

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ступин Д. Л., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

УДК 517.53, 517.54



Оценки коэффициентов необращающихся в нуль функций

Денис Леонидович СТУПИН

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Настоящая статья посвящена оценкам модулей тейлоровских коэффициентов на классах голоморфных функций, не обращающихся в нуль и ограниченных в единичном круге. Обозначим множество всех голоморфных функций, ограниченных снизу по модулю в единичном круге, через E . Пусть $t \geq 0$ — параметр. На подклассах E_t класса E , содержащих отображения из E , нормированные в начале координат, получены точные оценки модулей всех тейлоровских коэффициентов. Рассмотрим класс B , состоящий из голоморфных функций, ограниченных по модулю сверху и не обращающихся в нуль в единичном круге, а также его подклассы B_t , состоящие из функций класса B , нормированных в начале координат. Классы E и E_t связаны с классами B и B_t посредством инволюции. Промежуточное положение между двумя упомянутыми классами E и B занимает множество голоморфных ограниченных по модулю сверху и снизу функций $A_{\rho,r}$, $0 < \rho < r$. Классы $A_{\rho,r}$ можно разбить на подклассы $A_{\rho,r,t}$ функций класса $A_{\rho,r}$, нормированных в начале координат. Фиксируем ρ и r . Изучение класса $A_{\rho,r}$ можно свести к изучению класса $A_{1,r/\rho}$, являющегося подклассом класса E , или к изучению класса $A_{\rho/r,1}$, являющегося подклассом класса B . При этом $A_{1,r/\rho} \rightarrow E$ и $A_{\rho/r,1} \rightarrow B$ при $r \rightarrow \infty$. На классах $A_{1,r,t}$ построена мажорирующая функция с действительными коэффициентами, благодаря чему с помощью теории подчинения получены точные оценки модулей первых двух тейлоровских коэффициентов на каждом классе $A_{1,r,t}$, а также на классе $A_{1,r}$.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, ограниченные функции, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов

Для цитирования: Ступин Д. Л. Оценки коэффициентов необращающихся в нуль функций // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 73–85.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. L. Stupin, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

Coefficient estimates for nonvanishing functions

Denis L. STUPIN

Tver State University

33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to the estimates of the moduli of Taylor coefficients on classes of holomorphic functions that do not vanish and are bounded in the unit disk. Let us denote the set of all holomorphic functions that are bounded from below by modulus in the unit disk by E . Let $t \geq 0$ be a parameter. The sharp estimates of the moduli of all Taylor coefficients have been obtained for subclasses E_t of the class E that contain mappings from E normalized at the origin. We consider the class B consisting of holomorphic functions that are bounded from above by modulus and do not vanish in the unit disk, as well as its subclasses B_t which consist of functions from the class B normalized at the origin. The classes E and E_t are related to the classes B and B_t through involution. An intermediate position between the two aforementioned classes E and B is occupied by the set of holomorphic functions $A_{\rho,r}$, $0 < \rho < r$, that are bounded from above and from below by modulus. The classes $A_{\rho,r}$ can be divided into subclasses $A_{\rho,r,t}$ of functions from class $A_{\rho,r}$ normalized at the origin. We fix ρ and r . The study of the class $A_{\rho,r}$ can be reduced to the study of the class $A_{1,r/\rho}$ which is a subclass of the class E , or to the study of the class $A_{\rho/r,1}$ which is a subclass of the class B . Besides, $A_{1,r/\rho} \rightarrow E$ and $A_{\rho/r,1} \rightarrow B$ as $r \rightarrow \infty$. A majorizing function with real coefficients has been constructed for the classes $A_{1,r,t}$, enabling us using the theory of subordination to obtain the sharp estimates of the moduli of the first two Taylor coefficients for each class $A_{1,r,t}$ and also for the class $A_{1,r}$.

Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, bounded functions, sharp Taylor coefficient modulus estimates

Mathematics Subject Classification: 30C50.

For citation: Stupin D.L. Coefficient estimates for nonvanishing functions. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 73–85. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

Введение

Пусть $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости. Класс функций F , голоморфных в Δ и удовлетворяющих условию $|F(z)| \geq 1$ для всех $z \in \Delta$, обозначим через E .

Коэффициенты ряда Тейлора функции F будем обозначать через $\{F\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. В этих обозначениях разложение F в ряд Тейлора имеет вид:

$$F(z) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \dots$$

Поскольку класс E инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = F(z)$), мы можем без потери общности ограничиться изучением тех функций, для которых $F(0) > 1$. Далее, можно положить $\{F\}_0 := e^t$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через E_t . Ясно также, что для любой функции F класса E_t существует функция $h \in C$ такая, что

$$F(z) = e^{th(z)}, \quad (0.1)$$

где C — известный класс Каратеодори голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$ для $z \in \Delta$. Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами C и E_t .

1. Формула для коэффициентов

Продифференцировав (0.1) по z , имеем:

$$F'(z) = t h'(z) F(z). \quad (1.1)$$

Подставив в формулу (1.1) тейлоровские разложения функций F и h , получим следующие формулы:

$$\{F\}_0 = e^t, \quad \{F\}_n = \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{F\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

связывающие коэффициенты функций F и h .

2. Точные оценки коэффициентов на классах E_t , $t > 0$

Ядро Шварца

$$h^*(z) := \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k$$

является важным представителем класса C . Сформулируем для дальнейших ссылок следующее известное утверждение [1]:

Лемма 2.1. *Если $h \in C$, то $|\{h\}_k| \leq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Только вращения функции h^* в плоскости переменной z удовлетворяют условию $|\{h\}_k| = 2$, $k \in \mathbb{N}$, на классе C .*

Заметим, что класс E_0 состоит только из одной функции $f(z) \equiv 1$, поэтому без ущерба для сути дела можно считать, что $t > 0$. Получим оценки всех тейлоровских коэффициентов функций класса E_t . Справедлива

Теорема 2.1. Пусть $t > 0$, тогда для любой функции $F \in E_t$ имеют место точные неравенства

$$|\{F\}_n| \leq \frac{2t}{n} \sum_{k=1}^n k \{F_t^*\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Равенства имеют место только для вращений функции $F_t^*(z) := e^{th^*(z)}$ в плоскости переменной z .

Доказательство. Покажем сначала, что $\{F_t^*\}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Рассуждаем по индукции. Действительно, из формулы (1.2) следует, что $\{F_t^*\}_1 = 2t\{F_t^*\}_0 > 0$, так как $\{F_t^*\}_0 > 0$. Возьмем произвольный номер n и предположим, что $\{F_t^*\}_k > 0$ при всех $k = 0, \dots, n$, тогда из (1.2) очевидно, что

$$\{F_t^*\}_{n+1} = \frac{2t}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k \{F_t^*\}_{n+1-k} > 0.$$

Стало быть, в силу произвольности n , доказано, что $\{F_t^*\}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Покажем теперь, что $|\{F\}_n| \leq \{F_t^*\}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и равенства достигаются только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z . Снова рассуждаем по индукции. Согласно формуле (1.2) и лемме 2.1

$$|\{F\}_1| = t|\{h\}_1|\{F\}_0 \leq 2t\{F\}_0 = 2te^t,$$

причем по лемме 2.1 равенство здесь достигается только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z . Возьмем произвольный номер n и предположим, что точные оценки (2.1) справедливы для $|\{F\}_k|$ при $k = 0, \dots, n$, и равенство достигается только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z , тогда очевидно, что

$$|\{F\}_{n+1}| \leq \frac{t}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k |\{h\}_k| |\{F\}_{n+1-k}| \leq \frac{t}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k \{h^*\}_k \{F_t^*\}_{n+1-k} = \{F_t^*\}_{n+1}.$$

Из второго неравенства понятно, что равенство здесь достигается только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z . Итак, в силу произвольности n , мы доказали формулу (2.1) и, таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из формулы (2.1) ясно, что сколь бы большое положительное действительное число m мы не взяли, найдется положительное действительное число t такое, что $\{F_t^*\}_n > m$. Отсюда следует, что задача об оценке модулей тейлоровских коэффициентов имеет смысл только на классе E_t при фиксированном t , но не на всем классе E .

3. Формулировка гипотезы Кшижа

Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f , генерируемых по формуле

$$f = \frac{1}{F} \quad (3.1)$$

функциями $F \in E$, обозначим через B . Формула (3.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами B и E .

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [2], что если $f \in B$, то для ее тейлоровских коэффициентов $\{f\}_n$ справедливы неравенства

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается на функциях вида $e^{i\psi} f_1^*(e^{i\varphi} z^n)$, где $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

$$f_t^*(z) := e^{-th^*(z)}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана для первых шести тейлоровских коэффициентов включительно. Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [3]. Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает сложности с 1943 года [1]. Кшиж сформулировал обсуждаемую здесь гипотезу, полагаясь на оценки модулей первых двух коэффициентов. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [4]. Для случая $n = 4$ упомянем доказательство В. Шапеля [5]. Впервые оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [6]. Автор данной статьи в работе [7] при помощи метода Шапеля получил оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e + 0.00116077$, а в работе [8] оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e$ численным методом.

Фиксируем номер n . Существование экстремалей в проблеме Кшижа очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, ставящий каждой функции из B ее тейлоровский коэффициент с номером n , является непрерывным на B .

Фиксируем $t > 0$. Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f , генерируемых по формуле (3.1) из функций $F \in E_t$, обозначим через B_t . Заметим, что B_t является компактным в себе семейством функций.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geq 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t .

4. Еще одна формула для коэффициентов

В классах B_t проблема оценки модулей коэффициентов существенно сложнее, чем в классах E_t . Подтверждением сказанного служит хотя бы тот факт, что за полвека ни одна попытка ее полного решения не увенчалась успехом.

Из формул (0.1) и (3.1) следует, что для любой $f \in B_t$ найдется $h \in C$, такая, что $f(z) = e^{-th(z)}$. Продифференцировав это равенство по z , приходим к формуле, аналогичной (1.2) для класса B_t , $t > 0$:

$$\{f\}_0 = e^{-t}, \quad \{f\}_n = -\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{f\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Видимо, впервые формула, аналогичная (1.2) и (4.1), появилась в статье [9], где в частности получены точные оценки $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$ на классах B_t , $t > 0$. Формула (4.1)

позволяет решить проблему Кшижа, если $\{h\}_k = 0$ или $\{f\}_k = 0$ при некоторых k . В работе [10] с помощью формулы (4.1) обобщены некоторые частные случаи, описанные в более ранних работах. Соответствующие ссылки см. в [10].

5. Функции, ограниченные по модулю сверху и снизу

Формула (4.1) не применима в классах B_t для получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов даже при малых и при больших значениях t . Например, при больших значениях параметра t начальные коэффициенты $\{f_t^*\}_k$, где $k = 1, \dots, n$, функции f_t^* являются знакопеременными (напомним, что $\{h^*\}_k$ положительны); при этом начальные коэффициенты $(-1)^k \{f_t^*\}_k$, $k = 1, \dots, n$, функции $f_t^*(-z)$ являются неотрицательными, а коэффициенты $(-1)^k \{h^*\}_k$ функции $h^*(-z)$ являются знакопеременными. Здесь $n = n(t)$.

С другой стороны, так как в классах E_t такой проблемы нет, то резонно обратить внимание на то, как обстоят дела в подклассах класса E_t , состоящих из функций, ограниченных сверху по модулю. Дело в том, что с точностью до мультипликативной константы каждый ограниченный подкласс класса E_{t_1} является подклассом некоторого класса B_{t_2} , что позволяет легко переносить коэффициентные оценки между упомянутыми подклассами. Например, если $r > 1$ и голоморфная функция F отображает круг Δ в кольцо $K_{1,r} := \{z : 1 < |z| < r\}$, а ноль в e^{t_1} , то $f \in B_{t_2}$, где $f(z) := F(z)/r$, а $t_2 := \ln r - t_1$.

Вообще, можно взять действительные числа ρ и r , удовлетворяющие неравенствам $0 < \rho < r$, и рассмотреть множество $A_{\rho,r}$ всех голоморфных функций, удовлетворяющих неравенствам $\rho \leq |f(z)| \leq r$, $z \in \Delta$. Ясно, что если $f \in A_{\rho,r}$, то $f \in \rho \cdot E$ и $f \in r \cdot B$. Р. Эрмерс в [11, с. 31] получила точные оценки модулей первых двух коэффициентов на классе функций $A_{\rho,r}$, зависящие от ρ и r . Заметим, что $A_{\rho,r}$ является компактным в себе семейством функций.

Пусть $0 < \rho < 1$. Формула (3.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $A_{\rho,1}$ и $A_{1,\frac{1}{\rho}}$, где $f \in A_{\rho,1}$ а $F \in A_{1,\frac{1}{\rho}}$. Формула

$$f = \rho F,$$

где $f \in A_{\rho,1}$, а $F \in A_{1,\frac{1}{\rho}}$, также устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $A_{\rho,1}$ и $A_{1,\frac{1}{\rho}}$.

Пусть $s > 0$. Рассмотрим класс A_{e^{-s},e^s} . Ясно, что формула (3.1) задает автоморфизм на A_{e^{-s},e^s} .

6. Подчиненные функции

Пусть функции F и f голоморфны в Δ . Функция f называется подчиненной в Δ для функции F , если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$, а Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω , таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad z \in \Delta, \quad \omega(0) = 0.$$

Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ . Ясно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$.

Понятие подчинения восходит к Е. Линдедефу [12]. Современная терминология была введена позже Д. И. Литлвудом [13] и В. Рогозинским [1], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [4,5,7,14,15]).

В случае проблемы Кшижа трудность применения этого метода заключается в нерегулярном поведении коэффициентов $\{f_t^*\}_k$ функции f_t^* при промежуточных значениях параметра t . Значения считаются промежуточными, если t принадлежит некоторому интервалу, содержащему число 2. Длина этого интервала зависит от k и увеличивается с ростом k (см. [14]).

Теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $f(z)$, подчиненных функции $F(z)$. Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Имеют место следующие теоремы [1]:

Теорема 6.1. *Если $f \in M_F$, то*

$$|\{f\}_1| \leq |\{F\}_1|, \quad (6.1)$$

причем оценка (6.1) точная, и равенство в неравенстве (6.1) достигается только на вращениях функции $F(z)$ в плоскости переменной z .

Теорема 6.2. *Если $f \in M_F$, то*

$$|\{f\}_2| \leq \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|), \quad (6.2)$$

причем оценка (6.2) точная, и равенство в неравенстве (6.2) достигается только на вращениях функций $F(z)$ или $F(z^2)$ в плоскости переменной z .

7. Подклассы функций, ограниченных по модулю сверху и снизу

Во введении мы рассмотрели класс Каратеодори C . Для каждого $t > 0$ определим класс C_t с помощью формулы $C_t := t \cdot C$. Другими словами, при фиксированном t , класс C_t есть множество функций h с нормировкой $h(0) = t$, отображающих единичный круг Δ в правую полуплоскость Π .

Пусть $s > 0$, а $t \in (0, s)$. Определим класс $C_{s,t}$ как подмножество функций из C_t , отображающих Δ в полосу $\Pi_s := \{v \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} v < s\}$.

Утверждение 7.1. *Функция*

$$h_{s,t}^*(z) := i \frac{s}{\pi} \ln \frac{1 - e^{i \frac{\pi}{s} t} z}{e^{i \frac{\pi}{s} t} - z}$$

является конформным отображением Δ на Π_s с действительными тейлоровскими коэффициентами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение $w = i \frac{\pi}{s} v$ переводит вертикальную полосу Π_s в горизонтальную полосу $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. При этом ось абсцисс переходит в ось ординат, в частности: $0 \mapsto 0$, $t \mapsto i \frac{\pi}{s} t$, $s \mapsto i \pi$.

Отображение $x = e^w$ переводит нашу горизонтальную полосу в верхнюю полуплоскость. При этом ось ординат переходит в верхнюю единичную полуокружность, в частности: $0 \mapsto 1$, $i \frac{\pi}{s} t \mapsto e^{i \frac{\pi}{s} t}$, $i \pi \mapsto -1$.

Отображение $y = \frac{e^{i \frac{\pi}{s} t} + 1}{e^{i \frac{\pi}{s} t} - 1} \frac{x-1}{x+1}$ переводит верхнюю полуплоскость в правую полуплоскость. При этом верхняя единичная полуокружность переходит в ось абсцисс, в частности: $1 \mapsto 0$, $e^{i \frac{\pi}{s} t} \mapsto 1$, $-1 \mapsto \infty$.

Наконец отображение $z = \frac{y-1}{y+1}$ переводит нашу правую полуплоскость в Δ . При этом ось абсцисс переходит в ось абсцисс, в частности: $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto 0$, $\infty \mapsto 1$.

Искомое отображение $v = h_{s,t}^*(z)$ построим как композицию отображений, обратных к упомянутым.

Как видно из проведенных построений, отображение $h_{s,t}^*$ переводит отрезок $[-1, 1]$ в отрезок $[0, s]$, в частности: $-1 \mapsto 0$, $0 \mapsto t$, $1 \mapsto s$. Поскольку $h_{s,t}^*$ переводит $[-1, 1]$ в $[0, s]$, то мы можем рассматривать $h_{s,t}^*$ как действительнзначную функцию действительной переменной, стало быть и ее тейлоровское разложение имеет действительные коэффициенты. $\square$

Заметим, что

$$h_{s,t}^*(z) = t + 2 \frac{s}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{s} t\right)}{k} z^k. \quad (7.1)$$

Пусть $0 < t < s$. Рассмотрим множество $A_{1,e^s,t}$ всех голоморфных функций f класса A_{1,e^s} с нормировкой $f(0) = e^t$. Отметим, что $A_{1,e^s,t}$ является компактным в себе семейством функций. Ясно, что

$$f_{s,t}^*(z) := e^{h_{s,t}^*(z)}$$

является мажорирующей функцией на классе $A_{1,e^s,t}$. Поэтому, согласно [1], для любой функции f из класса $A_{1,e^s,t}$ найдется отображение $\omega \in \Omega_0$ такое, что

$$f(z) = f_{s,t}^*(\omega(z)). \quad (7.2)$$

Поскольку класс A_{1,e^s} инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w , то без уменьшения общности можно ограничиться изучением подкласса функций, для которых $f(0) > 1$. Изучение класса A_{1,e^s} также не уменьшает общности, так как для любых ρ и r таких, что $0 < \rho < r$, имеем, что $A_{\rho,r} = \rho \cdot A_{1,\frac{r}{\rho}}$ ($s = \ln r - \ln \rho > 0$).

Из формулы (7.2) следует, что если $f \in A_{1,e^s}$, то

$$f(z) = e^{h(z)}, \quad h \in C_{s,t}. \quad (7.3)$$

По аналогии с выводом формулы (1.2) из (7.3) получаем, что

$$\{f\}_0 = e^t, \quad \{f\}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{f\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.4)$$

в частности, подставив $\{h_{s,t}^*\}_k$ из формулы (7.1) в формулу (7.4), имеем

$$\{f_{s,t}^*\}_0 = e^t, \quad \{f_{s,t}^*\}_n = \frac{2s}{n\pi} \sum_{k=1}^n \sin\left(k \frac{\pi}{s} t\right) \{f_{s,t}^*\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.5)$$

Вычисления по формуле (7.5) дают

$$f_{s,t}^*(z) = e^t + 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) z + \frac{s}{\pi} e^t \left(2 \frac{s}{\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \sin\left(2 \frac{\pi}{s} t\right)\right) z^2 + \dots \quad (7.6)$$

8. Точная оценка первого коэффициента

Теорема 8.1. Если $s > 0$, а $f \in A_{1,es}$, то

$$|\{f\}_1| \leq 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}}, \quad (8.1)$$

причем оценка (8.1) точная, и равенство в неравенстве (8.1) достигается только на вращениях функции f_{s,t_1}^* в плоскости переменной z , где $t_1 = s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}$.

Более того, если $0 < t < s$ и $f \in A_{1,e^s,t}$, то

$$|\{f\}_1| \leq 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right), \quad (8.2)$$

причем оценка (8.2) точная, и равенство в неравенстве (8.2) достигается только на вращениях функции $f_{s,t}^*$ в плоскости переменной z .

Доказательство. По теореме 6.1 справедливо неравенство $|\{f\}_1| \leq |\{f_{s,t}^*\}_1|$. Теорема 6.1 также содержит описание множества функций f , для которых достигается равенство $|\{f\}_1| = |\{f_{s,t}^*\}_1|$. По формуле (7.6) имеем $\{f_{s,t}^*\}_1 = 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right)$. Заметив, что $\{f_{s,t}^*\}_1 > 0$ при $t \in (0, s)$, мы получим формулу (8.2). Таким образом, второе утверждение нашей теоремы полностью доказано.

Докажем теперь справедливость формулы (8.1). Для этого исследуем функцию

$$g_1(t) := 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right)$$

на максимум на интервале $(0, s)$. Имеем: $g_1(t) \geq 0$, $t \in [0, s]$, $g_1(0) = g_1(s) = 0$ и

$$g_1'(t) = 2 \frac{s}{\pi} e^t \left(\sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \frac{\pi}{s} \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) \right).$$

Уравнение $g_1'(t) = 0$ равносильно уравнению

$$\sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \frac{\pi}{s} \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) = 0. \quad (8.3)$$

Поделив это уравнение на $\cos\left(\frac{\pi}{s} t\right)$, мы получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \frac{\pi}{s} = 0.$$

(Заметим, что $\cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) = 0$ при $t_k = s/2 + sk$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $0 < t_k < s$, то нам подходит только $t_0 = s/2$, которое не является корнем уравнения (8.3)). Решая уравнение (8.3), найдем, что

$$t_k = sk - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются стационарными точками функции g_1 . В нашем случае $0 < t < s$, поэтому

$$t_1 = s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}$$

есть единственное подходящее решение уравнения (8.3) (так как только $0 < t_1 < s$). Далее, t_1 является точкой максимума для функции g_1 , поскольку

$$g_1''(t_1) = -2e^{t_1} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}} < 0.$$

Наконец

$$g_1(t_1) = 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}},$$

поэтому оценка (8.1) справедлива. Случаи равенства в неравенстве (8.1) уже были рассмотрены в первой части доказательства. $\square$

9. Точная оценка второго коэффициента

Имеет место следующий результат [11]:

Теорема 9.1. Если $s > 0$, $t \in (0, s)$, а $f \in A_{1,es}$, то

$$|\{f\}_2| \leq 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}}, \quad (9.1)$$

равенство в неравенстве (9.1) достигается только на вращениях функции $f_{s,t_1}^*(z^2)$ в плоскости переменной z , где $t_1 = s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}$.

Дополним этот результат для класса $A_{1,es}$, получив оценку $|\{f\}_2|$ на его подклассах $A_{1,es,t}$, $0 < t < s$:

Теорема 9.2. Если $f \in A_{1,es,t}$, $0 < t < s$, то

$$|\{f\}_2| \leq \begin{cases} 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right), & 0 < t \leq t_1, \\ 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) \left(\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right)\right), & t_1 < t < s, \end{cases} \quad (9.2)$$

где $t_1 = s - 2 \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}$. При $0 < t < t_1$ равенство в (9.2) достигается только на вращениях функции $f_{s,t}^*(z^2)$ в плоскости переменной z . При $t = t_1$ равенство достигается только на вращениях функций $f_{s,t}^*(z^2)$ и $f_{s,t}^*(z)$. При $t_1 < t < s$ равенство в (9.2) достигается только на вращениях функции $f_{s,t}^*(z)$ в плоскости переменной z .

Доказательство. По теореме 6.2 для доказательства этого утверждения достаточно найти значения t , при которых $|\{f_{s,t}^*\}_1| > |\{f_{s,t}^*\}_2|$.

1. Неравенство $\{f_{s,t}^*\}_1 \geq \{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < s$ равносильно неравенству

$$\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) \leq 1.$$

Соответствующее уравнение имеет следующие решения

$$t_k = \frac{s}{\pi} ((-1)^k - 1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}} + sk, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Условию $0 < t_k < s$ удовлетворяет только решение t_1 . Таким образом, $\{f_{s,t}^*\}_1 > \{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < t_1$, где

$$t_1 = s - 2 \frac{s}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}}.$$

2. Неравенство $\{f_{s,t}^*\}_1 \geq -\{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < s$ равносильно неравенству

$$\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s}t\right) \geq -1.$$

Соответствующее уравнение имеет следующие решения

$$t_k = \frac{s}{\pi}((-1)^{k+1} - 1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}} + sk, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ни одно из которых не удовлетворяет условию $0 < t_k < s$. Итак, $\{f_{s,t}^*\}_1 > -\{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < s$.

Таким образом, мы показали, что $|\{f_{s,t}^*\}_1| > |\{f_{s,t}^*\}_2|$ при $0 < t < t_1$, то есть формула (9.2) справедлива. $\square$

Заключение

В этой статье мы рассмотрели классы E и B , а также их подклассы, которые генерируются из классов $A_{\rho,r}$, $0 < \rho < r < +\infty$. Интересно, что $A_{\rho,1} \rightarrow B$ при $\rho \rightarrow 0$, а $A_{1,r} \rightarrow E$ при $r \rightarrow \infty$. Как было показано выше, формулы типа (1.2) не могут быть использованы даже на классах $A_{1,r} \subset E$ для получения точных оценок коэффициентов при $n \geq 2$. С другой стороны, классы $A_{\rho,r}$ имеют больше алгебраических свойств, чем, например, класс B , что можно использовать для изучения класса B .

Кшиж выдвинул свою гипотезу [2], располагая только оценками модулей первых двух коэффициентов на классе B , поэтому (имея теоремы 8.1 и 9.1) мы можем выдвинуть следующее предположение: если $f \in A_{1,e^s}$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9.3)$$

причем равенство в неравенстве (9.3) достигается только на вращениях функции $f_{s,t_1}^*(z^n)$ в плоскостях переменных z и w ($w = f(z)$), где $t_1 = s - \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}$.

Заметим, что при любом $s > 0$ множество $e^{-s}A_{1,e^s}$ является подклассом класса B , и оценка (9.3) для класса $e^{-s}A_{1,e^s}$ при $s \rightarrow \infty$ переходит в оценку

$$|\{f\}_n| \leq \frac{2}{e},$$

то есть высказанное только что предположение в пределе дает гипотезу Кшижа. Действительно, при $s \rightarrow \infty$ имеем $e^{-s}A_{1,e^s} \rightarrow B$, а

$$2 \frac{e^{-\frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}} \rightarrow \frac{2}{e}.$$

Фиксируем $t > 0$. Так как при $s > t$ множество $e^{-s}A_{1,e^s,s-t} \subset B_t$ и $e^{-s}A_{1,e^s,s-t} \rightarrow B_t$ при $s \rightarrow \infty$, то после перехода в теореме 8.1 к пределу при $s \rightarrow \infty$ получим следующий известный результат [4, 9]:

Теорема 9.3. *Если $f \in B$, то $|\{f\}_1| \leq 2/e$, причем равенство достигается только на вращениях функции f_1^* в плоскости переменной z . Более того, если $f \in B_t$, то $|\{f\}_1| \leq 2te^{-t}$, причем равенство достигается только на вращениях функции f_t^* в плоскости переменной z .*

Аналогично, после перехода в теоремах 9.1 и 9.2 к пределу при $s \rightarrow \infty$ получим еще один известный результат [4, 9]:

Теорема 9.4. *Если $f \in B$, то $|\{f\}_2| \leq 2/e$, причем равенство достигается только на вращениях функции $f_1^*(z^2)$ в плоскости переменной z . Если $f \in B_t$, то*

$$|\{f\}_2| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 2, \\ t - 1, & 2 < t < s. \end{cases}$$

При $0 < t < 2$ равенство достигается только на вращениях функции $f_t^*(z^2)$ в плоскости переменной z . При $t = 2$ равенство достигается только на вращениях функций $f_t^*(z^2)$ и $f_t^*(z)$. При $t > 2$ равенство достигается только на вращениях функции $f_t^*(z)$ в плоскости переменной z .

Фиксируем $t > 0$, $s > t$ и $f \in A_{1,e^s,t}$. По формуле (7.4) при $n = 1$ имеем

$$|\{f\}_1| \leq \{h_{s,t}^*\}_1 \cdot \{f_{s,t}^*\}_0 = 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right),$$

причем эта оценка точная, так как равенство в ней достигается, например, при $f = f_{s,t}^*$ (сравните с оценкой (8.2)). Уже при $n \geq 2$ из формулы (7.4) при помощи неравенства треугольника невозможно получить точную оценку для $|\{f\}_n|$. Тем не менее, мы можем получить грубую оценку:

$$|\{f\}_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{f\}_{n-k} \right| \leq \frac{2s}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) \sum_{k=0}^{n-1} k m_k, \quad (9.4)$$

где

$$m_0 := \{f_{s,t}^*\}_0, \quad m_1 := \{f_{s,t}^*\}_1, \quad m_k := \max_{f \in A_{1,e^s,t}} |\{f\}_k|, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что если $h \in C_{s,t}$, то

$$|\{h\}_k| \leq \{h_{s,t}^*\}_1 = 2 \frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

но в отличие от класса C в $C_{s,t}$ нет функции, все коэффициенты которой равны $\{h_{s,t}^*\}_1$.

Фиксируем $t > 0$. Поскольку при любом $s > t$ множество $A_{1,e^s,t} \subset E_t$ и $A_{1,e^s,t} \rightarrow E_t$ при $s \rightarrow \infty$, то после перехода в неравенстве (9.4) к пределу при $s \rightarrow \infty$ получим теорему 2.1.

References

- [1] W. Rogosinski, "On the coefficients of subordinate functions", *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s2-48**, 1945, 48–82.
- [2] J. G. Krzyz, "Coefficient problem for bounded nonvanishing functions", *Ann. Polon. Math.*, **70** (1968), 314.
- [3] V. I. Levin, "Lösing der Aufgabe 163", *Jahresber. DM*, **44:2** (1934), 80–81.
- [4] J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman, "A coefficient problem for bounded nonvanishing functions", *J.d'Analyse Mathematique*, **31** (1977), 169–190.
- [5] W. Szapiel, "A new approach to the Krzyz conjecture", *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A.*, **48** (1994), 169–192.

- [6] N. Samaris, “A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient”, *Compl. Var. Theory and Appl.*, **48**:9 (2003), 753–766.
- [7] Д. Л. Ступин, “Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчиненных функций”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, 2024, № 2, 71–84. [D. L. Stupin, “One method of estimation of moduli of taylor coefficients of subordinated functions”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, № 2, 71–84 (In Russian)].
- [8] Д. Л. Ступин, “Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:145 (2024), 98–120. [D. L. Stupin, “A new method of estimation of moduli of initial Taylor coefficients on the class of bounded non-vanishing functions”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 98–120 (In Russian)].
- [9] И. М. Гальперин, “Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций”, *УМН*, **20**:1(121) (1965), 197–202. [I. M. Gal’perin, “Some estimates for functions bounded in the unit circle”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **20**:1(121) (1965), 197–202 (In Russian)].
- [10] M. J. Martin, E. T. Sawyer, I. Uriarte-Tuero, D. Vukotic, “The Krzyz conjecture revisited”, *Advances in Mathematics*, **273** (2015), 716–745.
- [11] R. Ermers, *Coefficient Estimates for Bounded Nonvanishing Functions*, Wibro Dissertatiedrukkerij, Helmond, 1990.
- [12] E. Lindelöf, “Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel”, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**:7 (1909), 1–35.
- [13] J. E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1947.
- [14] R. Peretz, “Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions”, *Compl. Var.*, **17**:3–4 (1992), 213–222.
- [15] D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz’s problem”, 2011, arXiv: [abs/1104.3984](https://arxiv.org/abs/1104.3984).

Информация об авторе

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий, Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 20.10.2025 г.
Поступила после рецензирования 04.02.2026 г.
Принята к публикации 12.03.2026 г.

Information about the author

Denis L. Stupin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Fundamental Mathematics and Digital Technologies Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

There is no conflict of interests.

Received 20.10.2025
Reviewed 04.02.2026
Accepted for press 12.03.2026