

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Родина Л.И., Кузнецов М.С., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

УДК 517.935.4



Задачи максимизации дохода и средней временной выгоды от сбора ресурса с учетом расходов на обслуживание

Людмила Ивановна РОДИНА^{1,2}, Максим Сергеевич КУЗНЕЦОВ¹

¹ ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

² ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Исследуется модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано логистическим дифференциальным уравнением $\dot{x} = ax(1-x)$ с мальтузианским коэффициентом $a > 0$. Рассматриваем данное уравнение на отрезке времени $[0, T]$, где $T > 0$ — заданное число. Предполагаем, что в моменты времени t_k из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, и количество ресурса, оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству x_0 . Обозначим через X_k количество ресурса до сбора в момент t_k , общий доход от сбора на отрезке $[0, T]$ определим как

$$D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = \sum_{k=1}^n X_k u_k,$$

где $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. Исследуем задачу нахождения моментов времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ и построения управлений $u_1, \dots, u_n$ для достижения наибольшего дохода на $[0, T]$.

Также рассматривается доход от сбора при дополнительном условии, что в каждый момент времени добыча ресурса связана с расходами на обслуживание оборудования или оплату труда. Считаем, что величина этих расходов постоянная в каждый момент времени и равна $\beta > 0$, тогда общий доход от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$ определим как

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n.$$

Описан режим эксплуатации популяции, при котором достигается наибольшее значение данной характеристики. Исследуется средняя временная выгода от сбора ресурса в предположении, что количество извлечений $n(T)$ на отрезке $[0, T]$ зависит от длины этого отрезка.

Ключевые слова: модель подверженной промыслу популяции, оптимальная эксплуатация, доход от сбора возобновляемого ресурса, средняя временная выгода

Для цитирования: Родина Л.И., Кузнецов М.С. Задачи максимизации дохода и средней временной выгоды от сбора ресурса с учетом расходов на обслуживание // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 61–72.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

SCIENTIFIC ARTICLE

© L. I. Rodina, M. S. Kuznetsov, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

Problems of maximizing income and average time profit from resource harvesting, taking into account maintenance costs

Lyudmila I. RODINA^{1,2}, Maksim S. KUZNETSOV¹¹ Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

² National University of Science and Technology “MISIS”

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. We consider a model of population dynamics which development in the absence of exploitation is given by the logistic differential equation $\dot{x} = ax(1 - x)$ with a Malthusian coefficient $a > 0$. We consider this equation on the time interval $[0, T]$, where $T > 0$ is a given number. Assume that at the moments of time t_k , a certain share of the biological resource $u_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, is extracted from the population and the amount of resource remaining at time T is equal to the initial amount x_0 . Let X_k be the amount of resource before collection at the time t_k , and define the total income from collection on the interval $[0, T]$ as

$$D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = \sum_{k=1}^n X_k u_k,$$

where $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. We study the problem of finding the time moments $t_1, \dots, t_{n-1}$ and constructing the controls $u_1, \dots, u_n$ to achieve the maximum income on $[0, T]$.

Also, the income from the collection is considered under the additional condition that at each moment of time, the extraction of the resource is associated with the costs of equipment maintenance or labor. We assume that the value of these costs is constant at each moment of time and is equal to $\beta > 0$, then the total income from the collection of the resource on the interval $[0, T]$ is defined as

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n.$$

The mode of exploitation of the population in which the greatest value of this characteristic is achieved is described. The average time profit from harvesting a resource is investigated under the assumption that the number of extractions $n(T)$ on the interval $[0, T]$ depends on the length of this interval.

Keywords: model of a population subject to harvesting, optimal exploitation, income from harvesting of a renewable resource, average time profit

Mathematics Subject Classification: 34K35, 49J15, 49K15, 93C15.

For citation: Rodina L.I., Kuznetsov M.S. Problems of maximizing income and average time profit from resource harvesting, taking into account maintenance costs. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 61–72.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

Введение

Управление эксплуатацией возобновляемых биологических ресурсов является важной прикладной задачей, находящейся на стыке экологии, экономики и математической теории управления. Основная цель исследований состоит в определении таких режимов извлечения ресурса, которые обеспечивают максимальный экономический эффект при сохранении устойчивости эксплуатируемой системы. Математические модели, используемые для решения подобных задач, часто основаны на системах дифференциальных или разностных уравнений, описывающих динамику популяции, и дополняются управляющими воздействиями, которые заключаются в изъятиях некоторой доли биомассы. С обзором литературы по данной тематике можно познакомиться в [1, 2].

Настоящая работа является продолжением публикаций [3–7], в которых исследуются различные характеристики сбора возобновляемого ресурса и режимы оптимальной добычи. Рассматриваем модель динамики популяции, заданной логистическим дифференциальным уравнением и подверженной эксплуатации. Актуальность исследования связана с необходимостью учета не только доходов от добычи, но и постоянных затрат, сопровождающих каждое извлечение ресурса (например, затраты на оборудование, топливо, рабочую силу), а также с задачей долгосрочного устойчивого использования ресурса, характеризующейся средней временной выгодой.

В первом параграфе статьи рассматривается общий доход при n извлечениях ресурса на заданном отрезке $[0, T]$, исследуется задача нахождения моментов времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ и построения управлений для достижения наибольшего значения данной характеристики. Показано, что если количество ресурса, оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству x_0 , то для максимизации дохода необходимо производить извлечения через одинаковые промежутки времени. Далее рассматривается доход от сбора ресурса при дополнительном условии, что в каждый момент времени добыча связана с расходами на обслуживание оборудования или оплату труда. В предположении, что величина этих расходов $\beta > 0$ постоянная при каждом извлечении ресурса, получено значение оптимального количества извлечений $n_0 = n_0(\beta, T) \leq n$ для отрезка $[0, T]$ и наибольшее значение дохода. В последнем параграфе исследуется задача сбора ресурса на бесконечном промежутке времени. Получены выражения для оптимальных величин промежутков между моментами извлечения ресурса и максимальное значение средней временной выгоды с учетом расходов на обслуживание. Для всех рассматриваемых характеристик описаны режимы эксплуатации популяции, при которых достигаются их наибольшие значения.

1. Задача о максимизации дохода от сбора возобновляемого ресурса

Исследуется модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано логистическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = ax(1 - x), \quad x \geq 0. \quad (1.1)$$

Коэффициент $a > 0$ в задачах математической биологии называют мальтузианским коэффициентом. Будем рассматривать уравнение (1.1) на промежутке времени $[0, T]$, где $T > 0$ — заданное число.

Пусть в момент времени t_k ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$) из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. С учетом

эксплуатации получаем управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax(1-x), \quad t \neq t_k, \\ x(t_k) &= (1-u_k)x(t_k-0),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $x(t_k-0)$ и $x(t_k)$ — количество ресурса до и после сбора в момент t_k соответственно. Предполагаем, что решения этой системы непрерывны справа.

Обозначим через $X_k = x(t_k-0)$ количество ресурса до сбора в момент t_k , $x(0) = x_0$ — начальное количество ресурса, C_1 — агрегированную стоимость условной единицы ресурса. Будем полагать, что $C_1 = 1$, тогда стоимость собранного ресурса в момент t_k равна $X_k u_k$, $k = 1, \dots, n$. Предполагаем также, что количество ресурса, оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству ресурса x_0 , то есть $(1-u_n)X_n = x_0$. *Общий доход от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$ определим как*

$$D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = \sum_{k=1}^n X_k u_k, \tag{1.3}$$

где $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. Исследуем задачу нахождения моментов времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ и построения управлений $u_1, \dots, u_n$ для достижения наибольшего дохода (1.3) на отрезке $[0, T]$.

Для удобства вычислений введем вспомогательные обозначения: $x_k = x(t_k)$ — количество ресурса после сбора в момент t_k , $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, $t_0 = 0$, $t_n = T$. Тогда

$$x_k = (1-u_k)X_k, \quad k = 1, \dots, n; \quad \tau_1 + \dots + \tau_n = T, \quad x_n = x_0. \tag{1.4}$$

Впишем решения логистического уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(0, x_k) = x_k$:

$$\varphi(t, x_k) = \frac{x_k e^{at}}{1 + x_k(e^{at} - 1)}, \quad t \geq 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Отметим, что

$$X_k = \varphi(\tau_k, x_{k-1}) = \frac{x_{k-1} e^{a\tau_k}}{1 + x_{k-1}(e^{a\tau_k} - 1)}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.5}$$

В новых обозначениях задача максимизации функции (1.3) сводится к задаче максимизации функции

$$S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x_k}{(1-x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k} - x_k \right),$$

где $\bar{\tau}_n = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$, $\tau_1 + \dots + \tau_n = T$, $x_n = x_0$. Для фиксированного $n \geq 1$ рассмотрим множество

$$\Delta_n(T) \doteq \{(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) : \tau_k \in (0, T), \tau_1 + \dots + \tau_n = T, x_k \in [0, X_k], k = 1, \dots, n\}.$$

Если $x_0 \in [0, 1]$, то $x_k \in [0, X_k] \subseteq [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, тогда множество $\Delta_n(T)$ ограничено и является подмножеством $[0, 1]^n \times (0, T)^n$.

Теорема 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и $x_0 \in [0, 1]$. Наибольшее значение функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$ равно

$$S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) = n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} \quad (1.6)$$

и достигается в точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$\tau_1^* = \dots = \tau_n^* = \frac{T}{n}, \quad x_1^* = \dots = x_n^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}. \quad (1.7)$$

Доказательству теоремы 1.1 предположим доказательство следующего утверждения.

Лемма 1.1. Последовательность $\{S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)\}_{n=1}^\infty$, заданная (1.6), возрастающая и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} = \frac{aT}{4}. \quad (1.8)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$S(x) \doteq x(e^{\frac{aT}{2x}} - 1)(e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-1}, \quad x > 0.$$

Найдем

$$S'(x) = \left(e^{\frac{aT}{x}} - 1 - \frac{aT}{x}e^{\frac{aT}{2x}}\right)(e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-2}.$$

Отметим, что $S'(x) > 0$ при $x > 0$, так как это неравенство равносильно

$$\operatorname{sh} \frac{aT}{2x} > \frac{aT}{2x}, \quad x > 0.$$

Таким образом, функция $S(x)$ возрастает на интервале $(0, +\infty)$, поэтому последовательность $\{S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)\}_{n=1}^\infty$ возрастающая.

Равенство (1.8) можно получить, если разложить экспоненту $e^{\frac{aT}{2n}}$ в ряд Тейлора. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Выпишем уравнения для нахождения критических точек функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$:

$$S'_{\tau_k}(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) = \frac{ax_{k-1}(1 - x_{k-1})e^{-a\tau_k}}{((1 - x_{k-1})e^{-a\tau_k} + x_{k-1})^2} - \frac{ax_{n-1}(1 - x_{n-1})e^{-a\tau_n}}{((1 - x_{n-1})e^{-a\tau_n} + x_{n-1})^2} = 0, \quad (1.9)$$

где $k = 1, \dots, n$, $\tau_n = T - (\tau_1 + \dots + \tau_{n-1})$;

$$S'_{x_k}(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) = \frac{e^{-a\tau_{k+1}}}{((1 - x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k)^2} - 1 = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует

$$x_k^* = \left(e^{\frac{a\tau_{k+1}^*}{2}} + 1\right)^{-1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Подставляя данные значения в (1.9), получаем $\tau_1^* = \dots = \tau_n^*$ и окончательно

$$\tau_1^* = \dots = \tau_n^* = \frac{T}{n}.$$

Теперь из двух последних равенств и $x_0^* = x_n^*$ следует, что

$$x_1^* = \dots = x_n^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}.$$

Вычисляя значение функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ в данной стационарной точке, получаем (1.6).

Докажем, что точка $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$, заданная (1.7), является точкой максимума функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$. Отметим, что $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$ является внутренней стационарной точкой ограниченного множества $\Delta_n(T)$ (это следует из неравенства $x^* < \varphi(\tau^*, x^*)$, где $x^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$, $\tau^* = T/n$). Покажем, что значение функции в точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$ больше максимального значения на границе $\Delta_n(T)$.

Пусть $n = 1$, тогда $\Delta_1(T) \doteq \{(T, x_1) : x_1 \in [0, X_1]\}$. Функция

$$S(\bar{\tau}_1, \bar{x}_1) = S(T, x_1) = \frac{x_1}{(1 - x_1)e^{-aT} + x_1} - x_1$$

на интервале $(0, 1)$ имеет стационарную точку $x^* = (e^{\frac{aT}{2}} + 1)^{-1}$, в которой

$$S(T, x^*) = (e^{\frac{aT}{2}} - 1)(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^{-1} > 0.$$

Вычисляя $S(T, 0) = S(T, X_1) = 0$, делаем вывод, что (T, x^*) — точка максимума.

При $n = 2$ рассмотрим множество

$$\Delta_2(T) \doteq \{(\bar{\tau}_2, \bar{x}_2) : \tau_k \in (0, T), \tau_1 + \tau_2 = T, x_k \in [0, X_k], k = 1, 2\}$$

и найдем

$$S(\bar{\tau}_2^*, \bar{x}_2^*) = 2(e^{\frac{aT}{4}} - 1)(e^{\frac{aT}{4}} + 1)^{-1}$$

(здесь $\tau_1^* = \tau_2^* = T/2$, $x_1^* = x_2^* = (e^{\frac{aT}{4}} + 1)^{-1}$). Докажем, что это значение больше, чем значения функции $S(\bar{\tau}_2, \bar{x}_2)$ на границе $\Delta_2(T)$. Рассмотрим часть этой границы, на которой выполняется равенство $x_1 = X_1 = \varphi(\tau_1, x_0)$. Оно означает, что в момент времени τ_1 извлечение ресурса не производится и весь доход получается только при $t = T$, наибольшее значение этого дохода равно $S(T, x^*)$. Из леммы 1.1 следует, что

$$S(\bar{\tau}_2^*, \bar{x}_2^*) > S(\bar{\tau}_1^*, \bar{x}_1^*) = S(T, x^*). \quad (1.11)$$

Далее рассмотрим часть границы, для которой $x_2 = X_2 = \varphi(\tau_2, x_1)$; здесь в момент времени T добыча ресурса не производилась, и весь доход получен от извлечения в момент $\tau_1 < T$. В этом случае получаем

$$S(\bar{\tau}_2^*, \bar{x}_2^*) > S(T, x^*) > S(\tau_1, x^*).$$

Рассмотрим другие части границы множества $\Delta_2(T)$. Если $x_0 = 0$, то $x_1 = 0$, здесь получается нулевой доход, и аналогично при $x_1 = 0$. Если $\tau_1 = 0$, то $\tau_2 = T$ (если $\tau_2 = 0$, то $\tau_1 = T$), тогда выполнено (1.11).

Аналогичные рассуждения верны для множества $\Delta_n(T)$ при любом $n \geq 3$. В силу леммы 1.1, последовательность $\{S_n(\bar{\tau}^*, \bar{x}^*)\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, поэтому наибольшее значение дохода в стационарной точке внутри множества $\Delta_n(T)$ будет превосходить значения данной функции на границе этого множества. $\square$

Вернемся к рассмотрению функции общего дохода от сбора ресурса $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$, заданной равенством (1.3).

Теорема 1.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и $x_0 \in [0, 1]$. Наибольшее значение функции $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ равно $n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$ и достигается в точке $(\bar{t}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$t_k^* = \frac{kT}{n}, \quad u_k^* = 1 - e^{-\frac{aT}{2n}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Доказательство. Наибольшие значения функций $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ и $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ совпадают, поэтому основное утверждение теоремы следует из теоремы 1.1. Найдем точку $(\bar{t}_n^*, \bar{x}_n^*)$, в которой достигается максимум $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$. Из (1.4) и (1.5) следует, что

$$u_k = 1 - \frac{x_k}{X_k} = 1 - \frac{x_k}{\varphi(\tau_k, x_{k-1})} = 1 - \frac{x_k(1 + x_{k-1}(e^{a\tau_k} - 1))}{x_{k-1}e^{a\tau_k}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Далее из (1.7) получаем (1.12). $\square$

2. Задача о максимизации дохода с учетом расходов на обслуживание

Рассматриваем управляемую систему с импульсным воздействием (1.2) и общий доход от сбора ресурса $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ на отрезке $[0, T]$, заданный равенством (1.3). Полагаем, что количество ресурса x_n , оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству ресурса x_0 .

Введем дополнительное предположение, которое состоит в том, что извлечение ресурса в каждый момент времени связано с расходами на обслуживание оборудования или оплату труда. Пусть величина этих расходов будет постоянной в каждый момент времени и равна $\beta > 0$. Тогда общий доход от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$ определим как

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n, \quad (2.1)$$

где $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. Исследуем задачу максимизации дохода (2.1) от добычи ресурса на отрезке $[0, T]$ с учетом расходов на обслуживание.

Рассмотрим последовательность

$$V_n \doteq S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) - \beta n = n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} - \beta n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Лемма 2.1. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 > e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$, то последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ убывающая;
 - 2) если $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 \leq e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$, то последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает
- при $n \leq n_0$ и убывает при $n > n_0$, где $n_0 = \left\lceil \frac{aT}{2y^*} \right\rceil$, $y^* > 0$ — корень уравнения

$$e^{2y} - 1 - 2ye^y = \beta(e^y + 1)^2 \quad (2.2)$$

(квадратными скобками здесь обозначена целая часть числа).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(x) \doteq x(e^{\frac{aT}{2x}} - 1)(e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-1} - \beta x, \quad x > 0,$$

найдем

$$v'(x) = \left(e^{\frac{aT}{x}} - 1 - \frac{aT}{x} e^{\frac{aT}{2x}} \right) (e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-2} - \beta.$$

Отметим, что функция $v'(x)$ убывающая, так как $v''(x) < 0$ при $x > 0$; кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v'(x) = -\beta < 0. \quad (2.3)$$

Неравенство $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 > e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$ равносильно $v'(1) < 0$. Поскольку функция $v'(x)$ убывающая, то $v'(x) < 0$ при всех $x \geq 1$. Следовательно, $v(x)$ также является убывающей функцией (при $x \geq 1$), и поэтому последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ убывающая.

Далее, неравенство $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 \leq e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$ означает, что $v'(1) \geq 0$. Поэтому из (2.3) следует существование точки $x^* \geq 1$, для которой $v'(x^*) = 0$. Поскольку функция $v'(x)$ убывающая, то точка x^* единственная и является точкой максимума функции $v(x)$. Пусть $y = aT/2x$, тогда уравнение $v'(x) = 0$ равносильно уравнению (2.2), и $y^* = aT/2x^*$ является единственным положительным корнем (2.2). $\square$

Используя обозначения первого параграфа, приведем задачу о максимизации дохода с учетом на обслуживание $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ к задаче максимизации функции

$$V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) \doteq S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) - \beta n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x_k}{(1-x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k} - x_k \right) - \beta n,$$

где $\bar{\tau}_n = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$, $\tau_1 + \dots + \tau_n = T$, $x_n = x_0$.

Приведенное ниже утверждение является следствием теоремы 1.1 и леммы 2.1.

Теорема 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и $x_0 \in [0, 1]$. Справедливы следующие утверждения:

1) Если $n \leq n_0 = \left\lceil \frac{aT}{2y^*} \right\rceil$, где $y^* > 0$ — корень уравнения (2.2), то наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$ равно

$$V(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) = n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} - \beta n \quad (2.4)$$

и достигается в точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$\tau_1^* = \dots = \tau_n^* = \frac{T}{n}, \quad x_1^* = \dots = x_n^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}.$$

2) Если $n > n_0$, то наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$ равно $\max(V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*), V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*))$.

До к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n \leq n_0$. В силу леммы 2.1 последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает при $n \leq n_0$, поэтому значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ в стационарной точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$ больше, чем на границе множества $\Delta_n(T)$.

Если $n > n_0$, то наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ равно либо $V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*)$, либо $V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*)$. Отсюда получаем второе утверждение теоремы. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $x_0 \in [0, 1]$. Если $n \leq n_0$, то наибольшее значение функции $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ задается равенством (2.4) и достигается в точке $(\bar{t}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$t_k^* = \frac{kT}{n}, \quad u_k^* = 1 - e^{-\frac{aT}{2n}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При $n > n_0$ наибольшее значение функции $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ равно

$$\max(V(\bar{t}_{n_0}^*, \bar{u}_{n_0}^*), V(\bar{t}_{n_0+1}^*, \bar{u}_{n_0+1}^*)).$$

Пример 2.1. Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = 2x(1 - x), \quad x \geq 0. \quad (2.5)$$

Найдем наибольшее значение дохода (2.1) от добычи ресурса с учетом расходов на обслуживание на отрезке $[0, 15]$ при $n = 10$, $\beta = 0,5$.

Отметим сначала, что если производить 10 извлечений ресурса через одинаковые промежутки времени, то доход от добычи будет равен приблизительно 1,351. Покажем, что более рационально производить 6 извлечений. Действительно, при $\beta = 0,5$ уравнение (2.2) имеет корень $y^* \approx 2,51$ и $n_0 = 5$. Из (2.4) находим

$$V(\bar{\tau}_5^*, \bar{x}_5^*) \approx 2,026, \quad V(\bar{\tau}_6^*, \bar{x}_6^*) \approx 2,090.$$

В силу теоремы 2.1 наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_{10}, \bar{x}_{10})$ на множестве $\Delta_{10}(15)$ приближенно равно 2,090. Данное значение достигается в точке $(\bar{\tau}_6^*, \bar{x}_6^*)$, где

$$\tau_1^* = \dots = \tau_6^* = 2,5, \quad x_1^* = \dots = x_6^* \approx 0,076.$$

Отметим, что $u_k^* \approx 0,918$, $k = 1, \dots, 6$.

3. Задача о максимизации средней временной выгоды от извлечения ресурса

Рассматриваем управляемую систему с импульсным воздействием (1.2) и общий доход от сбора ресурса на отрезке времени $[0, T]$:

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n.$$

Если $\beta > 0$, то общий доход учитывает расходы на обслуживание, при $\beta = 0$ такие расходы не предусмотрены. Количество ресурса, оставшегося в момент времени T , может быть произвольным (не обязательно равным начальному количеству ресурса x_0). Предполагаем, что количество извлечений ресурса $n = n(T)$ зависит от длины отрезка $[0, T]$ и может выбираться различными способами. Обозначим $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots)$, $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots)$, где $u_k \in [0, 1]$ — доля извлеченного ресурса в момент времени t_k , $k = 1, 2, \dots$.

Определение 3.1. *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса назовем функцию

$$H_*(x_0, \bar{t}, \bar{u}) \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{k=1}^{n(T)} X_k u_k - \beta n(T) \right).$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*(x_0, \bar{t}, \bar{u})$ и, если выполнено равенство $H_*(x_0, \bar{t}, \bar{u}) = H^*(x_0, \bar{t}, \bar{u})$, то определим предел

$$H(x_0, \bar{t}, \bar{u}) \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{k=1}^{n(T)} X_k u_k - \beta n(T) \right).$$

Отметим, что в работах [5, 6] рассматривалось другое определение средней временной выгоды (предполагалось, что промежутки между извлечениями ресурса фиксированы и равны $d > 0$).

Теорема 3.1. Пусть $\beta > 0$. Тогда наибольшее значение функции $H(x_0, \bar{t}, \bar{u})$ равно

$$H(x_0^*, \bar{t}^*, \bar{u}^*) = \frac{a}{2y^*} \left(\frac{e^{y^*} - 1}{e^{y^*} + 1} - \beta \right) = \frac{ae^{y^*}}{(e^{y^*} + 1)^2}, \quad (3.1)$$

где y^* — корень уравнения (2.2). Значение (3.1) достигается при

$$x_0^* = (e^{y^*} + 1)^{-1}, \quad t_k^* = \frac{2ky^*}{a}, \quad u_k^* = 1 - e^{-y^*}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Доказательство. Покажем сначала, что если $n(T) = [\alpha T]$ для некоторого $\alpha > 0$, то существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T)}{T} = \alpha. \quad (3.3)$$

Действительно, для любого числа αT выполнены неравенства $[\alpha T] \leq \alpha T < [\alpha T] + 1$. Отсюда получаем

$$\frac{\alpha T - 1}{T} < \frac{[\alpha T]}{T} = \frac{n(T)}{T} \leq \alpha.$$

Таким образом, предел $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T)}{T}$ существует, и выполнено (3.3).

Для каждого $T > 0$ выберем $n(T) = [aT/2y^*]$, тогда наибольшее значение дохода $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ равно $\max(V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*), V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*))$, где $n_0 = n(T)$. Из (3.3) получаем, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_0}{T} = \frac{a}{2y^*}$. Учитывая (2.4), найдем предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_0}{T} \left(\frac{e^{\frac{aT}{2n_0}} - 1}{e^{\frac{aT}{2n_0}} + 1} - \beta \right) = \frac{a}{2y^*} \left(\frac{e^{y^*} - 1}{e^{y^*} + 1} - \beta \right) = \frac{ae^{y^*}}{(e^{y^*} + 1)^2}.$$

Последнее равенство следует из условия того, что y^* является корнем уравнения (2.2). Отметим, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*)}{T},$$

поэтому справедливо (3.1). В (3.2) указаны значения $x_0^*, \bar{t}^*, \bar{u}^*$, при которых выполнено (3.1) (это можно проверить при помощи простых вычислений). $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Кроме режима эксплуатации популяции, указанного в (3.2), можно выбрать и другие оптимальные режимы сбора ресурса. Например, если $x_0 \geq x_0^* = (e^{y^*} + 1)^{-1}$, то следующие значения:

$$t_k^* = \frac{2ky^*}{a}, k = 1, 2, \dots; u_1^* = 1 - \frac{x_0^*(1 + x_0(e^{2y^*} - 1))}{x_0 e^{2y^*}}, \quad u_k^* = 1 - e^{-y^*}, \quad k = 2, 3, \dots$$

дадут такой же оптимальный результат средней временной выгоды, как в (3.1).

Также заметим, что в (3.2) получены оптимальные величины промежутков между моментами извлечения ресурса на бесконечном интервале времени, которые равны $2y^*/a$.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой задано дифференциальным уравнением (2.5). Пусть $\beta = 0,5$, тогда $y^* \approx 2,51$. Наибольшее значение функции $H(x_0, \bar{t}, \bar{u})$ приближенно равно 0,139 и достигается при

$$x_0^* \approx 0,075, \quad t_k^* \approx 2,51k, \quad u_k^* \approx 0,919, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отметим, что данные значения управлений u_k^* близки к значениям, полученным в примере 2.1. Сравнивая значения $H(x_0^*, \bar{t}^*, \bar{u}^*) \approx 0,139$ и $\frac{1}{15}V(\bar{\tau}_6^*, \bar{x}_6^*) \approx 0,139$, видим, что они совпадают с точностью до тысячных.

References

- [1] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, “On optimal harvesting in age-structured populations”, *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making: Essays in Honor of Richard F. Hartl*, **22** (2016), 149–166.
- [2] А. А. Давыдов, Д. А. Мельник, “Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором”, Тр. ИММ УрО РАН, **27**, 2021, 99–107; англ. пер.: A. A. Davydov, D. A. Melnik, “Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse harvesting”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315**: suppl. 1 (2021), S81–S88.
- [3] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resource from the structured population”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].
- [4] Л. И. Родина, А. В. Черникова, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени”, Труды Института математики и механики УрО РАН, **29**, 2023, 167–179. [L. I. Rodina, A. V. Chernikova, “On infinite-horizon optimal exploitation of a renewable resource”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **29**, 2023, 167–179 (In Russian)].
- [5] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].
- [6] Л. И. Родина, “Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, “Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].
- [7] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 16–26. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of renewable resource extraction from the structured population”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 16–26 (In Russian)].

Информация об авторах

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Information about the authors

Lyudmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Кузнецов Максим Сергеевич, старший преподаватель кафедры материаловедения и энергетического машиностроения, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: maks.kuznetsoff@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-8970-0825>

Maxim S. Kuznetsov, Senior Lecturer of the Materials Science and Power Engineering Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation. E-mail: maks.kuznetsoff@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-8970-0825>

Поступила в редакцию 13.01.2026 г.
Поступила после рецензирования 09.03.2026 г.
Принята к публикации 12.03.2026 г.

Received 13.01.2026
Reviewed 09.03.2026
Accepted for press 12.03.2026