \rangle_0[\mathbb{L}], \mathbb{T}_* \langle \mathbb{L} \mid \mathcal{L}|_{\mathbb{L}} \rangle, \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E \mid \mathbb{L}], \mathbb{T}_* \langle E \mid \mathcal{L} \rangle|_{\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E | \mathbb{L}]}).$$

Учтем, кроме того, (2.14): из предложения 3.4, (2.8) и (2.14) легко следует, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$\begin{aligned} (U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}] &\triangleq ((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})} \\ &= ((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \cdot] \mid \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})) \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}), \mathbb{T}_{\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}}^*[\mathbb{L}], \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \end{aligned} \quad (3.29)$$

В дальнейшем оператор (3.29) будет основным предметом нашего исследования.

4 Преобразование ультрафильтров, 1

Отметим ряд простых свойств, связанных с п/п широко понимаемых ИП. Так (см. (1.4)), при переходе к п/п сохраняется отделимость: при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $H \in \mathcal{P}'(E)$

$$\mathcal{L}|_H = \{H \cap L : L \in \mathcal{L}\} \in \tilde{\pi}^0[H]; \quad (4.1)$$

в частности, это верно при $H \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Заметим, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $x \in \mathbb{L}$

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]((\mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{triv})[x]) = (\mathcal{L} - \text{triv})[x].$$

Заметим, что в случае, когда $\mathcal{L} \in \pi[E]$ и E — конечное множество, при $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ непременно

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{P}'(E).$$

Тогда в общем случае множества E , $E \neq \emptyset$, получаем при $K \in \text{Fin}(E)$, $\mathcal{K} \in \pi[K]$ и $\mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{K})$

$$\bigcap_{\Lambda \in \mathcal{F}} \Lambda \neq \emptyset. \quad (4.2)$$

Вместе с тем имеем с очевидностью (в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$) при $K \in \text{Fin}(E)$, что K — непустое множество и при этом

$$\mathcal{L}|_K \in \pi[K];$$

тогда с учетом (4.2)

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \in \mathcal{P}'(K) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_K).$$

З а м е ч а н и е 4.1. С учетом вышеупомянутых свойств в случае конечного множества E имеем при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, что (см. (2.2), (2.3))

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L});$$

итак, в данном случае все у/ф тривиальны, а все тривиальные фильтры максимальны. В общем же случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ для конечного множества E непременно

$$\exists x \in E : (\mathcal{L} - \text{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

В этой связи напомним [10, пример 2.2.1], где (для $E = \mathbb{N}$) указана π -система $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (на самом деле топология на E), для которой $\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \emptyset$; итак, в случае бесконечного множества E возможен случай, когда все тривиальные фильтры π -системы (обязательно неотделимой) не будут максимальными.

Отметим, наконец, что в общем случае E , $E \neq \emptyset$, и $\mathcal{L} \in \pi[E]$ при $K \in \text{Fin}(E)$ $\exists x \in K$:

$$(\mathcal{L}|_K - \text{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_K).$$

Возвращаясь к случаю $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$, где E — непустое множество, имеем при $H \in \mathcal{P}'(E)$ и $x \in H$ весьма очевидное равенство

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; H; (\mathcal{L}|_H - \text{triv})[x]] = (\mathcal{L} - \text{triv})[x]. \quad (4.3)$$

Напомним, что (см. (1.1)) при $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $H \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L}|_H - \text{link} \rangle[H]$ определено

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{E}]|_H = \{H \cap S : S \in (\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{E}]\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(H))$$

и, более того, $(\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{E}]|_H = \mathcal{E}$; в частности, в качестве $\mathcal{E}$ может использоваться фильтр на ИП $(H, \mathcal{L}|_H)$. В этой связи отметим очевидное следствие: при $\mathcal{L} \in \pi[E]$, $H \in \mathcal{P}'(E)$, $\mathcal{E}_1 \in \langle \mathcal{L}|_H - \text{link} \rangle[H]$ и $\mathcal{E}_2 \in \langle \mathcal{L}|_H - \text{link} \rangle[H]$

$$((\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{E}_1] = (\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{E}_2]) \implies (\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2); \quad (4.4)$$

в частности, в (4.4) можно полагать, что $\mathcal{E}_1 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_H)$ и $\mathcal{E}_2 \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_H)$. Полезно также учитывать свойство $\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \subset \mathcal{P}'(E)$. Напомним (2.4). Тогда с учетом предложения 3.3 получаем, что (в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$, где E — непустое множество) при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\Lambda \in \mathcal{L}|_{\mathbb{L}}$

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\Phi_{\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}}(\Lambda)) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\Lambda). \quad (4.5)$$

Кроме того, имеем при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{U} \in \mathcal{U}$, что $\mathbb{U} \in \mathcal{P}'(E)$ и

$$\mathcal{L}|_{\mathbb{U}} = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda \subset \mathbb{U}\} \in \pi[\mathbb{U}]; \quad (4.6)$$

более того, $\mathcal{U}|_{\mathbb{U}} = \{U \in \mathcal{U} \mid U \subset \mathbb{U}\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{U}})$ и при этом

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{U}; \mathcal{U}|_{\mathbb{U}}] = \mathcal{U}. \quad (4.7)$$

Учтем (2.4). Тогда (см. (4.5)) при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})) \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}). \quad (4.8)$$

Кроме того, в силу (2.4) при $L \in \mathcal{L}$ и $\mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(L)$ имеем включение $L \in \mathcal{U}$. Поэтому при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$ получаем, что $\mathcal{U}|_{\mathbb{L}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})$ и согласно (4.7)

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}](\mathcal{U}|_{\mathbb{L}}) = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}|_{\mathbb{L}}] = \mathcal{U}. \quad (4.9)$$

С учетом (4.8), (4.9) получаем следующее общее положение.

Предложение 4.1. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, то $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \neq \emptyset$ и

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})) = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}). \quad (4.10)$$

Доказательство очевидно (непустота $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$ следует из (2.8) и (4.8), а (4.10) получается непосредственной комбинацией (4.8), (4.9)). $\square$

Предложение 4.2. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, то $(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]$ есть биекция $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})$ на $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$:

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}] \in (\text{bi})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}); \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})].$$

Доказательство получаем комбинацией (2.6), (2.7), (3.29), (4.4) и предложения 4.1. $\square$

Из предложения 4.1 вытекает, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$$

и определена топология $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})} \in (\text{top})[\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})]$. Из (3.29) и предложения 4.1 легко следует, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}}^*[\mathbb{L}], \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})}); \quad (4.11)$$

из (1.8), (4.11) и предложения 4.2 вытекает свойство уплотнения:

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}] \in C_{\mathbf{c}}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}}^*[\mathbb{L}], \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})}). \quad (4.12)$$

Итак, при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}|\mathbb{L}}^*[\mathbb{L}])$ посредством свойства (4.12) уплотняется на $(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})})$; в этой связи отметим очевидное свойство:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})} = \{G \in \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \mid G \subset \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]). \quad (4.13)$$

В связи с (4.12), (4.13) полезно напомнить понятие полуалгебры множеств. Если $\mathbf{I}$ — непустое множество, $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ и $n \in \mathbb{N}$, то

$$\Delta_n(A, \mathcal{I}) \triangleq \{(J_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \mathcal{I}^n \mid (A = \bigcup_{i=1}^n J_i) \& (J_p \cap J_q = \emptyset \ \forall p \in \overline{1, n} \ \forall q \in \overline{1, n} \setminus \{p\})\}.$$

Тогда для непустого множества $\mathbf{I}$ в виде

$$\Pi[\mathbf{I}] \triangleq \{\mathcal{J} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall H \in \mathcal{J} \ \exists n \in \mathbb{N} : \Delta_n(\mathbf{I} \setminus H, \mathcal{J}) \neq \emptyset\}$$

имеем семейство всех полуалгебр п/м $\mathbf{I}$; ясно, что (см. (1.5)) $(\text{alg})[\mathbf{I}] \subset \Pi[\mathbf{I}]$ (точнее, $(\text{alg})[\mathbf{I}] = \{\mathcal{A} \in \Pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A}\}$), $\Pi[\mathbf{I}] \subset \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$. Напомним важное свойство (см. (1.7), [10, (5.5.37)]): для непустого множества $\mathbf{I}$ и полуалгебры $\mathcal{I} \in \Pi[\mathbf{I}]$

$$\mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}] \in (\mathbf{c} - \text{top})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I})], \quad (4.14)$$

а $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{I}), \mathbf{T}_{\mathcal{I}}^*[\mathbf{I}])$ есть непустой нульмерный [11, с. 529] компакт. Возвращаясь к рассматриваемому (широко понимаемому) ИП $(E, \mathcal{L})$, получаем (см. (2.13), (2.14), (4.12)) следующее положение.

Теорема 4.1. *Если $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, то*

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}] \in (\text{Hom})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}|\mathbb{L}}^*[\mathbb{L}]; \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})}].$$

Доказательство. Используем комбинацию (1.9), (4.12) и (4.14), а также предложение 4.2 и тот очевидный факт, что при $\mathcal{L} \in \Pi[E]$ и $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ непременно $\mathcal{L}|_{\mathbb{L}} \in \Pi[\mathbb{L}]$. $\square$

Итак, в случае, когда $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с полуалгеброй (и, в частности, с алгеброй) множеств в виде $(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]$ при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ реализуется гомеоморфизм компакта $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}|\mathbb{L}}^*[\mathbb{L}])$ на ТП $(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})})$. Два упомянутых ТП гомеоморфны, т. е. топологически отождествимы, а стоуновские множества для ИП $(E, \mathcal{L})$ реализуют компакты Стоуна (имеется в виду случай $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$) для непустых измеримых п/п данного ИП. В этой связи заметим, что при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $H \in \mathcal{P}'(E)$ $\mathcal{L}|_H \in (\text{alg})[H]$. Кроме того, при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$

$$\mathcal{L}|_{\mathbb{L}} = \{\Lambda \in \mathcal{L} \mid \Lambda \subset \mathbb{L}\} \in (\text{alg})[\mathbb{L}].$$

Итак, как частный случай теоремы 4.1 мы получаем при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ и $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, что

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}] = ((\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})} \in (\text{Hom})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}|\mathbb{L}}^*[\mathbb{L}]; \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]|_{\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})}].$$

Возвращаясь к общему случаю $\mathcal{L} \in \pi[E]$, заметим, что в связи с предложением 4.2 возникает естественный вопрос о представлении биекции, обратной к $(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]$, где $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$; ответ «подсказывает» (4.9): имеем, что

$$(\mathbb{L} - \text{st})[\mathcal{L}] \triangleq (\mathcal{U}|_{\mathbb{L}})_{\mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})} \in (\text{bi})[\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}); \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})] \quad (4.15)$$

есть биекция, обратная к $(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]$ (доказательство следует из общих свойств биекций); тогда, в частности, из (4.15) имеем, что $\forall \mathcal{U}_1 \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \quad \forall \mathcal{U}_2 \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$

$$(\mathcal{U}_1|_{\mathbb{L}} = \mathcal{U}_2|_{\mathbb{L}}) \implies (\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2). \quad (4.16)$$

В свою очередь, из (4.16) вытекает следующее предложение.

Предложение 4.3. *Если $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то истинна импликация*

$$(\exists \mathbb{U} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 : \mathcal{U}_1|_{\mathbb{U}} = \mathcal{U}_2|_{\mathbb{U}}) \implies (\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2). \quad (4.17)$$

Доказательство следует из (4.16); в самом деле, для $\mathbb{U} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ имеем, что $\mathbb{U} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{U}_1 \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{U})$ и $\mathcal{U}_2 \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{U})$. $\square$

Возвращаясь к предложению 4.3 (см. (4.17)), заметим с учетом (4.6), что при $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\exists \mathbb{U} \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 : \{U \in \mathcal{U}_1 \mid U \subset \mathbb{U}\} = \{U \in \mathcal{U}_2 \mid U \subset \mathbb{U}\}) \implies (\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2).$$

Итак, если два у/ф на ИП $(E, \mathcal{L})$ имеют общее множество, на котором совпадают следы этих двух у/ф, то и сами эти у/ф совпадают. Напомним полезное понятие базы фильтра (БФ): элементы множества

$$(\mathcal{L} - \text{Fi} - \text{Bas})[E] \triangleq \{\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\emptyset \notin \mathcal{B}) \& (\forall B_1 \in \mathcal{B} \quad \forall B_2 \in \mathcal{B} \quad \exists B_3 \in \mathcal{B} : B_3 \subset B_1 \cap B_2)\},$$

т. е. направленные (двойственно к упорядоченности по включению) непустые подсемейства $\mathcal{L}$, составленные из непустых множеств, называем БФ. Ясно, что

$$(\mathcal{L} - \text{fi})_E[\mathcal{B}] \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \quad \forall \mathcal{B} \in (\mathcal{L} - \text{Fi} - \text{Bas})[E]. \quad (4.18)$$

При этом, кстати (см. (4.18)), в случае $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ $\mathbb{F}^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}) \subset (\mathcal{L} - \text{Fi} - \text{Bas})[E]$ и

$$(\mathcal{L} - \text{fi})_E[\mathcal{U}|_{\mathbb{L}}] = \mathcal{U} \quad \forall \mathcal{U} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \quad (4.19)$$

(доказательство следует из определений).

Предложение 4.4. *Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})$, то справедливо равенство*

$$(\mathcal{L} - \text{fi})_E[\mathcal{U}] = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}]. \quad (4.20)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})$, получая, в частности, что $\mathcal{U}$ есть БФ на ИП $(E, \mathcal{L})$:

$$\mathcal{U} \in (\mathcal{L} - \text{Fi} - \text{Bas})[E];$$

при этом согласно (4.18)

$$(\mathcal{L} - \text{fi})_E[\mathcal{U}] = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists U \in \mathcal{U} : U \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}).$$

С другой стороны по выбору $\mathcal{U}$ имеем равенство

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}] = \{L \in \mathcal{L} \mid L \cap \mathbb{L} \in \mathcal{U}\} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \quad (4.21)$$

(см. (3.14), (4.8)). При этом согласно основному свойству (4.15)

$$(\mathbb{L} - \text{st})[\mathcal{L}]((U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}](\mathcal{U})) = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}]_{\mathbb{L}} = \mathcal{U}. \quad (4.22)$$

Вместе с тем из (4.19) и (4.21) получаем, что

$$(\mathcal{L} - \text{fi})_E[(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}]_{\mathbb{L}}] = (\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}]. \quad (4.23)$$

Но с учетом (4.22) имеем также равенство

$$(\mathcal{L} - \text{fi})_E[(\text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}; \mathcal{U}]_{\mathbb{L}}] = (\mathcal{L} - \text{fi})_E[\mathcal{U}],$$

что в силу (4.23) означает справедливость равенства (4.20). $\square$

Из предложения 4.4 вытекает теперь, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}] = ((\mathcal{L} - \text{fi})_E[\mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})}.$$

Отметим очевидное свойство сохранения отделимости: при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $H \in \mathcal{P}'(E)$

$$\mathcal{L}|_H \in \tilde{\pi}^0[H];$$

в частности (при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$) имеем, что

$$\mathcal{L}|_K \in \tilde{\pi}^0[K] \quad \forall K \in \text{Fin}(E).$$

Легко видеть, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{U} \cap \text{Fin}(E) \neq \emptyset) \implies (\mathcal{U} \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L})). \quad (4.24)$$

В связи с (4.24) полезно напомнить, что истинна эквивалентность (см. [10, предложение 2.2.1])

$$(\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]) \iff (\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

Легко видеть (см. (4.24)), что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$

$$\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \quad (4.25)$$

Введем в рассмотрение свободные у/ф ИП $(E; \mathcal{L})$: в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset\}. \quad (4.26)$$

Ясно, что при $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ множества $\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})$ образуют (см. (4.25), (4.26)) разбиение $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$:

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) \cup \mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L})) \& (\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \emptyset). \quad (4.27)$$

Возвращаясь к (4.2), отметим с учетом (4.25), что в случае конечного множества E и $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}).$$

Вместе с тем (см. раздел 2) в общем случае непустого множества E и $\mathcal{L} \in \pi[E]$

$$\forall x \in E \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) : (\mathcal{L} - \text{triv})[x] \subset \mathcal{U},$$

кроме того, имеем с очевидностью, что

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \setminus \mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \quad (4.28)$$

наконец, заметим, что $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset) \vee (\mathcal{U} \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L})).$$

Это означает (в общем случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$), что (см. (4.28)) $\forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$(\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset) \implies (\mathcal{U} \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L})).$$

До конца настоящего раздела полагаем, что E — непустое конечное множество и $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Легко устанавливается следующее.

Предложение 4.5. Если $x \in E$, то $\exists y \in E$:

$$((\mathcal{L} - \text{triv})[y] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \& ((\mathcal{L} - \text{triv})[x] \subset (\mathcal{L} - \text{triv})[y]). \quad (4.29)$$

Пример 4.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и при этом $n \geq 2$. Рассмотрим случай $E = \overline{1, n}$ (см. раздел 1, добавление). Полагаем, что $I_m \triangleq \{k \in E \mid m \leq k\}$ при $m \in E$; пусть в данном примере $\mathcal{L} = \{I_m : m \in E\} \cup \{\emptyset\}$, получаем $\mathcal{L} \in \pi[E]$ (заметим, что $I_n = \{n\}$ и $I_1 = E$; $\emptyset \in \mathcal{L}$). Тогда $(\mathcal{L} - \text{triv})[1] = \{E\}$. В то же время $(\mathcal{L} - \text{triv})[n] = \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$; более того, по способу построения $\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ есть наибольший фильтр $(E, \mathcal{L})$. При этом $(\mathcal{L} - \text{triv})[1] \subset (\mathcal{L} - \text{triv})[n]$; мы получили вариант у/ф $(\mathcal{L} - \text{triv})[y]$ в (4.29); точнее, $x = 1$, а $y = n$. При этом $(\mathcal{L} - \text{triv})[n] \setminus (\mathcal{L} - \text{triv})[1] \neq \emptyset$; так, например, $\{n\} \in (\mathcal{L} - \text{triv})[n] \setminus (\mathcal{L} - \text{triv})[1]$ для нашего конечного множества E .

Заметим, что (для конечного множества E) в силу предложения 4.5 $\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ и при этом $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \cap \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L})$ (см. (4.2)). Как следствие, в нашем случае $E \in \text{Fin}(E)$

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L})) \& (\mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) = \emptyset).$$

5 Тривиальные и свободные ультрафильтры

Вернемся к общему случаю непустого множества E . Полагаем в данном разделе π -систему $\mathcal{L}$ отделимой: пусть

$$\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]. \quad (5.1)$$

В связи с (5.1) напомним (4.25)–(4.27). Вернемся к (3.14). С учетом (4.1) и (4.25)–(4.27) получаем (см. (5.1)), что при $H \in \mathcal{P}'(E)$

$$\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_H) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_H) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_H)),$$

$$\mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}|_H) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_H) \mid \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_H)),$$

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_H) = \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_H) \cup \mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}|_H)) \& (\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_H) \cap \mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}|_H) = \emptyset).$$

С учетом (4.3) и (5.1) получаем, что при $H \in \mathcal{P}'(E)$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_H)$

$$(\text{st})[E; \mathcal{L}; H; \mathcal{U}] \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}).$$

В качестве H может использоваться множество из $\mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Как следствие имеем, что при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})) \subset \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}). \quad (5.2)$$

Отметим некоторые общие определения: если $\mathbf{I}$ — непустое множество, $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$ и $\Lambda \in \mathcal{I}$, то полагаем, что

$$(\Phi_{t,\mathcal{I}}^0(\Lambda) \triangleq \Phi_{\mathcal{I}}(\Lambda) \cap \mathbb{F}_t^*(\mathcal{I})) \& (\Phi_{\mathbf{f},\mathcal{I}}^0(\Lambda) \triangleq \Phi_{\mathcal{I}}(\Lambda) \cap \mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{I})); \quad (5.3)$$

данные определения содержательны при $\mathcal{I} \in \tilde{\pi}^0[\mathbf{I}]$. Вернемся к (широко понимаемому) ИП $(E, \mathcal{L})$, где E — непустое множество и выполнено (5.1). Ясно, что (см. (2.2), (5.3)) при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $x \in \mathbb{L}$

$$(\mathcal{L} - \text{triv})[x] \in \Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}), \quad (5.4)$$

причем справедливо следующее равенство

$$(\mathcal{L} - \text{triv})[x]|_{\mathbb{L}} = (\mathcal{L}|_{\mathbb{L}} - \text{triv})[x]. \quad (5.5)$$

Как следствие получаем (см. (5.4), (5.5)) при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathcal{U} \in \Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L})$ свойство

$$\mathcal{U}|_{\mathbb{L}} \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}). \quad (5.6)$$

Предложение 5.1. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, то

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})) = \Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}). \quad (5.7)$$

Доказательство. Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$. Из (3.29), (5.2), (5.4) и предложения 4.1 имеем вложение

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})) \subset \Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}). \quad (5.8)$$

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L})$, т. е. $\mathcal{V} \in \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$ и $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L})$. Тогда

$$\mathcal{V}|_{\mathbb{L}} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}) \quad (5.9)$$

(см. построения в связи с (4.9)) и согласно (5.6)

$$\mathcal{V}|_{\mathbb{L}} \in \mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}}); \quad (5.10)$$

с учетом (4.9), (5.9) и (5.10) получаем, что

$$\mathcal{V} = (U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}](\mathcal{V}|_{\mathbb{L}}) \in (U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})),$$

чем завершается проверка вложения

$$\Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}) \subset (U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_t^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})).$$

С учетом (5.8) получаем требуемое равенство (5.7). □

Напомним, что согласно (5.3) при $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$

$$\Phi_{\mathbf{f},\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}) = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) \cap \mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}));$$

при этом реализуется в силу (4.27) разбиение $\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$:

$$(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L}) = \Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}) \cup \Phi_{\mathbf{f},\mathcal{L}}^0(\mathbb{L})) \& (\Phi_{t,\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}) \cap \Phi_{\mathbf{f},\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}) = \emptyset).$$

Предложение 5.2. Если $\mathbb{L} \in \mathcal{L} \setminus \{\emptyset\}$, то

$$(U - \text{st})[E; \mathcal{L}; \mathbb{L}]^1(\mathbb{F}_{\mathbf{f}}^*(\mathcal{L}|_{\mathbb{L}})) = \Phi_{\mathbf{f},\mathcal{L}}^0(\mathbb{L}).$$

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 4.2 и 5.1; следует также учитывать (4.27). $\square$

References

- [1] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 279 с. [N. Bourbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 279 pp.]
- [2] E. Čech, *Topological Spaces*, Academia, 1966.
- [3] de Groot J., “Superextensions and supercompactness”, *Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, Proc. I Internatnl. Symp., VEB Deutscher Verlag Wis., Berlin, 1969, 89–90.
- [4] van Mill J., *Supercompactness and Wallman Spaces*, Math. Center Tract., Amsterdam, 1977.
- [5] M. Strok, A. Szymanski, “Compact Metric Spaces have Binary Subbases”, *Fund. Math.*, **89**:1 (1975), 81–91.
- [6] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].
- [7] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Мир, М., 1964. [J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Mir Publ., Moscow, 1964 (In Russian)].
- [8] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005. [A. V. Bulinsky, A. N. Shiryaev, *Theory of Random Processes*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russian)].
- [9] П. С. Александров, *Введение в теорию множеств и общую топологию*, Едиториал, М., 2004, 368 с. [P. S. Aleksandrov, *Introduction to Set Theory and General Topology*, Editorial Publ., Moscow, 2004 (In Russian), 368 pp.]
- [10] А. Г. Ченцов, *Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств*, ЛЕНАНД, М., 2024, 416 с. [A. G. Chentsov, *Ultrafilters and Maximal Linked Set Systems*, LENAND Publ., Moscow, 2024 (In Russian), 416 pp.]
- [11] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian)].
- [12] A. G. Chentsov, S. I. Morina, *Extensions and Relaxations*, Mathematics and Its Applications, **542**, Springer Dordrecht, Boston; London, 2002, 408 pp.
- [13] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977, 624 с. [J. Varga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russian), 624 pp.]
- [14] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6568-0703>

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 06.07.2026 г.

Поступила после рецензирования 04.09.2026 г.

Принята к публикации 17.09.2026 г.

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6568-0703>

There is no conflict of interests.

Received 06.07.2026

Reviewed 04.09.2026

Accepted for press 17.09.2026