

ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК
РОССИЙСКИХ
УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN
UNIVERSITIES
REPORTS
MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 28
№ 141
2023

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 28, № 141,
2023

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) (категория K1)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	3
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба</i>	О взаимоотношении движений динамических систем в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве с инвариантной мерой
	5
<i>М.В. Булатов, Т.С. Индуцкая</i>	Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса с производной Римана–Лиувилля
	13
<i>М.С. Волдеаб</i>	Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций
	26
<i>Л.И. Ивановский</i>	Динамические свойства одной импульсной задачи Коши
	39
<i>А.В. Поносов</i>	Существование и единственность решений стохастических дробных дифференциальных уравнений в нескольких временных шкалах
	51
<i>А.Х. Сташ</i>	О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем
	60
<i>В.И. Фомин</i>	Об операторных функциях операторного переменного
	68
<i>Т. Раин</i>	Описание программного комплекса для моделирования робота-манипулятора
	90

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., доц. М.В. Балашов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), д. ф.-м. н., проф. А.Г. Кушнер (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Е.Б. Ланеев (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), д. ф.-м. н., проф. В.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. М.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редакторы: М.И. Филатова, М.А. Сенина
Редакторы английских текстов: В.В. Ключихин, М.А. Бударин
Технический редактор Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь М.В. Борзова
Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28, № 141. 96 с. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-141>

Подписано в печать 15.03.2023. Дата выхода в свет 24.03.2023

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 12,0. Усл. печ. л. 11,2. Тираж 1000 экз. Заказ № 2347. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru



Материалы журнала доступны по лицензии [Creative Commons Attribution \(«Атрибуция»\) 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) Всемирная

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2023

© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2023

При перепечатке, при цитировании материалов, в том числе в электронных СМИ, ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 28, no. 141,
2023**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the "List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialty 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences) (category K1)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, EBSCO, Scientific Electronic Library "eLIBRARY.RU", Electronic Library "CyberLeninka", Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>A.P. Afanas'ev, S.M. Dzyuba</i>	On the interrelation of motions of dynamical systems in separable locally compact metric space with invariant measure	5
<i>M.V. Bulatov, T.S. Indutskaya</i>	Numerical solution of differential-algebraic equations of arbitrary index with Riemann–Liouville derivative	13
<i>M.S. Woldeab</i>	Properties of the average time benefit for probabilistic models of exploited populations	26
<i>L.I. Ivanovsky</i>	Dynamic properties of one impulse Cauchy problem	39
<i>A. Ponosov</i>	Existence and uniqueness of solutions to stochastic fractional differential equations in multiple time scales	51
<i>A.Kh. Stash</i>	On the continuum spectra of the exponents of linear homogeneous differential systems	60
<i>V.I. Fomin</i>	About operator functions of an operator variable	68
<i>T. Rain</i>	Program complex for modelling a manipulating robot	90

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(OGPH 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenko, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Assoc. Prof. Balashov, Maxim V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. Kushner, Alexei G. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Laneev, Evgenii B. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Ponosov, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Sumin, Vladimir I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Sumin, Mikhail I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФC77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372

Editors: M.I. Filatova, M.A. Senina
English texts editors: V.V. Klochikhin, M.A. Budarin
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:

Russian Universities Reports. Mathematics. 2023. Vol. 28, no. 141. 96 p. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2022-28-141>

Signed for printing 15.03.2023. Release date 24.03.2023
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 12,0. Conv. pr. sheet 11,2. Copies printed 1000. Order no. 2347. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru



Content of the journal is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2023
© The journal “Russian Universities Reports. Mathematics”, 2023
While reprinting, citing materials, including in electronic media, a reference to the journal is required.
The author is responsible for the contents of publications

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Афанасьев А.П., Дзюба С.М., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12

УДК 517.938



О взаимоотношении движений динамических систем в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве с инвариантной мерой

Александр Петрович АФАНАСЬЕВ^{1,2}, Сергей Михайлович ДЗЮБА³

¹ ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича» Российской академии наук
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

² ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

³ ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет»
170026, Российская Федерация, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Аннотация. В настоящей работе исследуются взаимоотношения рекуррентных и уходящих движений динамических систем. Под уходящим движением понимается движение, α - и ω -предельные множества которого или пусты, или не компактны. Показано, что в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве Σ с инвариантной мерой Каратеодори почти все точки лежат на траекториях движений, которые являются или рекуррентными, или уходящими, т. е. в пространстве Σ множество точек Γ , лежащих на траекториях неуходящих и нерекуррентных движений, имеет меру нуль. Более того, любое движение, расположенное в Γ , является как положительно, так и отрицательно асимптотическим по отношению к соответствующим компактным минимальным множествам. Доказательство данного утверждения существенным образом опирается на классические теоремы о возвращении Пуанкаре–Каратеодори и Хопфа. Из этого доказательства и теоремы Хопфа следует, что в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве возможно существование нерекуррентных устойчивых по Пуассону движений, но все эти движения с необходимостью должны быть уходящими. В то же самое время, в компактном пространстве Σ любое устойчивое по Пуассону движение является рекуррентным.

Ключевые слова: динамические системы, сепарабельное локально компактное метрическое пространство с инвариантной мерой, взаимоотношение движений

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00317, <https://rscf.ru/project/22-11-00317/>).

Для цитирования: Афанасьев А.П., Дзюба С.М. О взаимоотношении движений динамических систем в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве с инвариантной мерой // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 5–12. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12.

SCIENTIFIC ARTICLES

© A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12



On the interrelation of motions of dynamical systems in separable locally compact metric space with invariant measure

Aleksandr P. AFANAS'EV^{1,2}, Sergei M. DZYUBA³¹ Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences

19 Bolshoy Karetny per., Moscow 127051, Russian Federation

² Lomonosov Moscow State University

GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation

³ Tver State Technical University

22 Afanasiya Nikitina nab., Tver 170026, Russian Federation

Abstract. In this paper, we study the interrelation between recurrent and outgoing motions of dynamical systems. An outgoing motion is a motion whose α - and ω -limit sets are either empty or non-compact. It is shown that in a separable locally compact metric space Σ with invariant Carathéodory measure, almost all points lie on trajectories of motions that are either recurrent or outgoing, i. e. in the space Σ , the set of points Γ lying on the trajectories of non-outgoing and non-recurrent motions has measure zero. Moreover, any motion located in Γ is both positively and negatively asymptotic with respect to the corresponding compact minimal sets. The proof of this assertion essentially relies on the classical Poincaré–Carathéodory and Hopf recurrence theorems. From this proof and Hopf's theorem, it follows that in a separable locally compact metric space, there can exist non-recurrent Poisson-stable motions, but all these motions must necessarily be outgoing. At the same time, in the compact space Σ any Poisson-stable motion is recurrent.

Keywords: dynamical systems, separable locally compact metric space with invariant measure, interrelation of motions

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00317, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00317/>).

Mathematics Subject Classification: 37B20.

For citation: Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. On the interrelation of motions of dynamical systems in separable locally compact metric space with invariant measure. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 5–12. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-5-12. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Изложенные еще в начале прошлого века Дж. Биркгофом в книге [1] основы общей теории динамических систем по сей день в значительной степени определяют развитие нелинейной динамики и ее приложений. Конечной целью общей теории динамических систем согласно [1, с. 194] является «качественное определение всех возможных типов движений и взаимоотношений между этими движениями».

Важнейшим из движений, как известно, является рекуррентное. Дж. Биркгоф фактически показал, что в абстрактном метрическом пространстве Σ из существования движения $f(t, p)$, расположенного в компактном множестве $E \subset \Sigma$, следует существование рекуррентного движения $f(t, q)$, расположенного в компактном минимальном множестве $M \subset E$. При этом каждое непустое компактное инвариантное множество M_1 содержит компактное минимальное множество M (см., например, [2, с. 401]).

Хорошо известно, что любое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону (см., например, [2, с. 402]). Дж. Биркгоф допускал, что существуют устойчивые по Пуассону нереккуррентные движения, т. е. устойчивые по Пуассону движения, которые не расположены в компактном минимальном множестве. Однако, ни примеров, ни критериев существования таких движений он не привел (см. [1, гл. VII]). Более того, до совсем недавнего времени эта ситуация оставалась неизменной (см., например, [3, с. 1–4]).

Заметим теперь, что в работе [4] показано, что в компактном пространстве Σ устойчивость по Пуассону является лишь характеристическим свойством рекуррентности движений. Это позволило в работе [5] установить полное взаимоотношение движений в абстрактном метрическом пространстве Σ (см. теорему 1.1 ниже). Целью настоящей работы является приложение теоремы 1.1 к изучению движений в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве с инвариантной (конечной положительной или бесконечной) мерой Каратеодори. Основным результатом составляет теорема 3.1, в которой утверждается, что в таком пространстве почти все точки лежат на траекториях движений, которые являются или рекуррентными, или уходящими. Помимо теоремы 1.1, теорема 3.1 опирается также на классические теоремы о возвращении Пуанкаре–Каратеодори и Хопфа (см., например, [2, с. 471, 479]). Здесь необходимо отметить, что предположение о локальной компактности пространства Σ , используемое при доказательстве теоремы 3.1, не является слишком обязывающим (см., например, [6, с. 490]).

1. Произвольные и рекуррентные движения

Пусть Σ — метрическое пространство с метрикой d и $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось. Рассмотрим отображение $f: \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow \Sigma$, определенное соотношением

$$f(t, p) = g^t p.$$

При этом будем считать, что:

- (а) отображение f непрерывно по совокупности переменных t, p на множестве $\mathbb{R} \times \Sigma$;
- (б) для всех $p \in \Sigma$

$$g^0 p = p;$$

- (с) для всех $t, s \in \mathbb{R}$

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Тогда, следуя [2, с. 347], будем говорить, что группа преобразований g^t — *динамическая система*, а для любого $p \in \Sigma$ функция $t \rightarrow f(t, p)$ — *движение*.

Приведем определение рекуррентного движения, которое прочно устоялось в современной литературе (см., например, [2, с. 402]).

О п р е д е л е н и е 1.1. Движение $f(t, p)$ называется *рекуррентным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $T_\varepsilon > 0$, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ дуга

$$K_{\tau, T_\varepsilon}(p) = \{f(t, p) : t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]\}$$

траектории

$$K(p) = \{f(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$$

этого движения аппроксимирует всю траекторию $K(p)$ с точностью ε , т. е. при заданном ε и соответствующим ему T_ε для всех $s \in \mathbb{R}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ найдется такое $t \in [\tau, \tau + T_\varepsilon]$, что

$$d(f(s, p), f(t, p)) < \varepsilon.$$

Напомним, что множество $M \subset \Sigma$ называется *минимальным*, если оно непусто, замкнуто, инвариантно и не содержит ни одного собственного подмножества, обладающего тремя указанными выше свойствами (см., например, [2, с. 400]). Кроме того, заметим, что в полном пространстве Σ замыкание $\bar{K}(p)$ траектории $K(p)$ рекуррентного движения $f(t, p)$ является компактным минимальным множеством M , а каждое движение $f(t, p)$, расположенное в компактном минимальном множестве M , рекуррентно (см. [2, с. 404, 402]).

Чтобы дополнить эти фундаментальные результаты теоремой о взаимоотношении движений, введем следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1.2. Движение $f(t, p)$ называется *положительно асимптотическим* по отношению к своему ω -предельному множеству Ω , если $p \notin \Omega$ (см., например, [2, с. 363]). Аналогичным образом, движение $f(t, p)$ называется *отрицательно асимптотическим* по отношению к своему α -предельному множеству A , если $p \notin A$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Будем говорить, что $f(t, p)$ — *положительно уходящее движение*, если его ω -предельное множество или пусто, или не компактно. Аналогичным образом, будем говорить, что $f(t, p)$ — *отрицательно уходящее движение*, если его α -предельное множество или пусто, или не компактно. Движение $f(t, p)$, одновременно положительно и отрицательно уходящее, будем называть (просто) *уходящим*.

Принимая во внимание определения 1.2 и 1.3, заключаем, что взаимоотношение движений в пространстве Σ устанавливает следующая теорема (см. [5]).

Теорема 1.1. Любое *нерекуррентное* движение $f(t, p)$, расположенное в метрическом пространстве Σ , является или *положительно (отрицательно) уходящим*, или *положительно (отрицательно) асимптотическим* по отношению к компактному минимальному множеству M^+ (M^-), которое является ω - (α -) предельным множеством этого движения.

Здесь мы приводим формулировку теоремы 1.1, а не ограничиваемся ссылкой на работу [5], в которой данная теорема получена, потому что это утверждение во многом определяет все последующие построения.

З а м е ч а н и е 1.1. Согласно теореме 1.1 любая попытка построения предельного множества типа гомоклинического (или гетероклинического) аттрактора динамической системы g^t лишена какого-либо смысла. В работе [7] приведен простейший пример, который объясняет причину возникающей здесь ошибки для системы g^t , заданной на действительной плоскости $\mathbb{R}^2$.

2. Мера Каратеодори

В дальнейшем в соответствии с [2, гл. VI] будут изучаться движения системы g^t , заданной в пространстве с инвариантной мерой Каратеодори. Поэтому, во избежание возможных разночтений, приведем определение и основные свойства этой меры.

Будем говорить, что в метрическом пространстве Σ введена *мера Каратеодори* μ , т. е. мера, определяемая следующими аксиомами (см., например, [2, с. 456]):

- (α) для каждого множества $A \subset \Sigma$ $\mu A \geq 0$, причем существуют множества положительной конечной меры, а мера пустого множества равна нулю;
- (β) если $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$;
- (γ) для любой счетной последовательности множеств справедливо неравенство

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mu A_k;$$

- (δ) если для $A, B \subset \Sigma$ выполнено $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0$, то

$$\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество $A \subset \Sigma$ называется *измеримым*, если для каждого множества E , удовлетворяющего условию $\mu E < +\infty$, имеет место равенство

$$\mu E = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus E \cap A).$$

Приведем основные свойства измеримых множеств.

- (i) Все открытые и замкнутые множества измеримы.
- (ii) Если множество A измеримо, то измеримо также и множество $B = \Sigma \setminus A$.
- (iii) Пересечение любой конечной или счетной системы измеримых множеств измеримо.
- (iv) Объединение любой конечной или счетной системы измеримых множеств измеримо.

Легко видеть, что все множества, измеримые по Борелю, измеримы по Каратеодори. Поэтому, чтобы связать меру Каратеодори с мерой Бореля, вводится следующая дополнительная к аксиомам (α)–(δ) аксиома:

(ε) мера каждого измеримого множества $A \subset \Sigma$ равна точной нижней грани мер Борелевских множеств, содержащих A .

Таким образом, во многих важных случаях мера Каратеодори может быть определена как обобщенная внешняя мера Лебега (со всеми вытекающими отсюда следствиями).

3. Взаимоотношение движений в пространстве с инвариантной мерой

Везде в дальнейшем будем считать, что Σ — сепарабельное локально компактное метрическое пространство.

Рассмотрим динамическую систему g^t и предположим, что в Σ для g^t определена инвариантная мера Каратеодори μ . Другими словами, будем считать, что если A — произвольное измеримое множество, то для всех $t \in \mathbb{R}$

$$\mu(g^t A) = \mu A.$$

Кроме того, предположим, что $\mu\Sigma \in (0, +\infty]$, а мера μF любого компактного множества $F \subset \Sigma$ конечна. Тогда взаимоотношение движений в пространстве Σ с инвариантной мерой Каратеодори μ устанавливает следующая

Теорема 3.1. *В пространстве Σ почти все точки лежат на траекториях движений, которые являются или рекуррентными, или уходящими, т. е. в пространстве Σ множество точек Γ , лежащих на траекториях неуходящих и нерекуррентных движений, имеет меру нуль. Более того, любое движение $f(t, p)$, расположенное в множестве Γ , является как положительно, так и отрицательно асимптотическим по отношению к компактным минимальным множествам $M^+ \subset \Sigma \setminus \Gamma$ и $M^- \subset \Sigma \setminus \Gamma$, которые являются соответственно ω - и α -предельными множествами этого движения.*

Доказательство. Так как Σ — сепарабельное локально компактное метрическое пространство, то существует такая счетная последовательность компактных множеств

$$\Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots \subset \Sigma_j \subset \dots, \quad (3.1)$$

что Σ может быть представлено в виде

$$\Sigma = \bigcup_{j \geq 1} \Sigma_j, \quad (3.2)$$

причем так, что каждая точка $p \in \Sigma$ является внутренней точкой одного из множеств Σ_j (см., например, [8, с. 372]).

Зафиксируем некоторую точку $p \in \Sigma_j$. Тогда, если движение $f(t, p)$ не является положительно или отрицательно уходящим, то в силу (3.1) и (3.2) без какой-либо потери общности можем считать, что $f(t, p)$ расположено в Σ_j .

Поскольку множество Σ_j компактно, то согласно теореме 1.1 возможны следующие два взаимоисключающие случая.

(А) Движение $f(t, p)$ является рекуррентным. В этом случае замыкание $\bar{K}$ траектории K данного движения представляет собой компактное минимальное множество.

(В) Движение $f(t, p)$ не является рекуррентным. В этом случае движение $f(t, p)$ представляет собой движение, асимптотическое по отношению к своим ω - и α -предельным множествам $M^+ \subset \Sigma \setminus \Gamma$ и $M^- \subset \Sigma \setminus \Gamma$. Более того, любое из множеств M^+ и M^- является компактным минимальным множеством.

В дополнение к (А) и (В) заметим, что в силу теоремы Хопфа (см. [2, с. 479]) множество Γ измеримо и его мера равна нулю (в [2] теорема Хопфа доказана для случая $\mu\Sigma = +\infty$, однако, несложный анализ доказательства показывает, что эта теорема справедлива и в случае $\mu\Sigma \in (0, +\infty)$, см. также [2, с. 471]). При этом почти все положительно (отрицательно) уходящие движения являются или устойчивыми по Пуассону, или строго уходящими (см. п. 4.). Значит, все эти движения являются просто уходящими. $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Как известно, во многих важных практических ситуациях мера Каратеодори μ обладает следующим свойством: если E — произвольное непустое открытое множество, то $\mu E > 0$. В этом случае, очевидно, множество $\Sigma \setminus \Gamma$ всюду плотно в пространстве Σ .

4. Устойчивость по Пуассону

В дополнение к теореме 3.1 обсудим проблему существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений в сепарабельном локально компактном метрическом пространстве.

Как и выше, обозначим ω -предельное множество движения $f(t, p)$ через Ω , а его α -предельное множество через A . Напомним, что движение $f(t, p)$ называется *положительно устойчивым по Пуассону*, если $p \in \Omega$ (см. [2, с. 364]). Аналогичным образом, движение $f(t, p)$ называется *отрицательно устойчивым по Пуассону*, если $p \in A$. Если же $p \in \Omega$ и $p \in A$, то движение $f(t, p)$ называется (просто) *устойчивым по Пуассону*.

В развитие определения 1.3 будем говорить, что $f(t, p)$ — *строго положительно уходящее движение*, если его ω -предельное множество пусто. Аналогичным образом, будем говорить, что $f(t, p)$ — *строго отрицательно уходящее движение*, если его α -предельное множество пусто. Движение $f(t, p)$, одновременно строго положительно и строго отрицательно уходящее, будем называть (просто) *строго уходящим*.

Как уже было отмечено, каждое рекуррентное движение устойчиво по Пуассону. Теорема 1.1 позволяет уточнить это утверждение, поскольку из нее сразу следует, что в компактном метрическом пространстве Σ любое положительно (отрицательно) устойчивое по Пуассону движение $f(t, p)$ является рекуррентным. Однако, в локально компактном пространстве Σ проблема существования устойчивых по Пуассону нерекуррентных движений остается открытой.

В самом деле, согласно теореме Хопфа в условиях теоремы 3.1 все точки множества $\Sigma \setminus \Gamma$ лежат на траекториях либо устойчивых по Пуассону, либо строго уходящих движений. Очевидно, что каждое строго уходящее движение является уходящим, но не обратнo. Следовательно, существование устойчивых по Пуассону уходящих (но не строго) движений не исключается, т. е. не исключается существование устойчивых по Пуассону уходящих нерекуррентных движений.

References

- [1] Дж. Биркгоф, *Динамические системы*, Изд. дом «Удмуртский университет», Ижевск, 1999. [G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, Udm. University Publ., Izhevsk, 1999 (In Russian)].
- [2] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, УРСС, М., 2004. [V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, URSS Publ., Moscow, 2004 (In Russian)].
- [3] D. N. Cheban, *Asymptotically Almost Periodic Solutions of Differential Equations*, HPC Publ., New York, 2009.
- [4] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О новых свойствах рекуррентных движений и минимальных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 5–14. [A. P. Afanas'ev, S. M. Dzyuba, “About new properties of recurrent motions and minimal sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 5–14 (In Russian)].

- [5] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “О взаимоотношении движений динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:138 (2022), 136–142. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “On the interrelation of motions of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:138 (2022), 136–142 (In Russian)].
- [6] Л. Шварц, *Анализ*. Т. I, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analysis*. V. I, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].
- [7] А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба, “Новые свойства рекуррентных движений и предельных множеств динамических систем”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 5–15. [A. P. Afanas’ev, S. M. Dzyuba, “New properties of recurrent motions and limit sets of dynamical systems”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 5–15 (In Russian)].
- [8] П. С. Александров, *Введение в общую теорию множеств и функций*, ОГИЗ–Гостехиздат, М., 1948. [P. S. Alexandroff, *Introduction to the general theory of sets and functions*, OGIZ–Gostekhizdat Publ., Moscow, 1948 (In Russian)].

Информация об авторах

Афанасьев Александр Петрович, доктор физико-математических наук, заведующий центром распределенных вычислений, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук; профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4171-5745>

Дзюба Сергей Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информационных систем. Тверской государственный технический университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Дзюба Сергей Михайлович
 E-mail: sdzyuba@mail.ru

Поступила в редакцию 19.09.2022 г.
 Поступила после рецензирования 20.12.2022 г.
 Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the authors

Aleksandr P. Afanas’ev, Doctor of Physics and Mathematics, the Head of the Center for Distributed Computing, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences; Professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: apa@iitp.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4171-5745>

Sergei M. Dzyuba, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Information Systems Department. Tver State Technical University, Tver, Russian Federation. E-mail: sdzyuba@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2981-8549>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Sergei M. Dzyuba
 E-mail: sdzyuba@mail.ru

Received 19.09.2022
 Reviewed 20.12.2022
 Accepted for press 10.03.2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Булатов М.В., Индуцкая Т.С., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25

УДК 519.622



Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса с производной Римана–Лиувилля

Михаил Валерьянович БУЛАТОВ, Татьяна Сергеевна ИНДУЦКАЯ

ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова

Сибирского отделения Российской академии наук»

664033, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134

Аннотация. В статье исследованы линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$. В отличие от ранее известных результатов, авторы рассматривают случай, когда матрица, стоящая перед операцией дробного дифференцирования, является вырожденной. Задачи в такой постановке называются дифференциально-алгебраическими уравнениями дробного порядка. Подчеркнуты принципиальные отличия таких систем от классических задач дробного дифференцирования и интегрирования, а именно, они могут иметь бесконечное множество решений, или решение исходной задачи зависит от высокой дробной производной правой части. Приведены соответствующие примеры. Авторы переходят к иной, эквивалентной постановке задачи, а именно, переписывают ее в виде системы линейных интегральных уравнений типа Абеля (со слабой особенностью). Такой прием позволяет применять для исследования на предмет существования и единственности решения исходной задачи аппарат регулярных матричных пучков. Используя данный результат, авторы приводят достаточные условия существования единственного решения рассматриваемого класса задач. Далее, предложен алгоритм численного решения таких уравнений. Этот метод основан на методе интегрирования произведений и квадратурной формуле правых прямоугольников. Приведены расчеты и графики погрешностей предложенного метода для различных показателей дробного дифференцирования и различных индексов исходных матричных пучков.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, дробная производная Римана–Лиувилля, индекс матричного пучка, интегро-алгебраические уравнения типа Абеля, метод интегрирования произведений

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00173, <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>).

Для цитирования: Булатов М.В., Индуцкая Т.С. Численное решение дифференциально-алгебраических уравнений произвольного индекса с производной Римана–Лиувилля // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 13–25.
DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25.

SCIENTIFIC ARTICLES

© M. V. Bulatov, T. S. Indutskaya, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25



Numerical solution of differential-algebraic equations of arbitrary index with Riemann–Liouville derivative

Mihail V. BULATOV, Tatiana S. INDUTSKAYA

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the RAS

134 Lermontova St., Irkutsk 664033, Russian Federation

Abstract. In the article, linear systems of ordinary differential equations of fractional order $\alpha \in (0, 1)$ are investigated. In contrast to previously known results, the authors consider the case when the matrix before the fractional differentiation operation is degenerate. Problems in such a formulation are called differential-algebraic equations of fractional order. The fundamental differences of such systems from the classical problems of fractional differentiation and integration are emphasized, namely, the systems under consideration can have an infinite number of solutions, or a solution of the original problem depends on the high fractional derivative of the right-hand side. Corresponding examples are given. The authors pass to a different, equivalent formulation of the problem, namely, they rewrite it in the form of a system of linear integral equations of the Abel type (with a weak singularity). This technique allows one to use the apparatus of regular matrix bundles to investigate the existence and uniqueness of the original problem. Using this result, the authors give sufficient conditions for the existence of a unique solution to the class of problems under consideration. Further, an algorithm for the numerical solution of such equations is proposed. The method is based on the product integration method and the quadrature formula of right rectangles. Calculations and graphs of the errors of the proposed method for various fractional differentiation exponents and various indices of the initial matrix bundles are presented.

Keywords: differential-algebraic equations, Riemann–Liouville fractional derivative, matrix bundle index, Abel-type integro-algebraic equations, product integration method

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00173, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00173/>).

Mathematics Subject Classification: 65L80.

For citation: Bulatov M.V., Indutskaya T.S. Numerical solution of differential-algebraic equations of arbitrary index with Riemann–Liouville derivative. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 13–25. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-13-25. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Математические модели, использующие аппарат дробного дифференцирования, описывают различные процессы в гидродинамике [1, гл. 3], наследственной механике сплошных сред [1, § 16.3], применяются при моделировании тепломассопереноса [2, гл. 14], турбулентности [2, гл. 18], полупроводников [2, гл. 16] и др. Для описания соответствующих процессов и явлений используют дифференциальные уравнения дробного порядка. Систематизации исследований в этой области посвящено множество работ, следует отметить монографии [3, § 2], [4, § 2.1], использовавшиеся при подготовке данной статьи, в которых представлена обширная библиография по данной тематике.

Данная работа посвящена исследованию и созданию численного метода решения системы дифференциальных уравнений вида

$$D^\alpha (Au(t)) + Bu(t) = f(t), \quad t \in [0, 1],$$

здесь D^α — оператор дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha < 1$, A, B — заданные $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ и $u(t)$ — заданная и искомая n -мерные функции. В настоящей статье рассмотрим случай, когда ненулевая матрица A удовлетворяет условию

$$\det A = 0.$$

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей перед главной частью принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). По аналогии, уравнения, содержащие дробную производную, будем называть ДАУ дробного порядка.

В настоящее время для классических линейных ДАУ первого порядка и отдельных классов ДАУ второго порядка разработаны и обоснованы численные методы. В монографии Ю. Е. Бояринцева 1980 г. на основе аппарата обобщенных обратных матриц [5, гл. 1] исследованы различные постановки ДАУ первого порядка и их решения, получены результаты о управляемости и наблюдаемости таких уравнений [5, гл. 7]. В монографии [6] приведены одни их ключевых результатов качественной теории, в том числе, понятие левого регуляризирующего оператора (см. [6, гл. 3]), освещены проблемы численного решения ДАУ (см. [6, гл. 5]). Что касается ДАУ второго порядка, то отметим работу [7], где для их исследования используется техника проекторов.

Перед изложением основного материала приведем известные результаты, которые будут использованы в дальнейшем.

1. Основные понятия

В этом пункте изложены основные понятия теории дробного интегро-дифференцирования, необходимые для изложения.

О п р е д е л е н и е 1.1. (см. [3, с. 42]) Пусть функция $f(t)$ такова, что $\int_0^T |f(s)| ds < \infty$.

Интеграл

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \in [0, T],$$

при $\alpha > 0$ называют левосторонним интегралом Римана–Лиувилля дробного порядка α (здесь $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ — гамма-функция).

Утверждение 1.1. Пусть $f(t) \in C_{[0,T]}$, тогда при любом $\alpha > 0$ выполняется $I^\alpha f(t) \in C_{[0,T]}$.

Доказательство. Так как $f(t) \in C_{[0,T]}$, существует $\hat{f} = \max_{t \in [0,T]} |f(t)|$. Определим на множестве $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq T, 0 \leq s \leq t\}$ функцию $\varphi(t, s) = f(t - s)$. В силу данного определения функция $\varphi(t, s)$ непрерывна и, вследствие компактности множества $\Delta \subset \mathbb{R}^2$, эта функция равномерно непрерывна. Поэтому справедливы соотношения

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 \quad \forall (t_0, s) \in \Delta \quad \forall t \in [s, T] \\ \left(|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t - s) - f(t_0 - s)| < \frac{\epsilon \Gamma(\alpha + 1)}{2T^\alpha} \right),$$

Определим на отрезке $[0, T]$ степенную функцию $\mu(t) = t^\alpha$. Так как $\alpha > 0$, эта функция непрерывна и равномерно непрерывна на заданном отрезке. Таким образом, справедливы соотношения

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 \quad \forall t_0, t \in [0, T] \quad \left(|t - t_0| < \delta \Rightarrow |t^\alpha - t_0^\alpha| < \frac{\epsilon \Gamma(\alpha + 1)}{2\hat{f}} \right).$$

Теперь покажем непрерывность функции $I^\alpha f(t)$ в произвольной точке $t_0 \in [0, T]$. Положим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Для любого $t \in [0, T]$ такого, что $|t - t_0| < \delta$, имеем

$$\begin{aligned} |I^\alpha f(t) - I^\alpha f(t_0)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds - \int_0^{t_0} (t_0-s)^{\alpha-1} f(s) ds \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t s^{\alpha-1} f(t-s) ds - \int_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t_0-s) ds \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_0^t s^{\alpha-1} f(t-s) ds - \int_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t-s) ds + \int_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t-s) ds - \int_0^{t_0} s^{\alpha-1} f(t_0-s) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\left| \int_{t_0}^t s^{\alpha-1} |f(t-s)| ds \right| + \int_0^{t_0} s^{\alpha-1} |f(t-s) - f(t_0-s)| ds \right) \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\hat{f}}{\alpha} |t^\alpha - t_0^\alpha| + \int_0^{t_0} s^{\alpha-1} |f(t-s) - f(t_0-s)| ds \right) \\ &< \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \hat{f} \frac{\epsilon \Gamma(\alpha+1)}{2\hat{f}} + \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\epsilon \Gamma(\alpha+1)}{2T^\alpha} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, установлено, что $I^\alpha f(t) \in C_{[0,T]}$. □

Операция дробного дифференцирования вводится как операция обратная дробному интегрированию.

О п р е д е л е н и е 1.2. (см. [3, с. 43]) Для функции $f(t)$, заданной на отрезке $[0; T]$, левосторонней производной Римана–Лиувилля дробного порядка $0 < \alpha < 1$ называется оператор вида

$$D^\alpha f(t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

Известно (см. [3, с. 46]), что если $f(t) \in C_{[0,T]}^1$, то справедливо равенство

$$D^\alpha f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) + I^{1-\alpha} f'(t).$$

Утверждение 1.2. Для того, чтобы $\underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_k f(t) \in C_{[0,T]}$, достаточно выполнения условий

$$f(t) \in C_{[0,T]}^{[k\alpha]+1} \quad \text{и} \quad f^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, \dots, [k\alpha]. \quad (1.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условия (1.1) выполнены. Имеем

$$\underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_k f(t) = \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-1} \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} f(t) = \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-1} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

Полученный здесь интеграл вычислим по частям, полагая $u = f(s)$, $du = f'(s)ds$ и $dv = (t-s)^{-\alpha}$, $v = -\frac{(t-s)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, таким образом, получим

$$\underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_k f(t) = \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(0) + I^{2-\alpha} f'(t) \right).$$

Проинтегрировав правую часть по частям еще $[k\alpha]$ раз, преобразуем ее к виду

$$\underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f(0) + \frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f'(0) + \dots + \frac{t^{[k\alpha]+1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} f^{([k\alpha])}(0) + I^{[k\alpha]+2-\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t) \right).$$

Учитывая соотношения (1.1), получим

$$\begin{aligned} & \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-1} \frac{d}{dt} I^{[k\alpha]+2-\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t) = \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-1} I^{[k\alpha]+1-\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t) \\ &= \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-2} \frac{d}{dt} I^{1-\alpha} I^{[k\alpha]+1-\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t) = \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-2} \frac{d}{dt} I^{[k\alpha]+2-2\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t) \\ &= \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{k-2} I^{[k\alpha]+1-2\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t) = \dots = I^{[k\alpha]+1-k\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t). \end{aligned}$$

Здесь последнее выражение получено при помощи последовательного внесения производной под знак интеграла и применения полугруппового свойства интеграла Римана–Лиувилля (см. [3, с. 42]). Остается заметить, что так как $[k\alpha]+1-k\alpha > 0$ и $f^{([k\alpha]+1)}(t) \in C_{[0,T]}$, в силу утверждения 1.1, выполнено $I^{[k\alpha]+1-k\alpha} f^{([k\alpha]+1)}(t) \in C_{[0,T]}$. $\square$

Далее приведем известные факты из теории матричных пучков.

О п р е д е л е н и е 1.3. (см. [8, с. 331]) Пусть заданы матрицы A и B размера $m \times n$. *Пучком матриц* или *матричным пучком* называют сумму $\lambda A + B$, где λ — скалярный параметр.

О п р е д е л е н и е 1.4. (см. [8, с. 332]) Если $m = n$ и $\det(\lambda A + B) \neq 0$, то пучок матриц $\lambda A + B$ называется *регулярным*.

О п р е д е л е н и е 1.5. (см. [5, § 11]) Пусть $\det(\lambda A + B) \neq 0$ для некоторого значения λ . *Индексом матрицы* $C = (\lambda A + B)^{-1}A$ называют минимальное значение r , при котором

$$\text{rank } C^{r+1} = \text{rank } C^r.$$

Такое значение r не зависит от выбора числа λ , поэтому его также называют *индексом регулярного матричного пучка* $\lambda A + B$.

Фундаментальную роль при исследовании и разработке численных методов решения начальной задачи для ДАУ играет следующий результат.

Теорема 1.1. (см. [8, с. 334]) Пусть $\lambda A + B$ — регулярный пучок матриц, тогда существуют невырожденные матрицы P и Q такие что

$$P(\lambda A + B)Q = \lambda \begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N_{r_1} & \cdots & \mathbb{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & N_{r_p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{E}_{r_1} & \cdots & \mathbb{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{E}_{r_p} \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{E}$, $\mathbb{O}$ — единичная и нулевая матрица соответствующих размерностей, J — матрица размерности $(d \times d)$, имеющая нормальную жорданову форму, N_{r_i} — матрица размерности $(r_i \times r_i)$, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем $d + r_1 + r_2 + \cdots + r_p = n$, $d = \deg(\det(\lambda A + B))$, $\max_{i=1, \dots, p} r_i = r$, здесь r — индекс матричного пучка $\lambda A + B$.

В следующем параграфе рассмотрим ДАУ с дробной производной Римана–Лиувилля.

2. Постановка задачи и условия разрешимости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$D^\alpha (Au(t)) + Bu(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

с производной Римана–Лиувилля дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$, где A, B — постоянные $(n \times n)$ матрицы, $f(t)$ и $u(t)$ — известная и искомая n -мерные вектор-функции.

Для уравнения (2.1) зададим начальное условие

$$D^{\alpha-1}(Au(t)) \Big|_{t \rightarrow +0} = u_0, \quad u_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Задача (2.1), (2.2) традиционно называется задачей типа Коши (см., например, [4, § 42]).

О п р е д е л е н и е 2.1. Под *решением* поставленной задачи будем понимать непрерывную вектор-функцию $u = u(t)$, которая обращает в тождество уравнение (2.1) и удовлетворяет начальным условиям (2.2).

Утверждение 2.1. Пусть для задачи (2.1), (2.2) выполняются условия

1. пучок $\lambda A + B$ является регулярным, и его индекс равен r ;
2. $f(t) \in C_{[0,1]}^{[(r-1)\alpha]+1}$, $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, \dots, [(r-1)\alpha]$;
3. $u_0 = 0$.

Тогда задача (2.1), (2.2) имеет единственное непрерывное решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратим оператор дробной производной в уравнении (2.1), тогда задача типа Коши примет вид эквивалентного интегро-алгебраического уравнения типа Абеля, в том смысле, что если функция $u = u(t)$ является решением одной из этих задач, то она является решением и другой [4, § 3.2.1],

$$Au(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds = I^\alpha f(t) + \frac{u_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

а из третьего условия утверждения 2.1 получим

$$Au(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Bu(s) ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.3)$$

Согласно первому условию утверждения 2.1, матричный пучок $\lambda A + B$ является регулярным, т. е. справедлива теорема 1.1. Умножим интегральное представление (2.3) на матрицу P и проведем замену $u(t) = Qy(t)$, где P и Q те же матрицы, что и в теореме 1.1, будем иметь

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & N_{r_1} & \cdots & \mathbb{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & N_{r_p} \end{pmatrix} y(t) + I^\alpha \begin{pmatrix} J_d & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{E}_{r_1} & \cdots & \mathbb{O} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{E}_{r_p} \end{pmatrix} y(t) = I^\alpha g(t),$$

где $g(t) = Pf(t)$. Из второго условия утверждения 2.1 вытекает, что элементы функции стоящей в правой части $I^\alpha g(t)$ принадлежат классу непрерывных функций (см. утверждение 1.1).

Итак, систему (2.3) мы разделили на системы вида

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_d y_d(t) + I^\alpha (J_d y_d(t)) &= I^\alpha g_d(t), \\ N_{r_1} y_{r_1}(t) + I^\alpha (\mathbb{E}_{r_1} y_{r_1}(t)) &= I^\alpha g_{r_1}(t), \\ &\dots \\ N_{r_p} y_{r_p}(t) + I^\alpha (\mathbb{E}_{r_p} y_{r_p}(t)) &= I^\alpha g_{r_p}(t), \end{aligned}$$

где $y(t) = \begin{pmatrix} y_d(t) \\ y_{r_1}(t) \\ \dots \\ y_{r_p}(t) \end{pmatrix}$, $g(t) = \begin{pmatrix} g_d(t) \\ g_{r_1}(t) \\ \dots \\ g_{r_p}(t) \end{pmatrix}$.

Первая из них является системой интегральных уравнений Абеля второго рода, которая при $I^\alpha g_d(t) \in C_{[0,1]}$ имеет единственное непрерывное решение (см. [9, § 9.3]).

Подробнее рассмотрим оставшиеся системы.

$$y_2(t) + I^\alpha y_1(t) = I^\alpha g_1(t)$$

$$y_3(t) + I^\alpha y_2(t) = I^\alpha g_2(t)$$

...

$$I^\alpha y_k(t) = I^\alpha g_k(t),$$

где $k \in \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$. По аналогии с ДАУ первого порядка с постоянными матричными коэффициентами [5, § 6-8], решение таких систем будем находить последовательным дифференцированием порядка α и подстановкой в предыдущее, начиная с последнего. Таким образом, решение таких систем будет иметь вид

$$y_1(t) = g_1(t) + \sum_{i=2}^k (-1)^{i-1} \underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_{i-1} g_i(t)$$

...

$$y_{k-2}(t) = g_{k-2}(t) - D^\alpha g_{k-1}(t) + D^\alpha D^\alpha g_k(t)$$

$$y_{k-1}(t) = g_{k-1}(t) - D^\alpha g_k(t)$$

$$y_k(t) = g_k(t),$$

где $k \in \{r_1, r_2, \dots, r_p\}$. Полученные выражения при выполнении второго условия утверждения 2.1 являются непрерывными функциями. А значит, исходная задача типа Коши (2.1), (2.2) имеет единственное непрерывное решение. $\square$

Если не выполняется первое условие утверждения 2.1 и пучок $\lambda A + B$ не является регулярным, то задача (2.1), (2.2) не будет однозначно разрешимой. В этом случае рассматриваемая задача типа Коши может иметь или бесконечное множество решений, или вовсе не иметь решений.

Если же не выполняется второе условие утверждения 2.1, то единственное непрерывное решение все же может существовать. Это связано с тем, что условия утверждения 1.2 только достаточны для $\underbrace{D^\alpha \dots D^\alpha}_k f(t) \in C_{[0,T]}$, а также с тем, что неизвестны размерности

N_k блоков в преобразовании пучка матриц (см. теорему 1.1). Рассмотрим иллюстрирующий пример.

Пример 2.1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Рассмотрим ДАУ

$$D^\alpha \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ 2 + \frac{3t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1].$$

Индекс матричного пучка $\lambda A + B$ равен 3. Второе условие утверждения 2.1 не выполняется при любом значении $\alpha \in (0, 1)$. Несмотря на это, рассматриваемая система имеет единственное непрерывное решение $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = 2$, $u_3(t) = 3$.

Для того, чтобы решение задачи типа Коши (2.1), (2.2) было непрерывным, необходимо выполнение третьего условия утверждения 2.1. Покажем это. Пусть $u(t) \in C_{[0,1]}$, обозначим $m = \max_{t \in [0,1]} \|Au(t)\|_{\mathbb{R}^n}$, тогда справедлива цепочка неравенств

$$\|D^{\alpha-1}(Au(t))\|_{\mathbb{R}^n} = \|I^{1-\alpha}(Au(t))\|_{\mathbb{R}^n} \leq I^{1-\alpha}\|Au(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{m \cdot t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$$

Выражение в правой части стремится к нулю при $t \rightarrow +0$, т. е. начальное условие рассматриваемой задачи типа Коши, заданное в (2.2), при поиске ее непрерывного решения на отрезке $[0, 1]$ имеет вид

$$D^{\alpha-1}(Au(t))\big|_{t \rightarrow +0} = 0.$$

В следующем разделе мы анонсируем численный метод решения рассматриваемого класса задач.

3. Численный метод

Зададим на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку

$$t_i = ih, \quad i = 1, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N},$$

введем обозначение $v_i = v(t_i)$ для некоторой функции $v = v(t)$, получим соотношения

$$\int_0^{t_i} (t_i - s)^{\alpha-1} v(s) ds = \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_i - s)^{\alpha-1} v(s) ds \approx \sum_{j=1}^i v_j \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_i - s)^{\alpha-1} ds = \sum_{j=1}^i \frac{h^\alpha}{\alpha} \omega_{i,j} v_j.$$

Эта формула получена с использованием квадратурной формулы правых прямоугольников и метода интегрирования произведений [10], в которой веса квадратурной формулы имеют вид

$$\omega_{i,j} = ((i - j + 1)^\alpha - (i - j)^\alpha).$$

Таким образом численный метод для интегрального представления (2.3), с учетом обозначений $f_i = f(t_i)$, $u_i \approx u(t_i)$, имеет вид

$$Au_i + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=1}^i \omega_{i,j} Bu_j = \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{j=1}^i \omega_{i,j} f_j. \quad (3.1)$$

Для стандартных ДАУ ($\alpha = 1$) вида

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t),$$

предложенный алгоритм полностью совпадает с неявной схемой Эйлера. В этом случае (см. [11]) получена оценка $\|x_i - x(t_i)\|_{\mathbb{R}^n} = O(h)$ при $i \geq r$, а в первых $r - 1$ точках сходимости не наблюдается, здесь r индекс матричного пучка системы.

4. Численный эксперимент

Предложенный алгоритм (3.1) проверен на тестовых ДАУ, для которых значения параметра дифференцирования α выбраны произвольно.

Пример 4.1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Рассмотрим ДАУ с постоянными матрицами коэффициентов

$$D^\alpha \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + t^2 \\ \frac{6t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} + t^2 + t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 1].$$

Индекс матричного пучка системы равен 2. Задача типа Коши для этого ДАУ при нулевом начальном значении удовлетворяет условиям утверждения 2.1. Точное решение имеет вид $u_1(t) = t^2$, $u_2(t) = t^3$. В таблице 1 приведены максимальные погрешности по евклидовой норме при различных значениях шага h .

Таблица 1

Расчеты примера 4.1

h	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.95$
0.2	0.0340	0.1645	0.3169	0.4521	0.5411
0.1	0.0210	0.0975	0.1781	0.2422	0.2818
0.05	0.0126	0.0556	0.0962	0.1259	0.1437
0.025	0.0073	0.0307	0.0506	0.0643	0.0726

Здесь, при уменьшении шага в два раза, значение погрешности уменьшается также в два раза, что говорит о том, что порядок метода (3.1) равен 1.

Пример 4.2. Рассмотрим при $\alpha \in (0, 1)$ ДАУ

$$D^\alpha (N_3 u(t)) + \mathbb{E}_3 u(t) = f(t), \quad t \in (0, 1],$$

где $f(t) = (0, 0, t^2)$. Точное решение $u(t) = \left(\frac{2t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}, \frac{-2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}, t^2 \right)$.

С помощью алгоритма (3.1), найдем приближенное значение решения в первой точке

$$u_1 = (h^{2-3\alpha}\Gamma^3(1+\alpha), -h^{2-2\alpha}\Gamma^2(1+\alpha), h^{2-\alpha}\Gamma(1+\alpha)).$$

Первая компонента этого представления содержит множитель $h^{2-3\alpha}$. При $\alpha \leq \frac{2}{3}$ алгоритм дает результат, аналогичный результатам расчета примера 4.1. При $\alpha > \frac{2}{3}$ в первых точках приближенных значений первой компоненты решения наблюдается всплеск, что продемонстрировано на рис. 1., где изображены графики погрешностей первой компоненты при $\alpha = 0.95$, при различных значениях шага.

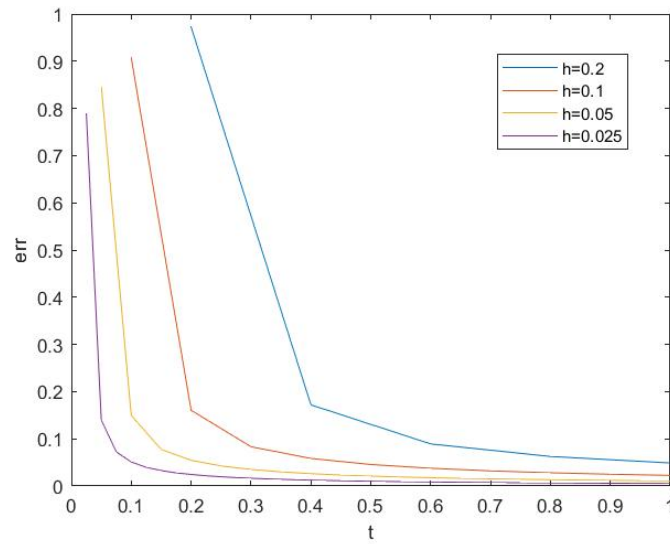


Рис. 1. Значения погрешностей первой компоненты

На графике видно, что в первой точке погрешность максимальна и, если судить по первым значениям, метод имеет порядок $O(1)$. Но при некотором отступе от первых значений погрешности уменьшаются вдвое с уменьшением шага в два раза.

Пример 4.3. Рассмотрим ДАУ с постоянными матрицами коэффициентов

$$D^\alpha (Au(t)) + Bu(t) = f(t), \quad t \in (0, 1], \quad \alpha \in (0, 1),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \mathbb{E}_4, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t^{4.2} \\ 4t^2 \\ t + 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Индекс матричного пучка $\lambda A + B$ равен 2. Второе условие утверждения 2.1 не выполняется, а именно $f(0) \neq 0$. Несмотря на это, система имеет единственное непрерывное решение

$$u(t) = \left(\frac{\Gamma(5.2)t^{4.2-\alpha}}{\Gamma(5.2-\alpha)} + t^{4.2}, 4t^2, \frac{8t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} + t + 8, 1 \right).$$

В таблице 2 приведены максимальные погрешности по евклидовой норме при различных значениях шага h , найденные с помощью алгоритма (3.1).

Таблица 2

Расчеты примера 4.2

h	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 0.95$
0.2	0.0340	0.1645	0.3169	0.4521	0.5411
0.1	0.0210	0.0975	0.1781	0.2422	0.2818
0.05	0.0126	0.0556	0.0962	0.1259	0.1437
0.025	0.0073	0.0307	0.0506	0.0643	0.0726

Так как погрешности при уменьшении шага в два раза, уменьшаются вдвое, можно говорить о его эффективности. Таким образом, алгоритм демонстрирует сходимость на ДАУ дробного порядка, которые могут не удовлетворять второму условию утверждения 2.1, но имеющих единственное непрерывное решение.

Заключение

В данной статье сформулированы достаточные условия разрешимости линейных ДАУ с производной Римана–Лиувилля дробного порядка $\alpha \in (0, 1)$. Анонсирован численный метод решения таких задач, основанный на интегральном представлении исходного ДАУ, квадратурной формуле правых прямоугольников и методе интегрирования произведений. Приведены результаты численных расчетов модельных примеров, которые имеют различный индекс матричного пучка. Данные расчеты подтвердили работоспособность предложенного подхода. В дальнейшем планируется обосновать данный алгоритм для различных α и матричных пучков $\lambda A + B$, имеющих высокий индекс, а также построить многошаговые методы решения ДАУ дробного порядка.

References

- [1] В. Е. Тарасов, *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка*, Ижевский институт компьютерных исследований, Москва–Ижевск, 2011, 568 с. [V. E. Tarasov, *Models of Theoretical Physics with Fractional Integro-Derivation*, Izhevsk Institute of Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2011 (In Russian), 568 pp.]
- [2] В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 510 с. [V. V. Uchaikin, *Fractional Derivative Method*, Artichoke, Ulyanovsk, 2008 (In Russian), 510 pp.]
- [3] С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. [S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications*, Nauka i tekhnika Publ., Minsk, 1987 (In Russian), 688 pp.]
- [4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier Science Publishing, Amsterdam–Boston–Heidelberg, 2006, 541 pp.
- [5] Ю. Е. Бояринцев, *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Сиб. отд-ние, 1980. [Yu. E. Boyarintsev, *Regular and Singular Systems of Linear Ordinary Differential Equations*, Nauka Publ., Sib. Department, 1980 (In Russian)].
- [6] В. Ф. Чистяков, *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром*, Наука, Новосибирск, 1996, 280 с. [V. F. Chistyakov, *Algebraic Differential Operators with Finite-Dimensional Kernel*, Nauka Publ., Novosibirsk, 1996 (In Russian), 280 pp.]
- [7] V. Mehrmann, C. Shi, “Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order”, *Numerical Algorithms*, **42** (2006), 281–307.
- [8] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1986, 576 с. [F. R. Gantmakher, *Matrix Theory*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russian), 576 pp.]
- [9] А. Д. Полянин, А. В. Манжиров, *Справочник по интегральным уравнениям*, Физматлит, 2003. [A. D. Polyanin, A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, Fizmatlit Publ., 2003 (In Russian)].
- [10] R. Weiss, “Product integration for the generalized Abel equation”, *Mathematics of Computation*, **26**:117 (1972), 177–190.
- [11] Ю. Е. Бояринцев, В. М. Корсуков, “Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Вопросы прикладной математики*, 1975, 140–152. [Yu. E. Boyarintsev, V. M. Korsukov, “Application of difference methods to the solution of regular systems of ordinary differential equations”, *Issues of Applied Mathematics*, 1975, 140–152 (In Russian)].

Информация об авторах

Булатов Михаил Валерьянович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник. Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация.

E-mail: mvbul@icc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7952-5560>

Индутская Татьяна Сергеевна, аспирант, лаборатория дифференциальных уравнений и управляемых систем. Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН, г. Иркутск, Российская Федерация.

E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5290-9887>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Индутская Татьяна Сергеевна

E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.

Поступила после рецензирования 28.02.2023 г.

Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the authors

Bulatov Mikhail Valeryanovich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher. Institute of System Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosov SB RAS, Irkutsk, Russian Federation.

E-mail: mvbul@icc.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7952-5560>

Indutskaya Tatyana Sergeevna, Post-Graduate Student, Laboratory of Differential Equations and Control Systems. Institute of System Dynamics and Control Theory named after V.M. Matrosov SB RAS, Irkutsk, Russian Federation.

E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5290-9887>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Tatyana S. Indutskaya

E-mail: indutskaya.tat@yandex.ru

Received 25.01.2023

Reviewed 28.02.2023

Accepted for press 10.03.2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Волдеаб М.С., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38

УДК 517.929



Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций

Мебрахтом Себхату ВОЛДЕАБ

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Аннотация. Рассматривается модель однородной популяции, заданная при отсутствии эксплуатации дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$. В каждый момент времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$, из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in [0, 1]$. Предполагаем, что можно остановить заготовку в случае, если ее доля окажется больше некоторого значения $u \in [0, 1]$; тогда доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min(\omega_k, u)$, $k = 1, 2, \dots$. Исследуется средняя временная выгода от добычи ресурса, которая равна нижнему пределу при $n \rightarrow \infty$ среднего арифметического количества ресурса, полученного за n извлечений. Показано, что свойства данной характеристики связаны с наличием положительной неподвижной точки разностного уравнения $X_{k+1} = \varphi(d, (1-u)X_k)$, $k = 1, 2, \dots$, где $\varphi(t, x)$ — решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Получены условия существования предела и оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Результаты работы проиллюстрированы на примерах эксплуатируемых однородных популяций, зависящих от случайных параметров.

Ключевые слова: вероятностная модель подверженной промыслу популяции, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация

Для цитирования: Волдеаб М.С. Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 26–38. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38.

SCIENTIFIC ARTICLES

© M. S. Woldeab, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38



Properties of the average time benefit for probabilistic models of exploited populations

Mebrahtom S. WOLDEAB

Vladimir State University

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

Abstract. A model of a homogeneous population given in the absence of exploitation by a differential equation $\dot{x} = g(x)$ is considered. At each moment of time $\tau_k = kd$, where $d > 0$, $k = 1, 2, \dots$, some random share of the resource $\omega_k \in [0, 1]$ is extracted from this population. We assume that it is possible to stop the harvesting if its share turns out to be greater than a certain value $u \in [0, 1]$: then the share of the extracted resource will be $\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min(\omega_k, u)$, $k = 1, 2, \dots$. The average time benefit from resource extraction is investigated, it is equal to the lower limit of the arithmetic amount of the resource obtained in n extractions as $n \rightarrow \infty$. It is shown that the properties of this characteristic are associated with the presence of a positive fixed point of the difference equation $X_{k+1} = \varphi(d, (1 - u)X_k)$, $k = 1, 2, \dots$, where $\varphi(t, x)$ is a solution of the equation $\dot{x} = g(x)$ satisfying the initial condition $\varphi(0, x) = x$. The conditions for the existence of the limit and the estimates of the average time benefit performed with probability one are obtained. The results of the work are illustrated by examples of exploited homogeneous populations depending on random parameters.

Keywords: probabilistic model of a population subject to harvesting, average time benefit, optimal exploitation

Mathematics Subject Classification: 37N35, 39A50, 49N25, 93C15.

For citation: Woldeab M.S. Properties of the average time benefit for probabilistic models of exploited populations. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 26–38. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Задачи оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях рассматриваются, начиная с семидесятых годов прошлого века [1, 2] и актуальны до настоящего времени [3–7]. Интерес к данной тематике обусловлен проблемами природосбережения при эксплуатации популяций, подверженных случайным воздействиям окружающей среды [8, 9]. Объектом исследования в этих работах являются популяции, заданные дифференциальными или разностными уравнениями, из которых в определенные моменты времени производится добыча части ресурса.

Наиболее близкими по содержанию к данной публикации являются работы [6, 7]; в них введено понятие средней временной выгоды для однородной популяции и описан способ добычи ресурса на бесконечном промежутке времени, при котором с вероятностью единица существует предел данной характеристики. В [10, 11] рассматривается структурированная популяция, состоящая из нескольких видов или возрастных классов, заданная системой дифференциальных уравнений. Показано, что для получения оценки средней временной выгоды нужны дополнительные условия, которым должны удовлетворять решения данной системы. Вопросам эксплуатации популяции, заданной разностными уравнениями со случайными параметрами, посвящены статьи [12, 13]. В последних работах показано, что оценки средней временной выгоды существенно зависят от свойств функции, определяющей разностное уравнение при отсутствии эксплуатации. Подробный обзор работ по данной тематике приведен в [13–15].

Данная статья является продолжением исследований [6, 7]. Отметим, что в [7] построено управление, ограничивающее количество извлекаемого ресурса таким образом, чтобы оставшийся размер популяции в каждый момент извлечения τ_k , $k = 1, 2, \dots$, был не меньше заданного значения $x > 0$. В настоящей работе предложен другой способ эксплуатации популяции, при котором ограничивается доля ресурса, добываемого в момент τ_k . Кроме того, здесь получены новые утверждения об оценке средней временной выгоды, которые, по сравнению с работой [7], представляются более удобными при решении практических задач.

1. Основные определения и обозначения

Рассматривается модель популяции, которая при отсутствии эксплуатации задана дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в каждый из моментов времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in \Omega \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u \in [0, 1]$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min\{\omega_k, u\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x), \quad t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k) &= (1 - \ell_k)x(\tau_k - 0), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Предполагаем, что решения уравнения (1.1) непрерывны справа, функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$.

Пусть также имеет место следующее условие.

У с л о в и е 1.1. Предположим, что $g(0) \geq 0$ и существует $K > 0$ такое, что $\varphi(t) \equiv K$ является решением уравнения $\dot{x} = g(x)$.

З а м е ч а н и е 1.1. Отметим, что условие 1.1 выполнено для следующих уравнений:

1. Линейное уравнение $\dot{x} = a(K - x)$, где $K > 0$, $a > 0$.

2. Логистическое уравнение $\dot{x} = (a - bx)x$, где коэффициенты $a > 0$ и $b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно.

3. Уравнение, учитывающее нижнюю критическую границу численности популяции и самоограничение при больших плотностях $\dot{x} = a \frac{\beta x^2}{\beta + \gamma x} - dx - \delta x^2$; здесь все постоянные $a, \beta, \gamma, d, \delta$ положительные (модель динамики популяции А.Д. Базыкина, см. [16, с. 44]).

4. Уравнение $\dot{x} = ax(x - L)(K - x)$, где $a > 0$, $K > L > 0$, L — нижняя критическая плотность популяции, K — стационарная плотность.

5. Уравнение Гомпертца $\dot{x} = -\frac{\varepsilon x}{\ln K} \ln \frac{x}{K}$, где $\varepsilon > 0$, $K > 1$.

Пусть $\bar{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_k, \dots)$, $x_0 \geq 0$ — начальный размер популяции, X_k — количество ресурса до сбора в момент kd , $k = 1, 2, \dots$. Рассмотрим функцию

$$H_*(\bar{\ell}, x_0) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \ell_k, \quad (1.2)$$

введенную в работе [6], которая называется *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Если предел в правой части (1.2) существует, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H(\bar{\ell}, x_0) \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \ell_k$.

Приведем описание вероятностной модели $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, определяющей поведение случайных последовательностей $\sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots)$. Предполагаем, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0, 1]$, $\tilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω ; $\tilde{\mu}$ — вероятностная мера, определенная с помощью функции распределения F .

Пусть $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots)\}$, где $\omega_k \in \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_k \in A_k\}, \text{ где } A_i \in \tilde{\mathfrak{A}}, i = 1, 2, \dots, k,$$

и зададим меру $\tilde{\mu}(D_k) = \tilde{\mu}(A_1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(A_k)$. Тогда в силу теоремы А.Н. Колмогорова (см., например, [17, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ , которая является продолжением меры $\tilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

2. Утверждения о существовании положительной неподвижной точки и средней временной выгоды

Определим $\varphi(t, x)$ как решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $x \geq 0$. Обозначим через x_k количество ресурса после сбора в

момент τ_k , тогда $X_{k+1} = \varphi(d, x_k)$ и $x_k = (1 - \ell_k)X_k$. Если $\ell_k = u$ для всех $k = 1, 2, \dots$ (такое возможно при $\omega_1 \geq u, \omega_2 \geq u, \dots$), то X_k удовлетворяет разностному уравнению

$$X_{k+1} = \varphi(d, (1 - u)X_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Пусть $X(u)$ — неподвижная точка уравнения (2.1), тогда $X(u) = \varphi(d, (1 - u)X(u))$.

Утверждение 2.1. *Если выполнено условие 1.1, то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$ такую, что $X(u) \leq K$.*

Доказательство. Пусть $d > 0$ фиксировано. Покажем, что функция $\varphi(d, x)$ возрастающая. Действительно, если существуют такие $x_1 < x_2$, что $\varphi(d, x_1) \geq \varphi(d, x_2)$, то найдется точка $t_* \in (0, d]$ такая, что $\varphi(t_*, x_1) = \varphi(t_*, x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения.

Отметим, что условие $g(0) \geq 0$ является *условием квазиположительности* для дифференциального уравнения $\dot{x} = g(x)$. Данное условие означает, что решения уравнения $\dot{x} = g(x)$ являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях (см. [18, с. 34]). Таким образом, из $g(0) \geq 0$ следует, что $\varphi(d, x) \geq 0$ для любого $x \geq 0$; в частности, $\varphi(d, 0) \geq 0$.

Если $\varphi(d, 0) = 0$, то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u) = 0$. Предположим, что $\varphi(d, 0) > 0$. Рассмотрим функцию $h(x) \doteq \varphi(d, (1 - u)x)$, которая также является возрастающей. Тогда $h(0) = \varphi(d, 0) > 0$ и

$$h(K) = \varphi(d, (1 - u)K) \leq \varphi(d, K) = K; \quad (2.2)$$

поэтому существует точка пересечения графиков функций $y = h(x)$ и $y = x$, т. е. неподвижная точка $X(u)$ уравнения (2.1), такая, что $0 < X(u) \leq K$. $\square$

В следующем утверждении приведены условия существования положительной неподвижной точки уравнения (2.1).

Утверждение 2.2. *Предположим, что существует $K > 0$ такое, что $\varphi(t) \equiv K$ является решением уравнения $\dot{x} = g(x)$. Если, кроме того, выполнено одно из условий:*

- 1) $\varphi(d, 0) > 0$;
- 2) $\varphi(d, 0) = 0$ и $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) > 1$,

то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$, такую, что $0 < X(u) \leq K$.

Доказательство. При $\varphi(d, 0) > 0$ доказательство существования положительной неподвижной точки приведено в утверждении 2.1.

Пусть выполнено второе условие утверждения. Отметим, что при $u = 1$ неравенство $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) > 1$ не верно; поэтому дальше рассматриваем $u \in [0, 1)$. Найдем

$$h(0) = \varphi(d, 0) = 0, \quad h'(0) = (1 - u)\varphi'_x(d, 0) > 1,$$

тогда касательная к графику функции $y = h(x)$ в точке $x = 0$ находится выше биссектрисы первого координатного угла, следовательно, найдется $x_* > 0$ такое, что $h(x_*) > x_*$. Поэтому, учитывая (2.2), из непрерывности функции $h(x)$ получаем, что существует $X(u)$ — точка пересечения биссектрисы с графиком $y = h(x)$, причем $0 < X(u) \leq K$. $\square$

Утверждение 2.3. *Предположим, что $\varphi(d, 0) = 0$ и выполнено одно из условий:*

- 1) $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) \leq 1$ и функция $\varphi(d, x)$ строго выпукла вверх;
- 2) $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) \geq 1$ и функция $\varphi(d, x)$ строго выпукла вниз.

Тогда уравнение (2.1) имеет единственную неподвижную точку $X(u) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u = 1$, то из условия $\varphi(d, 0) = 0$ следует, что уравнение (2.1) имеет вид $X_{k+1} = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, поэтому утверждение верно.

Далее считаем, что $u \neq 1$ и исследуем функцию $h(x) \doteq \varphi(d, (1 - u)x)$. Пусть выполнено первое условие утверждения. Заметим, что $h(0) = 0$, $h'(0) \leq 1$. Кроме того, функция $h(x)$, как и $\varphi(d, x)$, строго выпукла вверх. Поэтому график $h(x)$ лежит ниже любой касательной к данной функции, в том числе, касательной $y = h'(0)x$, которая, в свою очередь, расположена не выше биссектрисы $y = x$; следовательно, $h(0) = 0$ и $h(x) < x$ при $x > 0$. Таким образом, единственной неподвижной точкой уравнения (2.1) является тривиальная точка $X(u) = 0$. При выполнении второго условия утверждения доказательство аналогично. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\varphi(d, 0) = 0$ и выполнено $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) < 1$, то в утверждении 2.3 условие строгой выпуклости вверх функции $\varphi(d, x)$ можно заменить на условие выпуклости вверх. Утверждение также верно, если $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) > 1$ и функция $\varphi(d, x)$ выпукла вниз. Отметим также, что при выполнении первого условия утверждения неподвижная точка $X(u) = 0$ является устойчивой, при выполнении второго условия она неустойчивая.

Для любого $u \in [0, 1]$ введем случайную величину $\ell(\omega, u) = \min\{\omega, u\}$ и обозначим через $M\ell(u)$ ее математическое ожидание. Пусть $x(u) \doteq (1 - u)X(u)$, тогда $X(u) = \varphi(d, x(u))$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любого $x_0 \in [x(u), K]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства*

$$X(u)M\ell(u) \leq H_*(\bar{\ell}, x_0) \leq KM\ell(u). \quad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнено условие 1.1, то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$ и $x(u) \leq X(u) \leq K$. Рассмотрим $x_0 \in [x(u), K]$. Как доказано в утверждении 2.1, функция $\varphi(d, x)$ возрастающая, тогда

$$X_1 = \varphi(d, x_0) \geq \varphi(d, x(u)) = X(u),$$

поэтому, так как $\ell(\omega_1, u) \leq u$, получаем

$$x_1 = (1 - \ell(\omega_1, u))X_1 \geq (1 - \ell(\omega_1, u))X(u) \geq (1 - u)X(u) = x(u).$$

Далее, $X_2 = \varphi(d, x_1) \geq \varphi(d, x(u)) = X(u)$. Аналогично получаем, что $X_k \geq X(u)$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, если $x_0 \leq K$, то $X_k \leq K$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$X(u) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ell(\omega_k, u) \leq H_*(\bar{\ell}, x_0) \leq K \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ell(\omega_k, u). \quad (2.4)$$

Отметим, что случайные величины $\ell(\omega_k, u)$ независимы, одинаково распределены и, так как $0 \leq \ell(\omega_k, u) \leq u$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то $M|\ell(\omega_k, u)| = M\ell(u) \leq u < \infty$. Тогда из

усиленного закона больших чисел Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ell(\omega_k, u) = M\ell(u),$$

поэтому из (2.4) следует неравенство (2.3). $\square$

3. Существование предела и оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $\sigma_k \doteq (\omega_1, \dots, \omega_k) \in \Omega^k$ и зададим рекуррентным образом случайные величины $A_k = A_k(\sigma_{k-1}, x)$, $B_k = B_k(\sigma_{k-1}, x)$:

$$\begin{aligned} A_1 &= X(u), \quad A_{k+1} = \varphi(d, (1 - \ell_k)A_k); \\ B_1 &= K, \quad B_{k+1} = \varphi(d, (1 - \ell_k)B_k), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Далее через MA_k и MB_k обозначены математические ожидания случайных величин A_k и B_k соответственно.

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$\frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^m MA_k \leq H_*(\bar{\ell}, x_0) \leq \frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^m MB_k. \quad (3.1)$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1 работы [7].

Лемма 3.1. Пусть выполнено условие 1.1. Тогда последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^\infty$ является неубывающей, а $\{MB_k\}_{k=1}^\infty$ — невозрастающей, существуют конечные пределы данных последовательностей и $\lim_{k \rightarrow \infty} MA_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} MB_k \leq K$.

Доказательство. Сначала докажем, что

$$A_1 = X(u) \leq A_2(\omega, u) = \varphi(d, (1 - \ell_1)X(u)) \text{ для любого } \omega \in \Omega. \quad (3.2)$$

Поскольку $\ell_k = \min(\omega_k, u) \leq u$, $X(u) > 0$, то $(1 - u)X(u) \leq (1 - \ell_k)X(u)$ и, так как функция $x \mapsto \varphi(d, x)$ возрастающая, то

$$X(u) = \varphi(d, (1 - u)X(u)) \leq \varphi(d, (1 - \ell_1)X(u)) = A_2(\omega_1, u).$$

Последнее неравенство выполнено для любого $\omega_1 \in \Omega$, поэтому $MA_1 \leq MA_2$.

Далее, из определений A_2 и A_3 следует

$$\begin{aligned} MA_2 &= \int_{\Omega} \varphi(d, (1 - \ell_1)X(u)) d\omega_1 = \int_{\Omega} \varphi(d, (1 - \ell_2)X(u)) d\omega_2 = \int_{\Omega \times \Omega} \varphi(d, (1 - \ell_2)X(u)) d\omega_1 d\omega_2, \\ MA_3 &= \int_{\Omega \times \Omega} \varphi(d, (1 - \ell_2)\varphi(d, (1 - \ell_1)X(u))) d\omega_1 d\omega_2. \end{aligned}$$

Из последних равенств и (3.2) получаем $MA_2 \leq MA_3$. Аналогично, $MA_k \leq MA_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким же образом доказывается, что последовательность $\{MB_k\}_{k=1}^\infty$ невозрастающая.

Отметим, что $0 < A_1 = X(u) \leq K = B_1$, поэтому

$$A_2 = \varphi(d, (1 - \ell_1)X(u)) \leq \varphi(d, (1 - \ell_1)K) = B_2$$

и также $A_k \leq B_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$0 < X(u) \leq MA_k \leq MB_k \leq MB_1 = K.$$

Отсюда следует существование конечных пределов рассматриваемых последовательностей $\{MA_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{MB_k\}_{k=1}^\infty$ и неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} MA_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} MB_k \leq K$. $\square$

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

- 1) интервал $(x(u), K)$ содержится в области притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$ уравнения $\dot{x} = g(x)$;
- 2) $g'(x) < 0$ при $x \in (x(u), K)$.

Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ существует предел

$$H(\bar{\ell}, x_0) = M\ell(u) \lim_{k \rightarrow \infty} MA_k = M\ell(u) \lim_{k \rightarrow \infty} MB_k, \quad (3.3)$$

не зависящий от начального значения $x_0 \in [x(u), K]$.

Доказательство. Напомним, что через $\varphi(t, x)$ мы обозначаем решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Заметим, что функция $\varphi'_x(t, x)$ удовлетворяет уравнению $\dot{y} = g'_x(\varphi(t, x))y$ и $\varphi'_x(0, x) = 1$. Далее, если $x \in (x(u), K)$, то $\varphi(t, x) \in (x(u), K)$, поскольку $(x(u), K)$ входит в область притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$. Следовательно, $g'_x(\varphi(t, x)) < 0$ для всех $t \geq 0$, $x \in (x(u), K)$, поэтому существует $q < 1$ такое, что для фиксированного $d > 0$

$$\varphi'_x(d, x) = \exp \int_0^d g'_x(\varphi(s, x)) ds \leq q < 1.$$

В силу теоремы Лагранжа при $x_1 < x_2$ имеем $\varphi(d, x_2) - \varphi(d, x_1) = \varphi'_x(d, \hat{x})(x_2 - x_1)$, где $\hat{x} \in (x_1, x_2)$, поэтому $\varphi(d, x_2) - \varphi(d, x_1) \leq q(x_2 - x_1)$ для всех $x_1 \in (x(u), K)$, $x_2 \in (x(u), K)$. Из последнего неравенства получаем

$$B_2 - A_2 = \varphi(d, (1 - \ell_1)B_1) - \varphi(d, (1 - \ell_1)A_1) \leq q(1 - \ell_1)(B_1 - A_1).$$

Аналогично, неравенство $B_{k+1} - A_{k+1} \leq q(1 - \ell_k)(B_k - A_k)$ выполнено для всех $k = 1, 2, \dots$, следовательно

$$0 \leq B_{k+1} - A_{k+1} \leq q^k(1 - \ell_1) \dots (1 - \ell_k)(B_1 - A_1).$$

Далее, так как $q^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} (B_k - A_k) = 0$. Кроме того, пределы последовательностей $\{MA_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{MB_k\}_{k=1}^\infty$ существуют в силу леммы 3.1, поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} MA_k = \lim_{k \rightarrow \infty} MB_k. \quad (3.4)$$

Теперь, переходя в (3.1) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем

$$M\ell(u) \lim_{k \rightarrow \infty} MA_k \leq H_*(\bar{\ell}, x_0) \leq M\ell(u) \lim_{k \rightarrow \infty} MB_k, \quad (3.5)$$

откуда, с учетом (3.4), следует существование предела $H(\bar{\ell}, x_0)$ и равенство (3.3). $\square$

Следствие 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 3.2, $X(u) > 0$ и $M\ell(u) > 0$. Тогда предел (3.3) положительный.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^\infty$ неубывающая, $MA_1 = X(u) > 0$, поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} MA_k > 0$. Далее, в силу теоремы 3.2 для почти всех $\sigma \in \Sigma$ существует предел $H(\bar{\ell}, x_0) = M\ell(u) \lim_{k \rightarrow \infty} MA_k > 0$. $\square$

Теорема 3.3. Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства

$$M\ell(u)MA_m \leq H_*(\bar{\ell}, x_0) \leq M\ell(u)MB_m. \quad (3.6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3.1 последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^\infty$ неубывающая и имеет конечный предел, поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} MA_k \geq MA_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Из (3.5) получаем

$$M\ell(u)MA_m \leq M\ell(u) \lim_{k \rightarrow \infty} MA_k \leq H_*(\bar{\ell}, x_0).$$

Поскольку последовательность $\{MB_k\}_{k=1}^\infty$ невозрастающая, то аналогично получаем неравенство в правой части (3.6). $\square$

4. Примеры вычисления и оценок средней временной выгоды

П р и м е р 4.1. Исследуем популяцию, динамика которой задана линейным уравнением

$$\dot{x} = a(K - x), \quad x \geq 0. \quad (4.1)$$

Предполагаем, что $a > 0$, $K > 0$, начальный размер популяции $x_0 \geq 0$, случайные величины $\omega_1, \omega_2, \dots$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим задачу — найти $u \in [0, 1]$, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды.

По определению случайных величин A_k имеем $A_{k+1} = \varphi(d, (1 - \ell_k)A_k)$, $k = 1, 2, \dots$, следовательно,

$$MA_{k+1} = M\varphi(d, (1 - \ell_k)A_k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Решением уравнения (4.1), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(t, x) = x$, является функция $\varphi(t, x) = K + (x - K)e^{-at}$, поэтому

$$MA_{k+1} = M(K + ((1 - \ell_k)A_k - K)e^{-ad}) = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}M((1 - \ell_k)A_k).$$

Случайные величины ℓ_k и A_k независимы, тогда $M((1 - \ell_k)A_k) = (1 - M\ell_k)MA_k = (1 - M\ell(u))MA_k$ и следовательно,

$$MA_{k+1} = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}(1 - M\ell(u))MA_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

В силу леммы 3.1, существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} MA_k$, поэтому можно перейти к пределу в (4.2). Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} MA_k = A(u)$, тогда $A(u) = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}(1 - M\ell(u))A(u)$. Отсюда находим, что

$$A(u) = \frac{K(1 - e^{-ad})}{1 - e^{-ad}(1 - M\ell(u))}.$$

В силу теоремы 3.2, $H(\bar{\ell}, x_0) = M\ell(u) \lim_{k \rightarrow \infty} MA_k = M\ell(u)A(u)$. Рассмотрим функцию

$$H(u) \doteq M\ell(u)A(u) = \frac{K(1 - e^{-ad})M\ell(u)}{1 - e^{-ad}(1 - M\ell(u))}.$$

Несложно показать, что $H(u)$ достигает наибольшего значения, если $M\ell(u)$ максимально.

В [6] показано, что, если функция распределения F абсолютно непрерывна, то математическое ожидание случайной величины $\ell(\omega, u)$ равно

$$M\ell(u) = \int_0^u tf(t)dt + u(1 - F(u)), \quad (4.3)$$

где через f обозначена плотность данного распределения. В этом примере распределение F равномерное на отрезке $[0, 1]$, поэтому $f(t) = 1$ при $t \in [0, u]$, $F(u) = u$. Следовательно, из (4.3) получаем, что $M\ell(u) = u - \frac{u^2}{2}$. Функция $M\ell(u)$ достигает наибольшего значения при $u = 1$, при этом $H(1) = \frac{K(1 - e^{-ad})}{2 - e^{-ad}}$. Таким образом, можно сделать вывод, что для достижения наибольшей средней временной выгоды для популяции (4.2) долю добываемого ресурса ограничивать не нужно. Отметим, что если популяция задана уравнениями 2–5, приведенными в замечании 1.1, то этот вывод является неверным, так как все данные уравнения имеют решения $\varphi(t, 0) \equiv 0$.

Пример 4.2. Рассмотрим популяцию, заданную логистическим уравнением

$$\dot{x} = (a - bx)x, \quad (4.4)$$

где $a > 0$, $b > 0$; считаем, что начальный размер популяции $x_0 \geq 0$. Найдем оценки средней временной выгоды для уравнения (4.4), выполненные с вероятностью единица.

Решением уравнения (4.4), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, x) = x$, является функция

$$\varphi(t, x) = \frac{axe^{at}}{a + bx(e^{at} - 1)}, \quad (4.5)$$

поэтому уравнение (2.1) при любом $u \in [0, 1]$ имеет нулевую неподвижную точку. Отметим, что $\varphi(d, 0) = 0$ и $\varphi'_x(d, 0) = e^{ad}$. В силу утверждения 2.2, при $u \in [0, 1 - e^{-ad})$ уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$, такую, что $0 < X(u) \leq K = \frac{a}{b}$. Непосредственные вычисления показывают, что $X(u) = \frac{ae^{ad}(1 - u) - a}{b(e^{ad} - 1)(1 - u)}$. При $u \in [1 - e^{-ad}, 1]$ уравнение (2.1) имеет только нулевую неподвижную точку.

Таким образом, при $u < 1 - e^{-ad}$ неравенства (2.3) имеют вид

$$M\ell(u) \frac{ae^{ad}(1 - u) - a}{b(e^{ad} - 1)(1 - u)} \leq H_*(\bar{\ell}, x_0) \leq \frac{a}{b} M\ell(u). \quad (4.6)$$

При $u \in [1 - e^{-ad}, 1]$ в левой части (4.6) стоит ноль. В силу теоремы 2.1, неравенства (4.6) выполнены для любого $x_0 \in \left[\frac{ae^{ad}(1 - u) - a}{b(e^{ad} - 1)}, \frac{a}{b}\right]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Учитывая (4.5), аналогично примеру 4.1 найдем

$$MA_{k+1} = M\left(\frac{ae^{ad}(1-\ell_k)A_k}{a+b(e^{ad}-1)(1-\ell_k)A_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку функция $\varphi(d, x)$ выпукла вниз, то в силу неравенства Иенсена и с учетом независимости случайных величин ℓ_k и A_k имеем

$$MA_{k+1} \leq \frac{ae^{ad}(1-M\ell(u))MA_k}{a+b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))MA_k}. \quad (4.7)$$

Переходя к пределу в (4.7) и решая полученное неравенство, получаем

$$A(u) \leq \frac{a(1-M\ell(u))e^{ad}-a}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}.$$

Отсюда в силу теоремы 3.2 для средней временной выгоды получаем оценку сверху, выполненную с вероятностью единица,

$$H(\bar{\ell}, x_0) = M\ell(u)A(u) \leq M\ell(u) \frac{a(1-M\ell(u))e^{ad}-a}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}.$$

Объединяя последнее неравенство с (4.6), окончательно получаем, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ при $u < 1 - e^{-ad}$ выполнены неравенства

$$aM\ell(u) \frac{e^{ad}(1-u)-1}{b(e^{ad}-1)(1-u)} \leq H(\bar{\ell}, x_0) \leq aM\ell(u) \frac{e^{ad}(1-M\ell(u))-1}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}. \quad (4.8)$$

З а м е ч а н и е 4.1. Неравенство (4.8) можно записать в сокращенном виде следующим образом:

$$M\ell(u)X(u) \leq H(\bar{\ell}, x_0) \leq M\ell(u)X(M\ell(u)), \quad (4.9)$$

где $X(u)$ — неподвижная точка уравнения (2.1). Отметим, что (4.9) верно не только для логистического уравнения (4.4), но и для любого дифференциального уравнения, у которого решение $\varphi(d, x)$ обладает свойством выпуклости вниз.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, д.ф.-м.н. Л. И. Родиной за внимание к работе и руководство ее выполнением.

References

- [1] W. J. Reed, “The steady state of a stochastic harvesting model”, *Mathematical Biosciences*, **41**:3–4 (1978), 273–307.
- [2] A. Glait, “Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth”, *Mathematical Biosciences*, **41**:1–2 (1978), 111–123.
- [3] R. Lande, S. Engen, B. E. Saether, *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, 2003.
- [4] S. J. Schreiber, M. Benaïm, K. A. S. Atchadé, “Persistence in fluctuating environments”, *Journal of Mathematical Biology*, **62**:5 (2011), 655–683.

- [5] O. Tahvonen, M.F. Quaas, R. Voss, “Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries”, *Journal of Environmental Economics and Management*, **92** (2018), 659–676.
- [6] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28:1** (2018), 48–58. [L.I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28:1** (2018), 48–58 (In Russian)].
- [7] Л. И. Родина, “Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28:2** (2018), 213–221. [L.I. Rodina, “Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28:2** (2018), 213–221 (In Russian)].
- [8] B. Yang, Y. Cai, K. Wang, W. Wang, “Optimal harvesting policy of logistic population model in a randomly fluctuating environment”, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **526** (2019), 120817.
- [9] A. Hening, K.Q. Tran, T.T. Phan, G. Yin, “Harvesting of interacting stochastic populations”, *Journal of Mathematical Biology*, **79:2** (2019), 533–570.
- [10] Л. И. Родина, “Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса”, *Вестник российских университетов. Математика*, **23:124** (2018), 685–695. [L.I. Rodina, “About one stochastic harvesting model of a renewed resource”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **23:124** (2018), 685–695 (In Russian)].
- [11] Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина, “Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции”, *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **56** (2020), 41–49. [Yu. V. Masterkov, L. I. Rodina, “Estimation of average time profit for stochastic structured population”, *Izv. IMI UdGU*, **56** (2020), 41–49 (In Russian)].
- [12] А. А. Родин, Л. И. Родина, А. В. Черникова, “О способах эксплуатации популяции, заданной разностным уравнением со случайными параметрами”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **32:2** (2022), 211–227. [A. A. Rodin, L. I. Rodina, A. V. Chernikova, “On how to exploit a population given by a difference equation with random parameters”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **32:2** (2022), 211–227 (In Russian)].
- [13] А. В. Черникова, “О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27:140** (2022), 386–404. [A. V. Chernikova, “About existence of the limit of the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27:140** (2022), 386–404 (In Russian)].
- [14] T. Uppmann, S. Behringer, “Harvesting a remote renewable resource”, *Theoretical Ecology*, **13:4** (2020), 459–480.
- [15] M. Liu, “Optimal Harvesting of Stochastic Population Models with Periodic Coefficients”, *Journal of Nonlinear Science*, **32:2** (2022), 1–14.
- [16] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 232 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Scientific-Publishing Centre “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk, 2002 (In Russian), 232 pp.]
- [17] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, Наука, М., 1989, 580 с. [A. N. Shiryaev, *Probability-1*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 580 pp.]
- [18] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Издательство ННГУ, Н. Новгород, 2007, 324 с. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Mathematical Modelling of Selection Processes*, Nizhny Novgorod University Press, Nizhnii Novgorod, 2007 (In Russian), 324 pp.]

Информация об авторе

Волдеаб Мебрахтом Себхату, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: mebseb2018@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1586-4728>

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.

Поступила после рецензирования 03.03.2023 г.

Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the author

Mebrahtom S. Woldeab, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation.

E-mail: mebseb2018@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1586-4728>

Received 18.01.2023

Reviewed 03.03.2023

Accepted for press 10.03.2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ивановский Л.И., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-39-50

УДК 517.938



Динамические свойства одной импульсной задачи Коши

Леонид Игоревич ИВАНОВСКИЙ

ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, 14

Аннотация. Рассматривается модель полносвязной ассоциации нейронов с синаптической электрической связью, представляющая собой систему m дифференциальных уравнений с запаздыванием. Специальной заменой эта система приводится к системе импульсных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для соответствующей динамической системы в случае $m = 3$ изучаются вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений на основании бифуркационного анализа двумерного отображения — оператора сдвига по траекториям решения специальной системы двух дифференциальных уравнений. Особое внимание уделяется числу сосуществующих устойчивых режимов. Исследуется задача нахождения параметров, для которых количество таких режимов максимально. Для поиска неподвижных точек полученного двумерного отображения используется численное исследование, основанное на следующей итерационной процедуре. Выбирается начальная точка, методом Рунге–Кутты с заданным шагом вычисляются значения решения на отрезке $[0, T]$, в конечной точке T этого отрезка значение решения сравнивается с начальным и, если отклонение превышает заданное значение, то значение в конечной точке принимается за начальное и цикл вычислений методом Рунге–Кутты повторяется. Вычисления заканчиваются, если достигнуто требуемое малое отклонение, т. е. найдена неподвижная точка оператора сдвига, и соответствующий устойчивый периодический режим, или если количество итераций достигает заданного большого числа, что свидетельствует об отсутствии неподвижной точки. В работе представлены результаты проведенного численного исследования, позволившего продемонстрировать основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве двумерного отображения. Полученные неподвижные точки позволяют найти асимптотические устойчивые решения исходной задачи.

Ключевые слова: модель полносвязной ассоциации нейронов, фазовые портреты, устойчивые режимы, бифуркации

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>).

Для цитирования: *Ивановский Л.И.* Динамические свойства одной импульсной задачи Коши // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 39–50. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-39-50.

SCIENTIFIC ARTICLES

© L. I. Ivanovsky, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-39-50



Dynamic properties of one impulse Cauchy problem

Leonid I. IVANOVSKY

P. G. Demidov Yaroslavl State University

14 Sovetskaya St., Yaroslavl 150003, Russian Federation

Abstract. A model of a fully connected association of neurons with a synaptic electrical connection which is a system of m differential equations with delay is considered. By a special substitution, this system is reduced to a system of impulsive ordinary differential equations. For the corresponding dynamical system in the case $m = 3$, we study the existence, stability, and asymptotic representation of periodic solutions on the basis of a bifurcation analysis of a two-dimensional mapping, a shift operator along trajectories of a solution to a special system of two differential equations. Particular attention is paid to the number of coexisting stable regimes. We study the problem of finding parameters for which the number of such modes is maximum. In order to search the fixed points of the resulting two-dimensional mapping, a numerical study is used based on the following iterative procedure. Selected the starting point, the Runge-Kutta method with a given step calculates the solution values on the segment $[0, T]$. At the end point T of this segment, the solution value is compared with the initial one and if the deviation exceeds the specified value, then the value at the end point is taken as the initial one and the calculation cycle by the Runge-Kutta method is repeated. The calculations terminate when the required small deviation is reached, i.e., a fixed point of the shift operator is found, and so is the corresponding stable periodic mode, or when the number of iterations reaches a given large number, and this indicates the absence of a fixed point. The paper presents the results of a numerical study that made it possible to demonstrate the main rearrangements occurring in the phase space of a two-dimensional mapping. The obtained fixed points allow us to find asymptotic stable solutions of the original problem.

Keywords: model of a fully connected association of neurons, phase portraits, stable regimes, bifurcations

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-11-00209, <https://rscf.ru/en/project/22-11-00209/>).

Mathematics Subject Classification: 34D05, 34D20, 65L06, 65L11.

For citation: Ivanovsky L.I. Dynamic properties of one impulse Cauchy problem. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 39–50. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-39-50. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение

Рассмотрим математическую модель функционирования отдельного нейрона, представляющую собой скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение вида (см. [1])

$$\dot{u} = \lambda(-1 + \alpha f(u(t-1)) - \beta g(u))u, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Будем полагать $u(\tau) = \varphi(\tau)$ при $\tau \in [-1, 0]$, где $\varphi \in C[-1, 0]$ — заданная начальная функция. Для параметров λ (характеризующего скорость протекания электрических процессов), α и β выполняются следующие условия:

$$\lambda \gg 1, \quad \beta > 0, \quad \alpha > 1 + \beta. \quad (1.2)$$

Гладкие функции $f(u), g(u)$ будем считать принадлежащими классу $C^2(\mathbb{R}_+)$. Эти функции обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} f(0) = g(0) = 1; \quad 0 < \beta g(u) < \alpha \quad \forall u \in \mathbb{R}_+; \\ f(u), g(u), u f'(u), u g'(u), u^2 f''(u), u^2 g''(u) = O(1/u) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнение (1.1) называют модифицированным логистическим уравнением. В статьях [2–4] было показано, что это уравнение при всех $\lambda \gg 1$ допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u_*(t, \lambda) > 0, \quad u_*(0, \lambda) \equiv 1 \quad (1.4)$$

периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющего предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0, \quad T_0 = \alpha + 1 + (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1), \quad (1.5)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T_*(\lambda)} |x_*(t, \lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty,$$

в которых величина T_0 составляет главную часть периода устойчивого цикла (1.4), функция x_* задается равенством $x_*(t, \lambda) = (1/\lambda) \ln u_*(t, \lambda)$, а x_0 — T_0 -периодическая функция, определяемая формулой

$$x_0(t) = \begin{cases} (\alpha - 1)t, & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ \alpha - t, & \text{при } 1 \leq t \leq \alpha, \\ -(1 + \beta)(t - \alpha), & \text{при } \alpha \leq t \leq \alpha + 1, \\ (\alpha - \beta - 1)(t - \alpha - 1) - 1 - \beta, & \text{при } \alpha + 1 \leq t \leq T_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Предположим, что имеется сеть из $m \geq 2$ нейронов с мембранными потенциалами $u_j = u_j(t) > 0$, $j = \overline{1, m}$, каждый из которых взаимодействует с любым другим. Согласно [5, с. 60–65] связь между нейронами с номерами j и s , $j \neq s$ осуществляется посредством тока проводимости $I_{j,s}^{syn}$, который в силу закона Ома задается равенством

$$I_{j,s}^{syn} = d(u_s - u_j), \quad d > 0. \quad (1.7)$$

Одна из возможных моделей полносвязной ассоциации электрических синапсов, основанная на модели из статьи [6], может быть представлена системой вида

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m (u_s - u_j) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}.$$

В статье [6] была приведена модификация данной системы, заключающаяся в замене выражения (1.7) для тока проводимости соотношением

$$I_{j,s}^{syn} = \sigma\left(\frac{u_s}{u_j}\right), \quad d > 0,$$

где функция связи $\sigma(u) \in C^3(\mathbb{R}_+)$, ограничивающая значения переменных u_j , удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{aligned} \sigma(u) < 0 \quad \text{при} \quad u \in [0, 1), \quad \sigma(0) = -1, \\ \sigma(u) > 0 \quad \text{при} \quad u > 1, \quad \sigma(1) = 0, \quad \sigma'(1) > 0, \\ \sigma(u) - \delta, u\sigma'(u), u^2\sigma''(u), u^3\sigma'''(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u \rightarrow +\infty, \quad \delta = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Что же касается модели соответствующей ассоциации нейронов с синаптической электрической связью, то в данном случае она приобретает вид

$$\dot{u}_j = d \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^m \sigma\left(\frac{u_s}{u_j}\right) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.9)$$

В [6] отмечены два отличия приведенного подхода к моделированию электрических синапсов от общепринятого. Во-первых при переходе от отдельного нейрона к соответствующей сети сохраняется вольтерровская структура уравнений, а во-вторых, соблюден так называемый «закон насыщающих проводимостей», который заключается в выполнении условий (1.3), (1.8) для нелинейных функций. Тем самым, модели отдельного нейрона (1.1) и нейронной сети (1.9) базируются на одних и тех же принципах, сформулированных в работе [1]. Отметим, что под вольтерровской структурой уравнений (1.9) здесь подразумевается возможность записи их правых частей в виде произведения соответствующей зависимой переменной и некоторой неособой в нуле функции, что позволяет гарантировать положительность решений с положительными начальными условиями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим предложенную в статье [6] ассоциацию сингулярно возмущенных осцилляторов с запаздыванием (1.9), моделирующую электрическое взаимодействие нейронов по принципу «каждый с каждым». Для параметров λ, α, β этой системы полагаем, что выполнены условия (1.2), а для гладких функций $f, g \in C^2(\mathbb{R}_+)$ — условия (1.3).

В качестве конкретного примера функции связи, удовлетворяющей требованиям (1.8), выберем (см. [6])

$$\sigma(u) = \frac{\delta(u-1)}{u+\delta}, \quad \delta \in (0, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty).$$

В силу равенства $\sigma(1) = 0$ система (1.9) допускает так называемый однородный цикл

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda), \quad (2.1)$$

где $u_*(t, \lambda)$ — устойчивое периодическое решение уравнения (1.1) периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющего предельному соотношению (1.5). В статье [6] показано, что периодическое

решение $u_*(t, \lambda)$ с периодом $T_*(\lambda)$ асимптотически близко при $\lambda \gg 1$ к величине $e^{\lambda x_0(t)}$, где $x_0(t)$ — T_0 -периодическая функция, которая задается равенствами (1.6).

Не проводя исследования всех периодических режимов системы (1.9), ограничимся рассмотрением лишь тех из них, которые располагаются в некоторой окрестности однородного цикла (2.1). При нахождении таких режимов можно применить специальные асимптотические методы, разработанные и примененные в статьях [1–4, 7, 8] для аналогичных (1.9) систем из трех осцилляторов вида (см. [9–14])

$$\dot{u}_j = d(a_1 u_{j-1} - a_2 u_j + u_{j+1}) + \lambda(-1 + \alpha f(u_j(t-1)) - \beta g(u_j))u_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

с различными значениями параметров a_1, a_2 и следующими краевыми условиями на u_0, u_4 :

- а) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_1, u_3 = u_4$;
- б) $a_1 = 1, a_2 = 2, u_0 = u_3, u_1 = u_4$ (цепочка и кольцо диффузионно связанных осцилляторов);
- в) $a_1 = 0, a_2 = 1, u_1 = u_4$ (кольцо однонаправленно связанных осцилляторов).

В системе (1.9) выполним замены

$$u_1 = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_j = \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = \overline{2, m}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda} \ll 1, \quad (2.3)$$

где $x, y_1, \dots, y_{m-1}$ — новые переменные (такие же замены производились в [3, 4] для системы (2.2)). В результате такой замены систему (1.9) можно свести к системе

$$\dot{x} = \varepsilon d \sum_{s=2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=1}^{s-1} y_r\right)\right) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_j = & d \sum_{s=1}^j \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^j y_r\right)\right) + d \sum_{s=j+2}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j+1}^{s-1} y_r\right)\right) \\ & - d \sum_{s=1}^{j-1} \sigma\left(\exp\left(-\sum_{r=s}^{j-1} y_r\right)\right) - d \sum_{s=j+1}^m \sigma\left(\exp\left(\sum_{r=j}^{s-1} y_r\right)\right) \\ & + G_j(x, x(t-1), y_1, \dots, y_j, y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \quad j = \overline{1, m-1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

для которой функции F, G задаются равенствами

$$F(x, u, \varepsilon) = -1 + \alpha f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)\right) - \beta g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$\begin{aligned} G_j(x, u, y_1, \dots, y_j, v_1, \dots, v_j, \varepsilon) = & \frac{\alpha}{\varepsilon} \left[f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j v_k\right)\right) - f\left(\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k\right)\right) \right] \\ & + \frac{\beta}{\varepsilon} \left[g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right)\right) - g\left(\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k\right)\right) \right], \quad j = \overline{1, m-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим данную задачу в случае трех осцилляторов ($m = 3$). Зафиксируем $\sigma_0 \in (0, \min \{1, (\beta + 1)/(\alpha - \beta - 1)\})$ и обозначим через $y_1^0(t, z)$, $y_2^0(t, z)$ (где $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0$) компоненты решения следующей импульсной задачи Коши (см. [4])

$$\begin{cases} y_1 = d(\sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{y_1}) + \sigma(e^{y_2}) - \sigma(e^{y_1+y_2})), \\ y_2 = d(\sigma(e^{-y_2}) - \sigma(e^{y_2}) + \sigma(e^{-y_1}) - \sigma(e^{-y_1-y_2})). \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} y_j(+0) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha - \beta - 1} y_j(-0), \quad y_j(1+0) = y_j(1-0) - \frac{\alpha}{\alpha - 1} y_j(+0), \\ y_j(\alpha + 0) &= (1 + \beta) y_j(\alpha - 0), \\ y_j(\alpha + 1 + 0) &= y_j(\alpha + 1 - 0) - \frac{\alpha}{1 + \beta} y_j(\alpha + 0), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$(y_1, y_2)|_{t=-0} = z.$$

Рассмотрим оператор сдвига за время от 0 до T_0 по траекториям дифференциальной импульсной системы (2.6), (2.7)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \Phi(z) = \begin{pmatrix} y_1^0(T_0, z) \\ y_2^0(T_0, z) \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

Для отображения (2.8) справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1 (см. [6, теорема 1]). *Любой гиперболической неподвижной точке $z = z_*$ отображения (2.8) в системе (2.4), (2.5) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл*

$$(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1}(t, \varepsilon)), \quad x(0, \varepsilon) \equiv 0$$

периода $T(\varepsilon)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которого определяются соответствующими многообразиями этой точки. Кроме того, справедливы соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T_0, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |x(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_j^0(t, \varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| = 0, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 + \sigma_0} |y_j(t, \varepsilon)| \leq M, \quad j = \overline{1, m-1},$$

где $x_0(t)$ — функция, определяемая по формуле (1.6), $M = \text{const} > 0$, а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T_0 + \sigma_0]$ с выброшенными интервалами $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha - \varepsilon^\delta, \alpha + \varepsilon^\delta)$, $(\alpha + 1 - \varepsilon^\delta, \alpha + 1 + \varepsilon^\delta)$, где $\delta = \text{const} \in (0, 1)$.

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в аналогичных ситуациях оно подробно изложено в статьях [3, 7]. Из теоремы следует, что для того, чтобы говорить об устойчивых циклах системы (1.9) и системы (2.6), (2.7) соответственно, достаточно изучить неподвижные точки отображения (2.8). Они и являлись объектами исследования.

Асимптотический анализ отображения (2.8), выполненный в статье [6], позволяет показать, что при достаточно малых значениях параметра d оно совпадает с оператором сдвига за время $t = 1$ по траекториям системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\tilde{z}_1}{dt} = 2 - \frac{C \exp \tilde{z}_1}{1 + \exp \tilde{z}_1}, \quad \frac{d\tilde{z}_2}{dt} = \frac{C \exp(-\tilde{z}_2)}{1 + \exp \tilde{z}_2} - 2,$$

где C — константа, зависящая от значений параметров α, β . Исходя из этого, отображение (2.8) имеет только одно устойчивое состояние равновесия $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$. При этом нулевое состояние равновесия устойчиво для любых значений d . Ему соответствует однородный цикл системы (1.9).

Задача исследования состояла в определении таких значений параметров α и β , при которых отображение (2.8) имеет наибольшее число устойчивых неподвижных точек. Также изучались вопросы фазовых перестроек, происходящих в фазовом пространстве отображения (2.8). Поскольку описать динамические свойства отображения (2.8) в полной мере с использованием одного лишь аналитического аппарата затруднительно, исследование осуществлялось на основе сочетания аналитических методов и численных экспериментов. В зависимости от различных значений начальных параметров изучались вопросы существования и устойчивости релаксационных периодических решений. В процессе исследования, особое внимание уделялось числу сосуществующих устойчивых режимов отображения (2.8).

3. Поиск неподвижной точки релаксационного отображения

Расчет координат неподвижных точек отображения (2.8) выполняется следующим образом: вычисления начинаются из точек вида $(y_1(-0), y_2(-0))^T$, координаты которых представляют собой начальные условия системы (2.6), (2.7). Начальным моментом времени здесь считается величина $t = -0$. Стартовые точки отображения (2.8) варьировались по ходу проведения численных исследований, оставаясь при этом в окрестности нулевого состояния равновесия.

Для каждой начальной точки отображения (2.8), итерационно, с фиксированным шагом h , при помощи метода Рунге–Кутты подсчитывались координаты следующей точки. Этот метод имеет четвертый порядок точности, т. е. ошибка на каждом интервале подсчета будет иметь порядок $O(h^5)$. Вычисления такого рода продолжаются до тех пор, пока не будет получена так называемая конечная точка отображения (2.8) в момент времени $t = T_0$. Однако стоит отметить, что для $t = 0, 1, \alpha, \alpha + 1$ в системе (1.9) выполняются условия соответствующего импульсного воздействия. Как следствие, координаты точки в этих случаях подсчитываются по формулам (2.7).

Далее происходит проверка стационарности для каждой полученной конечной точки отображения (2.8). Если ее координаты отличаются от координат начальной точки не более чем на заранее заданное, достаточно малое число, то посчитанное ранее состояние отображения $(y_1(T_0), y_2(T_0))^T$ считается устойчивым. В противном же случае, конечная точка отображения (2.8) считается начальной и для нее осуществляется та же последовательность операций, которая была описана ранее.

Для каждой начальной точки отображения (2.8) расчеты заканчивались при достижении достаточно большого числа описанных выше итераций получения конечной точки отображения (2.8) или при обнаружении неподвижного состояния равновесия.

4. Результаты численного исследования

Расчет неподвижных точек релаксационного отображения (2.8) зависит не только от выбора начальной точки и значений α, β , но также и от величины δ , являющейся параметром функции $\sigma(u)$.

В результате проведенных численных исследований для $\delta \in (2 + \sqrt{3}, +\infty)$ на коорди-

натной плоскости параметров (α, β) были выделены области $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$, $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$, границами которых являются прямые $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$, $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$. Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 1.

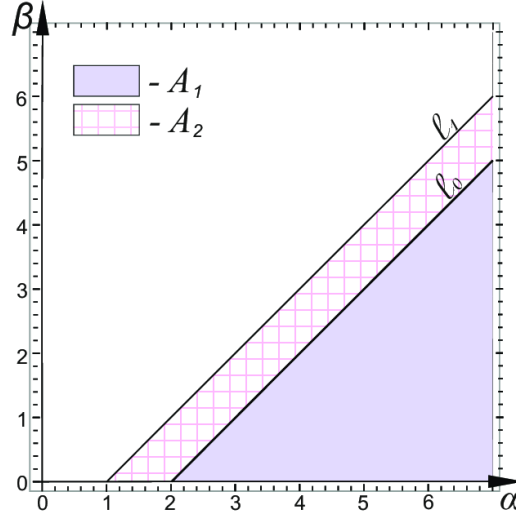


Рис. 1. Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Далее рассмотрим типичные бифуркации для каждой из введенных областей (в статьях [11–14] были продемонстрированы результаты аналогичных исследований для систем вида (2.2) с различными значениями параметров a_1, a_2 и краевыми условиями на u_0, u_4).

Согласно результатам проведенных численных исследований, при изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in A_1$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для определенности возьмем $\alpha = 3,6$ и $\beta = 0,4$. При изменении параметра d для заданных величин α и β получается следующая последовательность бифуркаций:

1. При $d < d_1$; $d_1 \approx 0.025$ отображение (2.8) имеет четыре устойчивые неподвижные точки (S_0, S_1, S_2, S_3) и три неустойчивые (U_0, U_1, U_2). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 2.

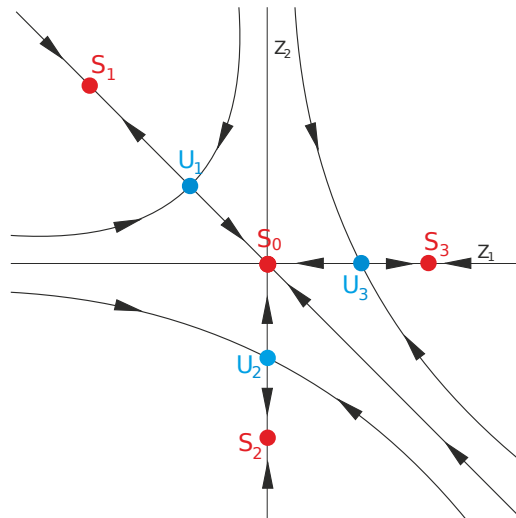


Рис. 2. Фазовый портрет отображений при $d < d_1$

2. При $d = d_1$ устойчивые узлы S_1 , S_2 и S_3 , сливаясь с седлами U_1 , U_2 и U_3 , пропадают. Тем самым, при $d > d_1$ отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние S_0 .

Полученный сценарий фазовых перестроек остается верным для любых $(\alpha, \beta) \in A_1$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра d .

Согласно результатам проведенных численных исследований, при изменении параметра d для любых фиксированных значений пары $(\alpha, \beta) \in A_2$ в фазовом пространстве отображения наблюдается один и тот же сценарий фазовых перестроек. Для удобства зафиксируем величины $\alpha = 1,9$ и $\beta = 0,1$ и будем менять значение параметра d . В результате для отображения (2.8) получим следующую последовательность бифуркаций:

1. При $d < d_1$; $d_1 \approx 0,002$ отображение (2.8) имеет четыре устойчивые неподвижные точки (S_0 , S_1 , S_2 , S_3) и три неустойчивые (U_0 , U_1 , U_2). Схематическое изображение фазового портрета для данного случая можно увидеть на рис. 3.

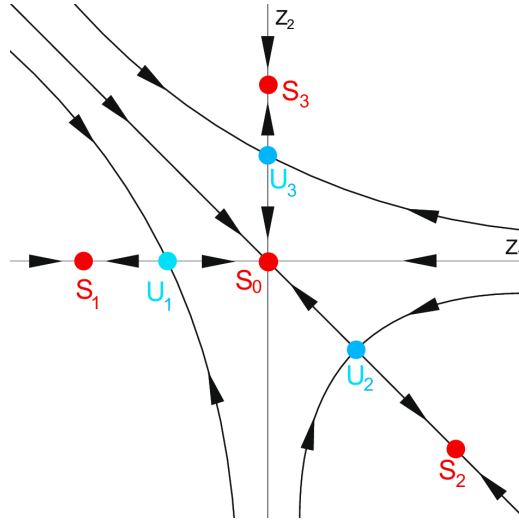


Рис. 3. Фазовый портрет отображений при $d < d_1$

2. При $d = d_1$ устойчивые узлы S_1 , S_2 и S_3 , сливаясь с седлами U_1 , U_2 и U_3 , пропадают. Тем самым, при $d > d_1$ отображение имеет лишь одно единственное нулевое устойчивое состояние S_0 .

Полученный сценарий фазовых перестроек остается верным для любых $(\alpha, \beta) \in A_2$. Отличия от рассмотренного случая состоят лишь в числовых выражениях бифуркационных значений параметра d .

Различия фазовых портретов, представленных на рис. 2 и 3, заключаются лишь в местоположении неустойчивых седел U_1 , U_2 , U_3 , а также устойчивых узлов S_1 , S_2 , S_3 . В связи с этим возник вопрос, как изменяется поведение состояний равновесия при переходе из одной области параметров в другую. В результате численного исследования,

при зафиксированных α и d и изменении значения β , на прямой l_1 обнаруживалось существование двух многообразий: неустойчивого M_U и устойчивого M_S (см. рис. 4).

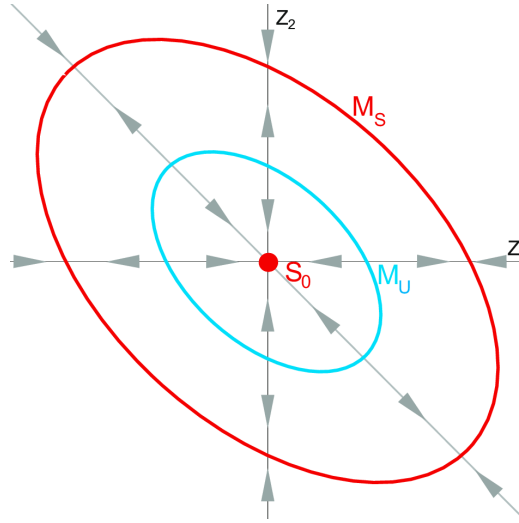


Рис. 4. Фазовый портрет отображения для параметров $(\alpha, \beta) \in l_1$

В том случае, если параметр $\delta \in (0, 2 - \sqrt{3})$, согласно результатам проведенных численных исследований, на координатной плоскости параметров (α, β) также можно выделить области $A_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta > 0, \beta < l_0\}$, $A_2 = \{(\alpha, \beta) : \beta > l_0, \beta < l_1\}$, границами которых являются прямые $l_0 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 2\}$, $l_1 = \{(\alpha, \beta) : \beta = \alpha - 1\}$. Графическая визуализация данных множеств приведена на рис. 4. Отметим, что выделенные области A_1, A_2 значений параметров (α, β) в точности определяли сценарии аналогичных фазовых перестроек, описанных выше.

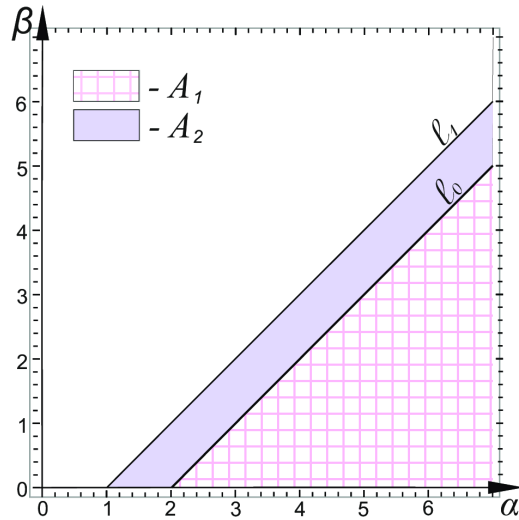


Рис. 4. Разбиение на области параметров с одинаковыми бифуркационными сценариями

Полученные в результате анализа отображения (2.8) его неподвижные точки позволяют найти асимптотику решений системы (2.6), (2.7). На основе решений импульсной системы (2.6), (2.7), учитывая замену (2.3), получаем асимптотические устойчивые решения исходной задачи (1.9).

5. Заключение

Для полносвязной ассоциации сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, представляющих собой математическую модель импульсной системы, были изучены вопросы существования, устойчивости и асимптотического представления периодических решений с помощью бифуркационного анализа специального двумерного отображения, построенного в зависимости от различных значений параметров. Для динамической системы с импульсными воздействиями, полученной в результате преобразований полносвязной ассоциации осцилляторов, на координатной плоскости параметров были выделены области, соответствующие различным бифуркационным сценариям. Благодаря численному исследованию, в каждой из областей были подробно рассмотрены основные перестройки, происходящие в фазовом пространстве соответствующего двумерного отображения. Также были установлены множества значений начальных параметров, при которых возможно единовременное сосуществование большего числа устойчивых неподвижных точек.

References

- [1] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов”, *Успехи мат. наук*, **70**:3 (2015), 3–76; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited relaxation oscillations in networks of impulse neurons”, *Russian Mathematical Surveys*, **70**:3 (2015), 383–452.
- [2] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: I”, *Differential Equations*, **47**:7 (2011), 927–941.
- [3] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:12 (2011), 1675–1692; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: II”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1697–1713.
- [4] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в нейронных системах. III”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:2 (2012), 155–170; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in neuron systems: III”, *Differential Equations*, **48**:2 (2012), 159–175.
- [5] С. А. Кащенко, В. В. Майоров, *Модели волновой памяти*, Либроком, М., 2009. [S. A. Kashchenko, V. V. Mayorov, *Modeli Volnovoy Pamyati*, Librokom Publ., Moscow, 2009 (In Russian)].
- [6] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, “Об одном способе математического моделирования электрических синапсов”, *Дифференциальные уравнения*, **58**:7 (2022), 1–15; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, “On a Method of Mathematical Modeling of Electrical Synapses”, *Differential Equations*, **58**:7 (2022), 853–868.
- [7] А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием”, *Успехи мат. наук*, **67**:2 (2012), 109–156; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Self-excited wave processes in chains of diffusion-linked delay equations”, *Russian Mathematical Surveys*, **67**:2 (2012), 297–343.
- [8] Д. С. Щапин, В. И. Некоркин, “Параметрически возбуждаемые хаотические спайковые последовательности и информационные аспекты в ансамбле нейронов ФитцХью–Нагумо”, *Письма в Журн. эксп. и теор. физики*, **113**:6 (2021), 415–420; англ. пер.: D. S. Shchapin, V. I. Nekorkin, “Parametrically Excited Chaotic Spike Sequences and Information Aspects in an Ensemble of FitzHugh–Nagumo Neurons”, *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, **113**:6 (2021), 418–422.
- [9] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы динамических систем с импульсными воздействиями”, *Динамические системы*, **6**:2 (2016), 113–132. [L. I. Ivanovsky, “Stable modes of dynamical systems with impulses”, *Dynamic Systems*, **6**:2 (2016), 113–132 (In Russian)].

- [10] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Вычисл. техн. в естеств. науках. методы суперкомп. модел.*, **2** (2015), 121–132. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Dynamics of two-dimensional mapping and stable regimes of singularly perturbed neuron system”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers*, **2** (2015), 121–132 (In Russian)].
- [11] Л. И. Ивановский, “Динамические свойства одного класса импульсных систем”, *Вычисл. техн. в естеств. науках. методы суперкомп. модел.*, **3** (2015), 126–131. [L. I. Ivanovsky, “Dynamic properties of one class of impulse systems”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers*, **3** (2015), 126–131 (In Russian)].
- [12] Л. И. Ивановский, “Устойчивые режимы одного класса динамических систем с импульсными воздействиями”, *Вычисл. техн. в естеств. науках. методы суперкомп. модел.*, **4** (2017), 35–42. [L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of one class of dynamic systems with impulse influences”, *Computer Technologies in Sciences. Methods of Simulations on Supercomputers*, **4** (2015), 35–42 (In Russian)].
- [13] Л. И. Ивановский, С. О. Самсонов, “Фазовые перестройки одной двумерной динамической системы с импульсным воздействием”, *Модел. и анализ. информ. систем*, **21:6** (2014), 179–181. [L. I. Ivanovsky, S. O. Samsonov, “Phase reconstructions of one two-dimensional dynamical system with impulses”, *Modeling and Analysis of Information Systems*, **21:6** (2014), 179–181 (In Russian)].
- [14] L. I. Ivanovsky, “Stable regimes of dynamic systems with impulsive influences”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38:5** (2017), 921–925.

Информация об авторе

Ивановский Леонид Игоревич, младший научный сотрудник, Объединенный институт математики и компьютерных наук им. А. Н. Колмогорова, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, г. Ярославль, Российская Федерация. E-mail: leon19unknown@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

Поступила в редакцию 17.11.2022 г.

Поступила после рецензирования 23.02.2023 г.

Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the author

Leonid I. Ivanovsky, Junior Researcher, A. N. Kolmogorov Institute of Mathematics and Computer Science, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation. E-mail: leon19unknown@gmail.com

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4717-5129>

Received 17.11.2022

Reviewed 23.02.2023

Accepted for press 10.03.2023

SCIENTIFIC ARTICLES

© A. Ponosov, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-51-59



Existence and uniqueness of solutions to stochastic fractional differential equations in multiple time scales

Arcady PONOSOV

Norwegian University of Life Sciences
№-1432 Ås 5003, Drøbakveien 31, Norway

Abstract. A novel class of nonlinear stochastic fractional differential equations with delay and the Jumarie and Itô differentials is introduced in the paper. The aim of the study is to prove existence and uniqueness of solutions to these equations. The main results of the paper generalise some previous findings made for the non-delay and three-scale equations under additional restrictions on the fractional order of the Jumarie differentials, which are removed in our analysis. The techniques used in the paper are based on the properties of the singular integral operators in specially designed spaces of stochastic processes, the representation of delay equations as functional differential equations as well as Picard's iterative method.

Keywords: Jumarie derivative, Brownian motion, multi-time scales

Mathematics Subject Classification: 60H20, 34A8, 34K50.

Acknowledgements: The author gratefully acknowledges the financial support from internal funding scheme at Norwegian University of Life Sciences (project no. 1211130114), which financed the international stay at Scuola Normale Superiore in Italy.

For citation: Ponosov A. Existence and uniqueness of solutions to stochastic fractional differential equations in multiple time scales. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 51–59. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-51-59.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Поносов А.В., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-51-59

УДК 519.216.2



Существование и единственность решений стохастических дробных дифференциальных уравнений в нескольких временных шкалах

Аркадий Владимирович ПОНОСОВ

Норвежский университет естественных наук

1432, Норвегия, г. Ос, Дрёбаквайен, 31

Аннотация. В статье вводится новый класс нелинейных стохастических дифференциальных уравнений дробного порядка с запаздыванием и дифференциалами Жюмари и Итô. Цель исследования — доказать существование и единственность решений этих уравнений. Основные результаты статьи обобщают некоторые предыдущие выводы, сделанные для уравнений без запаздывания с тремя временными шкалами и при дополнительных ограничениях на дробный порядок дифференциалов Жюмари, которые снимаются в нашем анализе. Методы, использованные в статье, основаны на свойствах сингулярных интегральных операторов в специально сконструированных пространствах случайных процессов, представлении уравнений с запаздыванием в виде функционально-дифференциальных уравнений, а также на итерационном методе Пикара.

Ключевые слова: производная Жюмари, броуновское движение, мультивременные шкалы

Благодарности: Автор выражает благодарность за финансовую поддержку работы в рамках внутренней программы Норвежского университета естественных наук (проект № 1211130114), которая финансировала международный визит в Высшую нормальную школу в Италии.

Для цитирования: Поносов А.В. Существование и единственность решений стохастических дробных дифференциальных уравнений в нескольких временных шкалах // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 51–59. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-51-59. (In Engl., Abstr. in Russian)

1. Introduction.

Processes operating in a multi-time scale modulus arise in a number of fields including finance, science and engineering. In [1] it was suggested to use the fractional Jumarie derivative introduced in [2] $v = \frac{df}{(dt)^\alpha}$ ($0 < \alpha \leq 1$) and the classical white noise $g = w \frac{dB}{dt}$ to model the deterministic and the stochastic parts of the multi-time scale processes, respectively. In the integral form this reads as

$$f(t) - f(0) = \alpha \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} v(s) ds \quad \text{and} \quad g(t) - g(0) = \int_0^t w(s) dB(s).$$

Adopting this approach we study the following fractional stochastic delay differential equation in multiple time scales:

$$dx(t) = \sum_{j=1}^m (f_j(t, (H_{1j}x)(t))(dt)^{\alpha_j} + g_j(t, (H_{2j}x)(t))dB_j(t)). \quad (1.1)$$

Here $f_j(t, v)$ and $g_j(t, v)$ are random functions and H_{1j} , H_{2j} are linear delay operators, $(dt)^{\alpha_j}$ are the fractional Jumarie differentials and $dB_j(t)$ are the Itô differentials generated by the standard scalar Wiener processes (Brownian motions) B_j . The initial condition for (1.1) is

$$x(s) = \varphi(s) \quad (s \leq 0), \quad (1.2)$$

where $\varphi(\omega, s)$ is some random function (not necessarily continuous).

A solution of the initial value problem (1.1), (1.2) is a stochastic process x satisfying (1.2) for $s \leq 0$ and the integral equation

$$x(t) - \varphi(0) = \sum_{j=1}^m \left(\int_0^t \alpha_j (t-s)^{\alpha_j-1} f_j(s, (H_{1j}x)(s)) ds + \int_0^t g_j(s, (H_{2j}x)(s)) dB_j(s) \right).$$

The main result of the paper is a generalization of the existence and uniqueness theorem from [1] to the case of Eq. (1.1) and its operator counterpart.

2. Preliminaries

We keep fixed a stochastic basis $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t \in R}, P)$ satisfying the standard conditions [3] assuming, in addition, that $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$ for all $t \leq 0$. All stochastic processes in this paper are supposed to be progressively measurable w.r.t. this stochastic basis or parts of it [3].

The following notation is used throughout the paper:

- $R = (-\infty, \infty)$, $R_+ = [0, \infty)$, $R_- = (-\infty, 0)$.
- μ is the Lebesgue measure defined on R or its subintervals.
- E is the expectation corresponding to the probability measure P .
- $B_j(t)$ ($t \in R_+$, $j = 1, \dots, m$) are the standard scalar Wiener processes.
- The space $\mathcal{L}_q(J, R^l)$ ($1 \leq q < \infty$, $J \subset R$ is a subinterval), contains all progressively measurable l -dimensional stochastic processes $x(t)$ ($t \in J$) such that $\int_J E|x(t)|^q dt < \infty$.
- The space $\mathcal{M}_p(J, R^l)$ ($1 \leq p < \infty$) consists of all progressively measurable, l -dimensional stochastic processes $x(t)$ ($t \in J$) such that

$$\sup_{t \in J} E|x(t)|^p < \infty.$$

- The space k^n consists of all n -dimensional, $\mathcal{F}_0$ -measurable random variables, and $k = k^1$ is a commutative ring of all scalar $\mathcal{F}_0$ -measurable random variables.

- The space $k_p^n = \{\xi : \xi \in k^n, E|\xi|^p < \infty\}$ ($1 \leq p < \infty$) is a linear subspace of k^n .

The spaces $\mathcal{L}_q(J, R^l)$, $\mathcal{M}_p(J, R^l)$ and k_p^n are supposed to be equipped with the natural norms. Clearly also that for $q \leq p$ and finite intervals J we have $\mathcal{M}_p(J, R^l) \subset \mathcal{L}_q(J, R^l)$, also in the topological sense (the topology of the larger space is weaker). We will also assume that $\mathcal{M}_p(J, R^l) \subset \mathcal{M}_p(J', R^l)$ if $J \subset J'$ by letting the processes on J to be 0 outside J .

3. Properties of some delay operators

Consider the delay operator

$$(Hx)(t) = x(h(t)), \quad (3.1)$$

Theorem 3.1. *Let $J = [0, T]$ and $1 \leq q < \infty$. Assume that $h(t)$ ($t \in J$) is a Borel function such that $h(t) \leq t$ μ -almost everywhere on J . Then the operator (3.1) is a linear bounded operator from $\mathcal{M}_q(R_- \cup J, R^n)$ to $\mathcal{M}_q(J, R^n)$.*

P r o o f. Evidently, H is linear and maps progressively measurable processes defined on $R_- \cup J$ to the ones defined on J . In addition, $\sup_{t \in J} E|x(h(t))|^q \leq \sup_{t \leq T} E|x(t)|^q$, which proves boundedness of H from $\mathcal{M}_q(R_- \cup J, R^n)$ to $\mathcal{M}_q(J, R^n)$. $\square$

Next, consider the distributed delay operator

$$(Hx)(t) = \int_{-\infty}^t d_s \mathcal{R}(t, s)x(s). \quad (3.2)$$

Theorem 3.2. *Let $J = [0, T]$ and $1 < q < \infty$. Assume that the values of $\mathcal{R}(t, s)$ ($t \in J, -\infty < s \leq t$) are $l \times n$ -matrices and $\mathcal{R}$ satisfies the following conditions:*

1. $\mathcal{R}$ is Borel measurable on its domain;
2. $\sup_{t \in J} \text{Var}_{-\infty}^t \mathcal{R}(t, \cdot) < \infty$.

Then the operator (3.2) is a linear bounded operator from $\mathcal{M}_r(R_- \cup J)$ to $\mathcal{M}_q(J, R^l)$.

P r o o f. Using the componentwise description of the operator (3.2) we may assume, without loss of generality, that $l = n = 1$, so that $(Hx)(t) = \int_{-\infty}^t x(s) d_s \mathcal{R}(t, s)$. Evidently, the operator H maps progressively measurable processes defined on $R_- \cup J$ to the ones defined on J . Putting $\text{Var}_{-\infty}^t[\mathcal{R}(t, \cdot)](s) \equiv \bar{\mathcal{R}}(t, s)$ we get

$$\begin{aligned} \sup_{t \in J} E \left| \int_{-\infty}^t x(s) d_s \mathcal{R}(t, s) \right|^q &\leq \sup_{t \in J} \left(E \int_{-\infty}^t |x(s)|^q d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \times \left(\int_{-\infty}^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^{q-1} \right) \\ &\leq \sup_{t \in J} \left(\int_{-\infty}^t E |x(s)|^q d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right) \times \sup_{t \in J} \left(\int_{-\infty}^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^{q-1} \\ &\leq \sup_{s \in R_- \cup J} E |x(s)|^q \sup_{t \in J} \left(\int_{-\infty}^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right) \times \sup_{t \in J} \left(\int_{-\infty}^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^{q-1} \\ &\leq \sup_{t \in R_- \cup J} E |x(t)|^q \sup_{t \in J} \left(\int_{-\infty}^t d_s \bar{\mathcal{R}}(t, s) \right)^q \leq \left(\sup_{t \in J} \text{Var}_{-\infty}^t \mathcal{R}(t, \cdot) \right) \sup_{t \in R_- \cup J} E |x(t)|^q \end{aligned}$$

which proves boundedness of H from $\mathcal{M}_q(R_- \cup J)$ to $\mathcal{M}_q(J, R^l)$. $\square$

R e m a r k 3.1. The delay operator (3.1) can be regarded as a particular case of the delay operator (3.2) if one puts $\mathcal{R}(t, s) = \text{diag}[\chi_h, \dots, \chi_h]$ to be the $n \times n$ diagonal matrix containing the indicator χ_h of the set $\{(t, s) : s \leq h(t)\}$. Moreover, if we define $\mathcal{R}(t, s)$ to be the $(rn) \times n$ -matrix of the form

$$\mathcal{R}(t, s) = (\text{diag}[\chi_{h_1}, \dots, \chi_{h_1}], \dots, \text{diag}[\chi_{h_r}, \dots, \chi_{h_r}]),$$

then we get the multiple delay operator $x(t) \mapsto (x(h_1(t)), \dots, x(h_r(t)))$.

4. Main results

Let us first consider the following fractional functional differential equation:

$$dy(t) = \sum_{j=1}^m ((F_j(y))(t)(dt)^{\alpha_j} + (G_j(y)x)(t)dB_j(t)), \quad t \in [0, T] \quad (4.1)$$

equipped with the initial condition

$$y(0) = y_0 \in k_p^n. \quad (4.2)$$

The solution of Eq. (4.1) is understood in the following sense:

$$y(t) - y(0) = \sum_{j=1}^m \left(\alpha_j \int_0^t (t-s)^{\alpha_j-1} F_j(y)(s) ds + \int_0^t G_j(y)(s) dB_j(s) \right), \quad t \in [0, T]. \quad (4.3)$$

D e f i n i t i o n 4.1. Let X, Y be two separable metric spaces and $\sigma : \Omega \times X \rightarrow Y$ be a random map. The operator $x(\cdot) \rightarrow \sigma(\cdot, x(\cdot))$ is called the superposition operator generated by σ .

D e f i n i t i o n 4.2.

- A continuous map $V : X \rightarrow Y$, where X, Y are two separable metric spaces of functions defined on an interval $J \subset R$ is called Volterra if

$$x_1(s) = x_2(s) \Rightarrow (Vx)(s) = (Vy)(s)$$

for all $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, any $t \in J$ and almost all $s \leq t, s \in J$.

- A map $V : \Omega \times X \rightarrow Y$ is called a random Volterra map if $V(\omega, \cdot)$ is Volterra for almost all $\omega \in \Omega$ and $V(\cdot, x)$ is $\mathcal{F}$ -measurable for all $x \in X$.
- The superposition operator generated by a random Volterra map is defined by $x(\cdot) \mapsto V(\cdot, x(\cdot))$.
- A random Volterra map $V : \Omega \times X \rightarrow Y$, such that $V^t(\cdot, x)$ is $\mathcal{F}_t$ -measurable for all $t \in J$ will be called non-anticipating.

Evidently, any Volterra map V gives rise to a family of Volterra maps $V^t : X_t \rightarrow Y_t$ ($t \in J$), where X_t and Y_t consist of the restrictions of the functions from X and Y , respectively, to $(-\infty, t] \cap J$. It is also easy to check that the superposition operators generated by random Volterra maps are continuous in probability and if V is non-anticipating, then the superposition operator generated by V preserves progressive measurability of stochastic processes.

In the proofs below we use the following inequalities:

$$E \left| \int_0^t f(s) dB(s) \right|^q \leq c_q^q E \left(\int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^{q/2} \quad (t \in R_+, q \geq 2), \quad (4.4)$$

where $f(t)$ is an arbitrary scalar, progressive measurable stochastic process on R_+ , $B(t)$ is the standard scalar Brownian motion and c_q is a certain constant, which is independent of f ;

$$\left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} g(s) ds \right|^q \leq d_q^q t^{q\alpha-1} \int_0^t |g(s)|^q ds \quad (t \in R_+, q > \alpha^{-1}), \quad (4.5)$$

where $g : R_+ \rightarrow R$ is a Lebesgue measurable function and $d_q = \left(\frac{q-1}{q\alpha-1} \right)^{1-1/q}$.

Inequality (4.4) follows from the estimates proved in e.g. [4], while (4.5) is a direct consequence of Hölder's inequality.

Theorem 4.1. *Let $J = [0, T]$ and assume that*

1. $0 < \alpha_j \leq 1$, $p_j \geq 2$, $\alpha_j^{-1} < p_j \leq p$ ($1 \leq j \leq m$).
2. *The superposition operators generated by the non-anticipating operators F_j, G_j ($1 \leq j \leq m$) map the space $\mathcal{M}_p(J, R^n)$ into the spaces $\mathcal{L}_{p_j}(J, R^n)$ and $\mathcal{L}_2(J, R^n)$, respectively, and satisfy the Lipschitz condition*

$$\begin{aligned} \|F_j y_1 - F_j y_2\|_{\mathcal{L}_{p_j}(J, R^n)} &\leq \ell \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{M}_p(J, R^n)}, \\ \|G_j y_1 - G_j y_2\|_{\mathcal{L}_2(J, R^n)} &\leq \ell \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{M}_p(J, R^n)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

for some constant ℓ and the sub-linear growth condition

$$\|F_j \xi\|_{\mathcal{L}_{p_j}(J, R^n)} \leq b \|\xi\|_{k_p^n}, \quad \|G_j \xi\|_{\mathcal{L}_2(J, R^n)} \leq b \|\xi\|_{k_p^n} \quad (4.7)$$

for some constant b and any $\xi \in k_p^n$.

Then the initial value problem (4.1), (4.2) has a unique (up to the natural equivalence of indistinguishable processes) solution $y(\cdot, y_0) \in \mathcal{M}_p(J, R^n)$.

If the constants ℓ and b are independent of J , then the solution $y(t, y_0)$ is defined for all $t \in R_+$.

P r o o f. We prove this theorem for the equivalent integral equation (4.3). Notice that due to the Volterra property of the operators F_j and G_j we have

$$\begin{aligned} \|F_j y_1 - F_j y_2\|_{\mathcal{L}_{p_j}([0, t], R^n)} &\leq \ell \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{M}_p([0, t], R^n)}, \\ \|G_j y_1 - G_j y_2\|_{\mathcal{L}_2([0, t], R^n)} &\leq \ell \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{M}_p([0, t], R^n)} \end{aligned} \quad (4.8)$$

for any $t \in J$. Now, the proof becomes a standard application of Picard's iterations. Put

$$y^{(\nu)}(t) = y_0 + \sum_{j=1}^m \left(\alpha_j \int_0^t (t-s)^{\alpha_j-1} F_j(y^{(\nu-1)})(s) ds + \int_0^t G_j(y^{(\nu-1)})(s) dB_j(s) \right) \quad (t \in J, \nu \in N)$$

and $y^{(0)} = y_0$. Using (4.6)–(4.8) and inequalities (4.4), (4.5) with $q = p_j$ we obtain

$$E |y^{(\nu+1)}(t) - y^{(\nu)}(t)|^p \leq K \int_0^t E |y^{(\nu)}(s) - y^{(\nu-1)}(s)|^p ds \quad (t \in J, \nu \in N) \quad (4.9)$$

and

$$E |y^{(1)}(t) - y^{(0)}(t)|^p \leq K_0 t \|y_0\|_{k_p^n}^p \quad (t \in J). \quad (4.10)$$

Iterating (4.9) and using (4.10) yield

$$E |y^{(\nu+1)}(t) - y^{(\nu)}(t)|^p \leq K_0 \frac{K^\nu t^\nu}{\nu!} \quad (t \in J, \nu \in N),$$

which ensures convergence of the sequence $\{y^{(\nu)}\}$ to some y in the space $\mathcal{M}_p(J, R^n)$. The stochastic process $y(t)$ satisfies then Eq. (4.3) due to continuity of the operators

$$F_j : \mathcal{M}_p(J, R^n) \rightarrow \mathcal{L}_{p_j}(J, R^n) \quad \text{and} \quad G_j : \mathcal{M}_p(J, R^n) \rightarrow \mathcal{L}_2(J, R^n)$$

and boundedness of the linear operators

$$(\mathcal{I}_{1j}y)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha_j-1} y(s) ds \quad \text{and} \quad (\mathcal{I}_{2j}y)(t) = \int_0^t y(s) dB(s)$$

acting from $\mathcal{L}_{p_j}(J, R^n)$ to $\mathcal{M}_p(J, R^n)$ and from $\mathcal{L}_2(J, R^n)$ to $\mathcal{M}_p(J, R^n)$, respectively (see estimates (4.4), (4.5)).

Assume $y_1(t)$ and $y_2(t)$ to be two solutions of Eq. (4.3). Then we have, exactly as in (4.9), that

$$E |y_1(t) - y_2(t)|^p \leq K \int_0^t E |y_1(s) - y_2(s)|^p ds \quad (t \in J),$$

and the property of uniqueness follows from Grönwall's lemma. $\square$

To prove the existence and uniqueness theorem for (1.1) we represent it as Eq. 4.1. This is a standard procedure in the deterministic theory of functional differential equations [5]. To this end, we assume given two stochastic processes $y \in \mathcal{M}_p(J, R^n)$ and $\varphi \in \mathcal{M}_p(R_- \cup \{0\})$, put

$$y_+(t) = \begin{cases} y(t) & (t \in J) \\ 0 & (t \in R_-) \end{cases} \quad \text{and} \quad \varphi_-(t) = \begin{cases} 0 & (t \in J) \\ \varphi(t) & (t \in R_-) \end{cases}$$

and define

$$F_j(y) = f_j(\cdot, H_{1j}y_+ + H_{1j}\varphi_-), \quad G_j(y) = g_j(\cdot, H_{2j}y_+ + H_{2j}\varphi_-), \quad (4.11)$$

which yields Eq. (4.1).

The result below connects Eq. (1.1) and (4.1).

Proposition 4.1. *Let $J = [0, T]$ and assume that the k -linear operators $H_{ij} : \mathcal{M}_p(R_- \cup J, R^n) \rightarrow \mathcal{L}_p(J, R^l)$ are bounded for all $i = 1, 2, j = 1, \dots, m$. Then the stochastic process*

$$x(t) = \begin{cases} y(t, \varphi(0)) & (t \in J) \\ \varphi(t) & (t \in R_-) \end{cases} \quad (4.12)$$

is the solution of the initial value problem (1.1), (1.2) on the interval J if and only if y is the solution of the initial value problem (4.1), (4.2) on the same interval.

P r o o f. Let y be a solution of the problem (4.1), (4.2). Then (4.12) can be rewritten as $x(t) = y_+(t, \varphi(0)) + \varphi_-(t)$ ($t \in R_- \cup J$), and for all $t \in J$ we obtain $x(t) = y(t)$ and $H_{ij}y_+ + H_{ij}\varphi_- = H_{ij}x$ due to linearity of H_{ij} . Hence $x(t)$ satisfies Eq. (1.1). In addition, $x(t) = \varphi(t)$ for $t \leq 0$.

Assume now that x is a solution of the problem (1.1), (1.2) and put $y = x|_J$. Then $x(t) = y_+(t) + \varphi_-(t)$ ($t \in R_- \cup J$), so that $H_{ij}x = H_{ij}y_+ + H_{ij}\varphi_-$, which means that $y(t)$ satisfies Eq. (4.1) if F_j and G_j are defined as in (4.11). By construction, $y(0) = \varphi(0)$, and the result follows. $\square$

E x a m p l e 4.1. The representation (4.1) of Eq. (1.1) with the distributed delay operators H_{ij} given by

$$(H_{ij}x)(t) = \int_{-\infty}^t d_s \mathcal{R}_{ij}(t, s)x(s),$$

where $\mathcal{R}_{ij}(t, s)$ are $n \times l$ -matrix valued, Borel measurable functions defined on $\{(t, s) : t \in J, -\infty < s \leq t\}$, reads as

$$dy(t) = \sum_{j=1}^m \left(f_j(t, \int_0^t d_s \mathcal{R}_{1j}(t, s)y(s) + u_{1j}(t))(dt)^{\alpha_j} + g_j(t, \int_0^t d_s \mathcal{R}_{2j}(t, s)y(s) + u_{2j}(t))dB_j(t) \right),$$

where $u_{ij}(t) \equiv (H_{ij}\varphi_-)(t) = \int_{(-\infty, 0)} d_s \mathcal{R}_{ij}(t, s)\varphi(s)$. In particular, Eq. (1.1) with time-dependent delays given by

$$(H_{ij}x)(t) = x(h_{ij}(t)),$$

where $h_{ij}(t) \leq t$ are Borel measurable functions ($i = 1, 2, j = 1, \dots, m$), has the following representation:

$$dy(t) = \sum_{j=1}^m (f_j(t, (S_{1j}y)(s) + u_{1j}(t))(dt)^{\alpha_j} + g_j(t, (S_{2j}y)(s) + u_{2j}(t))dB_j(t)),$$

where S_{ij} , known as inner superposition operators (see e.g. [5]), are defined as

$$(S_{ij}y)(t) = \begin{cases} y(h_{ij}(t)) & (t \in J) \\ 0 & (t \in R_-), \end{cases}$$

and

$$u_{ij}(t) \equiv (H_{ij}\varphi_-)(t) = \begin{cases} 0 & (t \in J) \\ \varphi(h_{ij}(t)) & (t \in R_-). \end{cases}$$

Now we are ready to prove the existence and uniqueness result for Eq. (1.1).

Theorem 4.2. *Let $J = [0, T]$ and assume that*

1. $0 < \alpha_j \leq 1, p_j \geq 2, \alpha_j^{-1} < p_j \leq p$ ($1 \leq j \leq m$).
2. *For all $j = 1, \dots, m$ the random functions $f_j, g_j : \Omega \times R_+ \times R^l \rightarrow R^n$ are such that $f_j(\cdot, \cdot, v)$ and $g_j(\cdot, \cdot, v)$ are progressively measurable for any $v \in R^l$ and $f_j(\omega, t, \cdot)$ and $g_j(\omega, t, \cdot)$ are continuous for $P \otimes \mu$ -almost all (ω, t) , satisfy the Lipschitz condition*

$$|f_j(\omega, t, x_1) - f_j(\omega, t, x_2)| \leq \ell |x_1 - x_2|, \quad |g_j(\omega, t, x_1) - g_j(\omega, t, x_2)| \leq \ell |x_1 - x_2| \quad a. s.$$

for some constant ℓ and all $x_1, x_2 \in R^l, t \in J$ and the sub-linear growth condition

$$|f_j(\omega, t, x)| \leq b|x|, \quad |g_j(\omega, t, x)| \leq b|x|.$$

3. The k -linear operators $H_{ij} : \mathcal{M}_p(R_- \cup J, R^n) \rightarrow \mathcal{L}_p(J, R^l)$ are bounded for all $i = 1, 2, j = 1, \dots, m$.

Then for any $\varphi \in \mathcal{M}_p(R_- \cup \{0\}, R^n)$ the initial value problem (1.1), (1.2) has a unique (up to the natural equivalence of indistinguishable processes) solution $x(\cdot, \varphi) \in \mathcal{M}_p(J, R^n)$.

If the constant ℓ is independent of J , then the solution $x(t, \varphi)$ is defined for all $t \in R$.

P r o o f. The proof is based on Theorem 4.1. Define F_j and G_j using the formulas (4.11). It is easy to see that the superposition operators generated by the non-anticipating operators F_j, G_j ($1 \leq j \leq m$) map the space $\mathcal{M}_p(J, R^n)$ into the space $\mathcal{L}_p(J, R^n)$, which contains both $\mathcal{L}_{p_j}(J, R^n)$ and $\mathcal{L}_2(J, R^n)$, because $p \geq \max\{2, p_j : j = 1, \dots, m\}$. These operators satisfy the Lipschitz condition (4.6) and the sub-linear growth condition (4.7) as well. Therefore, Eq. (4.1) with F_j, G_j so constructed has a unique solution $y \in \mathcal{M}_p(J)$ satisfying the initial condition $y(0) = \varphi(0)$. Applying Proposition 4.1 completes the proof. $\square$

R e m a r k 4.1. As $\mathcal{M}_p([0, T], R^n) \subset \mathcal{L}_p([0, T], R^n)$, the delay operators (3.1) and (3.2) satisfy condition (3) of Theorem 4.2.

References

- [1] J.-C. Pedjeu, G. S. Ladde, “Stochastic fractional differential equations: Modeling, method and analysis”, *Chaos, Solitons & Fractals*, **45** (2012), 279–293.
- [2] G. Jumarie, “Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results”, *Computational Mathematics and Applications*, **51**:9–10 (2006), 1367–1376.
- [3] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*, Springer, 2014.
- [4] I. Neveu, *Discrete Parameter Martingales*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [5] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatulina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Hindawi, New York, 2007.

Information about the author

Arcady Ponosov, Doctor of Natural Sciences, Professor of the Institute of Mathematics. Norwegian University of Life Sciences, Ås, Norway.
E-mail: arkadi@nmbu.no
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5018-6577>

Received 25.01.2023
Reviewed 28.02.2023
Accepted for press 10.03.2023

Информация об авторе

Поносов Аркадий Владимирович, доктор естественных наук, профессор Института Математики. Норвежский университет естественных наук, г. Ос, Норвегия.
E-mail: arkadi@nmbu.no
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5018-6577>

Поступила в редакцию 25.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 28.02.2023 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Сташ А.Х., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67

УДК 517.926



О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем

Айдамир Хазретович СТАШ

ФГБОУ ВО «Адыгейский государственный университет»

385000, Российская Федерация, г. Майкоп, ул. Первомайская, 208

Аннотация. Тематика исследования данной работы находится на стыке двух разделов качественной теории дифференциальных уравнений, а именно: теории показателей Ляпунова и теории колеблемости. В данной работе изучаются спектры (т. е. множества различных значений на ненулевых решениях) показателей колеблемости знаков (строгих и нестрогих), нулей, корней и гиперкорней линейных однородных дифференциальных систем с непрерывными на положительной полуоси коэффициентами. Для любого $n \geq 2$ установлено существование n -мерной дифференциальной системы с континуальными спектрами показателей колеблемости. При четных n спектры всех показателей колеблемости заполняют один и тот же отрезок числовой оси с наперед заданными произвольными положительными несоизмеримыми концами, а при нечетных n к указанным спектрам еще добавляется ноль. Оказалось, что для каждого решения построенной дифференциальной системы все показатели колеблемости совпадают между собой. При доказательстве результатов настоящей работы отдельно рассмотрены случаи четности и нечетности n . Полученные результаты носят теоретический характер, они расширяют наши представления о возможных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, линейные однородные дифференциальные системы, спектр показателя системы, колеблемость решения, число нулей решения, показатели колеблемости, частоты Сергеева

Для цитирования: Сташ А.Х. О континуальных спектрах показателей колеблемости линейных однородных дифференциальных систем // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 60–67. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67.

SCIENTIFIC ARTICLES

© A. Kh. Stash, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67



On the continuum spectra of the oscillation exponents of linear homogeneous differential systems

Aydamir Kh. STASH

Adyghe State University

208, Pervomayskaya St., Maykop, 385000, Russian Federation

Abstract. The research subject of this work is at the junction of two sections of the qualitative theory of differential equations, namely: the theory of Lyapunov exponents and the theory of oscillation. In this paper, we study the spectra (i. e., sets of different values on nonzero solutions) of the exponents of oscillation of signs (strict and nonstrict), zeros, roots, and hyperroots of linear homogeneous differential systems with coefficients continuous on the positive semiaxis. For any $n \geq 2$, the existence of an n -dimensional differential system with continuum spectra of the oscillation exponents is established. For even n , the spectra of all the oscillation exponents fill the same segment of the numerical axis with predetermined arbitrary positive incommensurable ends, and for odd n , zero is added to the indicated spectra. It turns out that for each solution of the constructed differential system, all the oscillation exponents coincide with each other. When proving the results of this work, the cases of even and odd n are considered separately. The results obtained are theoretical in nature, they expand our understanding of the possible spectra of oscillation exponents of linear homogeneous differential systems.

Keywords: differential equations, linear homogeneous differential systems, spectrum of the system exponent, oscillation of solution, number of zeros of solution, exponents of oscillation, Sergeev's frequencies

Mathematics Subject Classification: 34A30, 34C10, 34D05.

For citation: Stash A.Kh. On the continuum spectra of the exponents of linear homogeneous differential systems. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 60–67. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-60-67. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В работах [1–3] И. Н. Сергеева вводились и исследовались различные характеристики ляпуновского типа ненулевых решений линейных дифференциальных уравнений и систем, отвечающие за колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений на полупрямой. Далее, в 2015 году в статье [4] все введенные к тому моменту характеристики ляпуновского типа были систематизированы, что привело к изменению названий некоторых из них: в частности, полные и векторные частоты были переименованы соответственно в сильные и слабые показатели колеблемости (см. [5–8]). В работах [9–12] характеристические частоты [1] стали называться частотами Сергеева.

Одномерный случай является вырожденным, поскольку решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка в силу теоремы существования и единственности не имеют вовсе нулей, а значит, все показатели колеблемости равны нулю. Известно (см. [3]), что спектры показателей колеблемости двумерной системы, отвечающей линейному однородному уравнению второго порядка, состоят ровно из одного элемента. Для двумерных линейных систем с периодическими коэффициентами спектры показателей колеблемости нулей могут содержать наборы, состоящие из сколь угодно большего количества существенных значений (см. [13]). Если отказаться от периодичности коэффициентов двумерной системы, то спектры могут содержать счетные множества существенных значений (см. [14]). Исследование спектров показателей колеблемости автономных систем было начато в работах [3, 15] и полностью завершено в [16]. Спектры показателей колеблемости неавтономных систем в общем случае не были исследованы.

Настоящая работа логически продолжает и развивает результаты работы [17], в которой доказано существование двумерной дифференциальной системы с непрерывными неограниченными на положительной полуоси коэффициентами, спектры показателей колеблемости строгих знаков, нулей и корней которой заполняют один и тот же отрезок числовой оси. Ниже эти свойства для всех показателей колеблемости перенесены на отрезки с произвольными несоизмеримыми концами и обобщены на n -мерные системы.

1. Характеристики колеблемости решений линейных однородных дифференциальных уравнений и систем

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tilde{\mathcal{M}}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с непрерывными оператор-функциями $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\tilde{\mathcal{M}}^n$, отвечающих линейным однородным дифференциальным уравнениям n -го порядка, обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}^n$. Множество всех ненулевых решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(A)$. Далее, звездочкой снизу будем помечать любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n = \bigcup_{A \in \tilde{\mathcal{M}}^n} \mathcal{S}_*(A), \quad \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n = \bigcup_{a \in \tilde{\mathcal{E}}^n} \mathcal{S}_*(a).$$

О п р е д е л е н и е 1.1 (см. [1]). Скажем, что в точке $t > 0$ происходит *строгая* (не*строгая*) *смена знака* функции $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения.

О п р е д е л е н и е 1.2 (см. [1, 2]). Для момента $t > 0$ и функции $y: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ введем следующие обозначения:

$\nu^-(y, t)$ — число точек ее *строгой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^\sim(y, t)$ — число точек ее *нестрогой смены знака* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^0(y, t)$ — число ее *нулей* на промежутке $(0, t]$;

$\nu^+(y, t)$ — число ее *корней* (т. е. нулей с учетом их *кратности*) на промежутке $(0, t]$;

$\nu^*(y, t)$ — число ее *гиперкратных корней* на промежутке $(0, t]$: при его подсчете каждый некрatный корень берется ровно один раз, а кратный — бесконечно много раз.

Далее, для ненулевого вектора $m \in \mathbb{R}_*^n$ и вектор-функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ введем обозначение $\nu^\alpha(x, m, t) \equiv \nu^\alpha(\langle x, m \rangle, t)$, где $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$, $\langle x(\cdot), m \rangle$ — скалярное произведение.

О п р е д е л е н и е 1.3 (см. [3, 4]). *Верхние (нижние) частоты Сергеева строгих знаков, нулей и корней* любого решения $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}^n$ при $\gamma \in \{-, 0, +\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat{\nu}^\gamma(y) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \quad \left(\check{\nu}^\gamma(y) \equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{t} \nu^\gamma(y, t) \right).$$

О п р е д е л е н и е 1.4 (см. [2–4]). *Верхние (нижние) сильный и слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней* функции $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{M}}^n$ при $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ соответственно зададим формулами

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\bullet^\alpha(x) &\equiv \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right), \\ \hat{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) & \left(\check{\nu}_\circ^\alpha(x) &\equiv \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{R}_*^n} \frac{\pi}{t} \nu^\alpha(x, m, t) \right). \end{aligned}$$

В случае совпадения верхнего и нижнего значений какой-либо из характеристик колеблемости будем называть ее *точной*, убирая в ее обозначении крышечку и галочку.

2. Основной результат

Теорема 2.1. Для любого $n \geq 2$ и любых несоизмеримых $\omega_2 > \omega_1 > 0$ найдется система $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ с неограниченными коэффициентами такая, что при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \nu_\bullet^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) &= \nu_\circ^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) = [\omega_1, \omega_2], \quad \text{если } n \text{ четное;} \\ \nu_\bullet^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) &= \nu_\circ^\alpha(\mathcal{S}_*(A)) = [\omega_1, \omega_2] \cup \{0\}, \quad \text{если } n \text{ нечетное.} \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о 1. Пусть $n = 2$. Фиксируем произвольные несоизмеримые $\omega_2 > \omega_1 > 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что вектор-функции

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t \\ -e^{-t} \cos \omega_1 t \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t \\ e^{-t} \cos \omega_2 t \end{pmatrix}$$

являются решениями двумерной системы

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{-\omega_2 \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t - \omega_1 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t}{\cos^2 \omega_2 t + \cos^2 \omega_1 t} & \frac{\omega_2 \sin \omega_2 t \cos \omega_1 t - \omega_1 \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t}{e^{-t} (\cos^2 \omega_2 t + \cos^2 \omega_1 t)} \\ \frac{e^{-t} (\omega_1 \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t - \omega_2 \sin \omega_2 t \cos \omega_1 t)}{\cos^2 \omega_2 t + \cos^2 \omega_1 t} & \frac{-\omega_1 \sin \omega_1 t \cos \omega_1 t - \omega_2 \sin \omega_2 t \cos \omega_2 t}{\cos^2 \omega_2 t + \cos^2 \omega_1 t} - 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что коэффициенты системы A непрерывны, а вектор-функции x^1, x^2 линейно независимы на $\mathbb{R}_+$, так как на $\mathbb{R}_+$ выполняются неравенства

$$\cos^2 \omega_2 t + \cos^2 \omega_1 t > 0,$$

$$\det X(t) \equiv \det (x^1(t), x^2(t)) = e^{-t} (\cos^2 \omega_2 t + \cos^2 \omega_1 t) > 0.$$

2. Для произвольного решения

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) \in \mathcal{S}_*(A)$$

и ненулевого вектора $m = (m_1, m_2)$ скалярное произведение $\langle x, m \rangle$ представимо в виде

$$m_1 (c_1 \cos \omega_2 t + c_2 \cos \omega_1 t) + m_2 e^{-t} (-c_1 \cos \omega_1 t + c_2 \cos \omega_2 t). \quad (2.1)$$

а. Если $c_1 = 0$, то минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на векторе $m = (m_1, m_2)$ при $m_2 = 0$ (см. [16]) и

$$\nu_o^\alpha(x) = \nu_\bullet^\alpha(x) = \omega_1, \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\}. \quad (2.2)$$

б. При $c_2 = 0$ также справедливы равенства (2.2), но минимум в определениях показателей колеблемости реализуется на векторе $m = (m_1, m_2)$ при $m_1 = 0$.

в. Выделим из множества $\mathcal{S}_*(A)$ однопараметрическое семейство решений

$$x_c(t) = cx^1(t) + x^2(t), \quad c > 0,$$

и введем в рассмотрение функции

$$f_c(t) = \cos \omega_1 t + c \cos \omega_2 t, \quad g_c(t) = \cos \omega_1 t + \cos(\omega_2 t + \pi)/c.$$

Тогда из соотношения

$$\langle x_c(t), m \rangle = m_1 f_c(t) - m_2 c e^{-t} g_c(t),$$

в силу остаточности функционала ν^- (см. [1]), следует

$$\nu^-(\langle x_c, m \rangle) = \begin{cases} \nu^-(f_c), & m_1 \neq 0 \\ \nu^-(g_c), & m_1 = 0. \end{cases}$$

По теореме 1 из работы [18] функция $\nu^+(f_c)$ при $c > 0$ непрерывна: при $0 < c < \omega_1/\omega_2$ она принимает значение ω_1 , при $c \geq 1$ — значение ω_2 , а при $\omega_1/\omega_2 < c < 1$ функция $\nu^+(f_c)$ строго возрастает.

Очевидно, что при $c \in (0, 1]$ имеем $1/c \geq 1$, поэтому $\nu^+(g_c) = \omega_2$. Следовательно, на полуинтервале $c \in (0, 1]$ выполнено неравенство $\nu^+(f_c) \leq \nu^+(g_c)$.

Частота Сергеева корней $\nu^+(h_{c,\phi})$ функции

$$h_{c,\phi}(t) = \cos \omega_1 t + c \cos(\omega_2 t + \phi)$$

согласно [18, теорема 1] не зависит от значения ϕ , и для каждого $c \in (0, 1]$ найдется такое ϕ (см. [19]), что все нули функции $h_{c,\phi}$ являются точками строгих смен знаков, поэтому

$$\nu^-(h_{c,\phi}) = \nu^-(f_c) = \nu^0(f_c) = \nu^+(f_c), \quad \nu^-(g_c) = \nu^0(g_c) = \nu^+(g_c).$$

Следовательно, для любого решения x_c точные нижние грани в определениях показателей колеблемости знаков, нулей и корней достигаются на любом векторе $m = (m_1, m_2) \in \mathbb{R}^2$ при $m_1 \neq 0$, поэтому при каждом $\alpha \in \{-, \sim, 0, +\}$ будем иметь

$$\nu_{\circ}^{\alpha}(x) = \nu_{\bullet}^{\alpha}(x) = \nu^{+}(\langle x, m \rangle).$$

Если функция f_c имеет кратные нули, то по теореме 2 из [2] ненулевые m_1 и m_2 можно подобрать так, чтобы при любом $t > 0$ выполнялось неравенство $\nu^{*}(x_c, m, t) < +\infty$. Из этого неравенства следует $\nu_{\circ}^{*}(x) = \nu_{\bullet}^{*}(x) = \nu^{+}(\langle x, m \rangle)$.

г. Для рассмотренного подмножества решений множества $\mathcal{S}_{*}(A)$ показатели колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней заполняют отрезок $[\omega_1; \omega_2]$, а для остальных решений системы $A \in \tilde{\mathcal{M}}^2$ значения показателей колеблемости повторяются.

3. Пусть $n > 2$ – четное. Тогда выбираем систему $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ с фундаментальной системой решений

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t \\ -e^{-t} \cos \omega_1 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t \\ e^{-t} \cos \omega_2 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$x^{n-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos \omega_2 t \\ -e^{-t} \cos \omega_1 t \end{pmatrix}, \quad x^n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos \omega_1 t \\ e^{-t} \cos \omega_2 t \end{pmatrix}.$$

Важно заметить, что скалярное произведение любого решения $x \in \mathcal{S}_{*}(A)$ и вектора $m \in \mathbb{R}_{*}^n$ имеет вид (2.1), а значит, повторяются рассуждения предыдущих пунктов. Следовательно, спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с отрезком $[\omega_1; \omega_2]$.

4. Пусть $n > 2$ – нечетное. Тогда выбираем систему $A \in \tilde{\mathcal{M}}^n$ с фундаментальной системой решений

$$x^1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t \\ -e^{-t} \cos \omega_1 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^2(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t \\ e^{-t} \cos \omega_2 t \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$x^{n-2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos \omega_2 t \\ -e^{-t} \cos \omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{n-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \cos \omega_1 t \\ e^{-t} \cos \omega_2 t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}.$$

Запишем общее решение системы

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_{n-1} x^{n-1}(t) + c_n x^n(t).$$

Если $c_n = 0$, то повторяются все рассуждения из пункта 3 настоящего доказательства.

Если $c_n \neq 0$, то для любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ все показатели колеблемости равны нулю, поскольку точная нижняя грань реализуется на векторе $m = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}_*^n$.

Таким образом, в рассматриваемом случае спектры показателей колеблемости знаков, нулей, корней и гиперкорней совпадают с множеством $[\omega_1; \omega_2] \cup \{0\}$. $\square$

References

- [1] И. Н. Сергеев, “Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения”, Труды семинара имени И. Г. Петровского, **25**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2006, 249–294; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Definition and properties of characteristic frequencies of a linear equation”, *Journal of Mathematical Sciences*, **135**:1 (2006), 2764–2793.
- [2] И. Н. Сергеев, “Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Математический сборник*, **204**:1 (2013), 119–138; англ. пер.: I. N. Sergeev, “The remarkable agreement between the oscillation and wandering characteristics of solutions of differential systems”, *Sbornik: Mathematics*, **204**:1 (2013), 114–132.
- [3] И. Н. Сергеев, “Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы”, *Известия РАН. Серия математическая*, **76**:1 (2012), 149–172; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation and wandering characteristics of solutions of a linear differential systems”, *Izvestiya: Mathematics*, **76**:1 (2012), 139–162.
- [4] И. Н. Сергеев, “Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Известия Института математики и информатики УдГУ*, 2015, № 2(46), 171–183. [I. N. Sergeev, “The complete set of relations between the oscillation, rotation and wandering indicators of solutions of differential systems”, *Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of Udsu*, 2015, № 2(46), 171–183 (In Russian)].
- [5] И. Н. Сергеев, “Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Математические заметки*, **99**:5 (2016), 732–751; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation, rotation, and wandering exponents of solutions of differential systems”, *Mathematical Notes*, **99**:5 (2016), 729–746.
- [6] И. Н. Сергеев, “Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем”, *Труды Семинара им. И. Г. Петровского*, **31** (2016), 177–219; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Lyapunov characteristics of oscillation, rotation, and wandering of solutions of differential systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **234**:4 (2018), 497–522.
- [7] И. Н. Сергеев, “Колеблемость, вращаемость и блуждаемость решений линейных дифференциальных систем”, *Труды Международного симпозиума «Дифференциальные уравнения—2016», Пермь, 17–18 мая 2016*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **132**, ВИНТИ РАН, М., 2017, 117–121; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation, rotation, and wandering of solutions to linear differential systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **230**:5 (2018), 770–774.
- [8] И. Н. Сергеев, “О показателях колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальных систем, задающих повороты плоскости”, *Вестник МГУ имени М. В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика*, 2019, № 1, 21–26; англ. пер.: I. N. Sergeev, “Oscillation, rotatability, and wandering characteristic indicators for differential systems determining rotations of plane”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, **74**:1 (2019), 20–24.
- [9] Е. А. Барабанов, А. С. Войделевич, “К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. I”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:10 (2016), 1302–1320; англ. пер.: E. A. Barabanov, A. S. Voidelevich, “Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation: I”, *Differential Equation*, **52**:10 (2016), 1249–1267.
- [10] Е. А. Барабанов, А. С. Войделевич, “К теории частот Сергеева нулей, знаков и корней решений линейных дифференциальных уравнений. II”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:12 (2016), 1595–1609; англ. пер.: E. A. Barabanov, A. S. Voidelevich, “Remark on the theory of Sergeev frequencies of zeros, signs and roots for solution of linear differential equation. II”, *Differential Equation*, **52**:12 (2016), 1523–1538.

- [11] В. В. Быков, “О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **52**:4 (2016), 419–425; англ. пер.: V. V. Bykov, “On the Baire classification of Sergeev frequencies of zeros and roots of solution of linear differential equation”, *Differential Equation*, **52**:4 (2016), 413–420.
- [12] А. С. Войделевич, “О спектрах верхних частот Сергеева линейных дифференциальных уравнений”, *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*, 2019, № 1, 28–32. [A. S. Voidelevich, “On spectra of upper Sergeev frequencies of linear differential equation”, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics. Computer science*, 2019, № 1, 28–32 (In Russian)].
- [13] А. Х. Сташ, “О конечных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной периодической системы”, *Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественные-математические и технические науки*, 2014, № 1(133), 30–36. [A. Kh. Stash, “On finite spectra of full and vector frequencies of linear two-dimensional differential periodic system”, *Bulletin of the Adyghe State University. Series. Natural-mathematical and technical sciences*, 2014, № 1(133), 30–36 (In Russian)].
- [14] А. Х. Сташ, “О счетных спектрах полной и векторной частот линейной двумерной дифференциальной системы”, *Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. Естественные-математические и технические науки*, 2014, № 2(137), 23–32. [A. Kh. Stash, “About calculating ranges of full and vector frequencies of the linear two-dimensional differential system”, *Bulletin of the Adyghe State University. Series. Natural-mathematical and technical sciences*, 2014, № 2(137), 23–32 (In Russian)].
- [15] Д. С. Бурлаков, С. В. Цой, “Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы”, *Труды семинара им. И. Г. Петровского*, 2014, 75–93; англ. пер.: D. S. Burlakov, S. V. Tsoii, “Coincidence of complete and vector frequencies of solutions of a linear autonomous system”, *Journal of Mathematical Sciences*, **210**:2 (2015), 155–167.
- [16] А. Х. Сташ, “Свойства показателей колеблемости решений линейных автономных дифференциальных систем”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 558–568. [A. Kh. Stash, “Properties of exponents of oscillation of linear autonomous differential system solutions”, *Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **29**:4 (2019), 558–568 (In Russian)].
- [17] А. Х. Сташ, “Существование двумерной линейной системы с континуальными спектрами полных и векторных частот”, *Дифференциальные уравнения*, **51**:1 (2015), 143–144; англ. пер.: A. Kh. Stash, “Existence of a two-dimensional linear system with continual spectra of total and vector frequencies”, *Differential Equation*, **51**:1 (2015), 146–148.
- [18] А. Ю. Горицкий, Т. Н. Фисенко, “Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний”, *Дифференциальные уравнения*, **48**:4 (2012), 479–486; англ. пер.: A. Y. Goritskii, T. N. Fisenko, “Characteristic frequencies of zeros of a sum of two harmonic oscillations”, *Differential Equation*, **48**:4 (2012), 486–493.
- [19] М. В. Смоленцев, “Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:10 (2014), 1413–1417; англ. пер.: M. V. Smolentsev, “Example of a third-order periodic differential equation whose frequency spectrum contains a closed interval”, *Differential Equation*, **50**:10 (2014), 1408–1412.

Информация об авторе

Сташ Айдамир Хазретович, кандидат физико-математических наук, декан факультета математики и компьютерных наук. Адыгейский государственный университет, г. Майкоп, Российская Федерация. E-mail: aidamir.stash@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3008-7859>

Information about the author

Aydamir Kh. Stash, Candidate of Physics and Mathematics, Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science. Adyghe State University, Maykop, Russian Federation. E-mail: aidamir.stash@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3008-7859>

Поступила в редакцию 20.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 06.03.2023 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

Received 20.01.2023
Reviewed 06.03.2023
Accepted for press 10.03.2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Фомин В.И., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89

УДК 517.983.6



Об операторных функциях операторного переменного

Василий Ильич ФОМИН

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Рассмотрено семейство операторных функций, для которых область определения и область значений включены в вещественную банахову алгебру ограниченных линейных операторов, действующих в вещественном банаховом пространстве. Такие функции находят применение при изучении линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Изучены известные операторные функции: экспонента, синус, косинус, гиперболический синус, гиперболический косинус, определяемые суммами соответствующих операторных степенных рядов. Для функций синус, косинус, гиперболический синус, гиперболический косинус указаны формулы сложения, из которых следуют формулы преобразования произведения операторных тригонометрических функций и операторных гиперболических функций в сумму, формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных тригонометрических функций и одноименных операторных гиперболических функций в произведение. Доказано основное операторное гиперболическое тождество. Введены понятия следующих операторных функций: тангенс, котангенс, секанс, косеканс, гиперболический тангенс, гиперболический котангенс, гиперболический секанс, гиперболический косеканс. Доказаны периодичность операторных тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс и формулы приведения для них. Найдены взаимосвязи между операторными функциями тангенс и котангенс, гиперболический тангенс и гиперболический котангенс. Указано одно полезное применение полученных операторных тригонометрических формул: доказано, что операторные функции $Y_1(t) = \sin Bt$, $Y_2(t) = \cos Bt$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$; найдены формулы для производных любого порядка этих функций.

Ключевые слова: операторная показательная функция, операторные тригонометрические функции, периодичность операторных тригонометрических функций, формула приведения, операторный секанс, операторный косеканс, операторные гиперболические функции, основное операторное гиперболическое тождество, операторный гиперболический секанс, операторный гиперболический косеканс

Для цитирования: Фомин В.И. Об операторных функциях операторного переменного // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 68–89. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89.

SCIENTIFIC ARTICLES

© V. I. Fomin, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89



About operator functions of an operator variable

Vasiliy I. FOMIN

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. A family of operator functions for which the domain and the range of values are included in the real Banach algebra of bounded linear operators acting in a real Banach space is considered. Such functions find application in the study of linear differential equations in a Banach space. Known operator functions are studied: exponential, sine, cosine, hyperbolic sine, hyperbolic cosine determined by the sums of the corresponding operator power series. For the functions of sine, cosine, hyperbolic sine, hyperbolic cosine, addition formulas are indicated, from which there follow the formulas for transforming the product of operator trigonometric functions and operator hyperbolic functions into a sum as well as those for transforming the sum and difference of operator trigonometric functions of the same name and operator hyperbolic functions of the same name into a product. The basic operator hyperbolic identity is proved. The concepts of the following operator functions are introduced: tangent, cotangent, secant, cosecant, hyperbolic tangent, hyperbolic cotangent, hyperbolic secant, hyperbolic cosecant. The periodicity of operator trigonometric functions of sine, cosine, tangent, cotangent, and the reduction formulas for them are proved. Relationships between operator functions of tangent and cotangent, hyperbolic tangent and hyperbolic cotangent are found. One useful application of the obtained operator trigonometric formulas is pointed out: it is proved that the operator functions $Y_1(t) = \sin Bt$, $Y_2(t) = \cos Bt$ are infinitely differentiable on $\mathbb{R}$; formulas for the derivatives of any order of these functions are found.

Keywords: operator exponential function, operator trigonometric functions, periodicity of operator trigonometric functions, reduction formula, operator secant, operator cosecant, operator hyperbolic functions, basic operator hyperbolic identity, operator hyperbolic secant, operator hyperbolic cosecant

Mathematics Subject Classification: 47A60

For citation: Fomin V.I. About operator functions of an operator variable. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 68–89. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-68-89. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть E — вещественное банахово пространство; I, O — тождественный и, соответственно, нулевой операторы в пространстве E ; $L(E)$ — вещественная банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих из E в E ;

$$GL(E) = \{A \in L(E) : \exists A^{-1} \in L(E)\}.$$

В данной статье рассматриваются операторные функции со значениями в алгебре $L(E)$. Такие функции широко используются при изучении линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см., например, [1–4]).

Рассмотрим следующие семейства операторных функций:

$$S(\mathbb{R}, L(E)) = \{f : \mathbb{R} \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq L(E)\}, \quad (0.1)$$

$$S(L(E), L(E)) = \{f : L(E) \supseteq D(f) \xrightarrow{f} R(f) \subseteq L(E)\}. \quad (0.2)$$

Примерами операторных функций из семейства (0.1) являются следующие функции, определенные на $\mathbb{R}$:

операторная экспонента (см. [2, с. 41])

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!};$$

операторные тригонометрические функции (см. [5, 6])

$$\sin Bt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos Bt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k} B^{2k}}{(2k)!}$$

(здесь A, B — фиксированные операторы из алгебры $L(E)$).

Простейшими примерами операторных функций из семейства (0.2) являются следующие функции, определенные на $L(E)$: операторная степенная функция X^n , $n \in \mathbb{N}$; операторная рациональная функция

$$P_n(X) = A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + \dots + A_{n-1} X + A_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $A_i \in L(E)$ для всех $i = \overline{0, n}$, $A_0 \neq O$; в частности, при $A_i = a_i I$, $a_i \in \mathbb{R}$ для всех $i = \overline{0, n}$, $a_0 \neq 0$ получаем операторную рациональную функцию с вещественными коэффициентами

$$P_n(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \dots + a_{n-1} X + a_n I.$$

Приведем примеры операторных функций из семейства (0.2), определяемых суммами сходящихся операторных степенных рядов.

Пусть степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ с вещественными коэффициентами сходится при любом $t \in \mathbb{R}$. Тогда при любом $X \in L(E)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k X^k$ сходится и его сумма принадлежит алгебре $L(E)$ (см. [7, с. 48]). Ряды Маклорена

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!}$$

соответственно функций e^t , $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ сходятся при любом $t \in \mathbb{R}$. Следовательно, ряды

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \quad (0.3)$$

сходятся и их суммы принадлежат алгебре $L(E)$. Это позволяет определить на $L(E)$ следующие операторные функции, принадлежащие семейству (0.2):

экспоненциальная функция (см. [8, с. 127])

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!};$$

тригонометрические функции (см. [8, с. 132])

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \cos X = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{X^{2k}}{(2k)!};$$

гиперболические функции (см. [8, с. 132])

$$\operatorname{sh} X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k+1}}{(2k+1)!}; \quad \operatorname{ch} X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{2k}}{(2k)!}.$$

Заметим, что

$$e^O = I; \quad (0.4)$$

$$\sin O = O, \quad \cos O = I; \quad (0.5)$$

$$\sin(-X) = -\sin X, \quad \cos(-X) = \cos X; \quad (0.6)$$

$$\operatorname{sh} O = O, \quad \operatorname{ch} O = I; \quad (0.7)$$

$$\operatorname{sh}(-X) = -\operatorname{sh} X, \quad \operatorname{ch}(-X) = \operatorname{ch} X. \quad (0.8)$$

Каждый из рядов (0.3) сходится абсолютно (это утверждение доказывается с помощью первого признака сравнения и признака Даламбера сходимости знакоположительных рядов, при этом используется неравенство $\|X^n\| \leq \|X\|^n$, $n \in \mathbb{N}$).

Известно (см. [8, с. 126]), что из абсолютной сходимости ряда с членами из алгебры $L(E)$ следует его сходимость. В силу этого сходимость рядов (0.3) следует из их абсолютной сходимости (напомним, что сходимость рядов (0.3) была уже доказана выше).

В силу теоремы о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (см. [9, с. 130]) справедливо соотношение (см. [8, с. 132])

$$e^X = \operatorname{sh} X + \operatorname{ch} X. \quad (0.9)$$

В силу (0.8), (0.9)

$$e^{-X} = -\operatorname{sh} X + \operatorname{ch} X. \quad (0.10)$$

Из (0.9), (0.10) следуют равенства

$$\operatorname{sh} X = \frac{e^X - e^{-X}}{2}, \quad \operatorname{ch} X = \frac{e^X + e^{-X}}{2}. \quad (0.11)$$

Укажем, как операторы из алгебры $L(E)$, определяемые суммами сходящихся рядов, действуют в пространстве E .

Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \quad (0.12)$$

с членами из алгебры $L(E)$ сходится и его сумма S принадлежит $L(E)$. По определению, это означает, что последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^n F_k$, $n \in \mathbb{N}$, ряда (0.12) сходится к S (речь идет о сходимости по норме алгебры $L(E)$). Известно (см. [8, с. 127]), что из сходимости последовательности с членами из алгебры $L(E)$ следует ее поточечная сходимость (в иной терминологии сильная сходимость). В силу этого для любого $x \in E$

$$S_n x \rightarrow Sx. \quad (0.13)$$

Заметим, что

$$S_n x = \left(\sum_{k=1}^n F_k \right) x = \sum_{k=1}^n F_k x$$

является n -й частичной суммой ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k x. \quad (0.14)$$

Следовательно, в силу (0.13) ряд (0.14) сходится и его сумма равна Sx :

$$Sx = \sum_{k=1}^{\infty} F_k x.$$

Например, операторы

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \quad \sin B = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos B = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}}{(2k)!}$$

(здесь $A, B \in L(E)$; A, B фиксированы) действуют в пространстве E соответственно по правилу: для любого $x \in E$

$$e^A x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k x}{k!}, \quad (\sin B)x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k+1} x}{(2k+1)!}, \quad (\cos B)x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k} x}{(2k)!}.$$

1. Основные понятия

Операторные функции $\operatorname{tg} X$, $\operatorname{ctg} X$ операторного переменного $X \in L(E)$ определяются равенствами

$$\operatorname{tg} X = \sin X \cos^{-1} X, \quad \operatorname{ctg} X = \cos X \sin^{-1} X,$$

где $\cos^{-1} X = (\cos X)^{-1}$, $\sin^{-1} X = (\sin X)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\cos X$, $\sin X$.

Области определения этих функций имеют вид

$$D(\operatorname{tg} X) = \{X \in L(E) : \cos X \in GL(E)\},$$

$$D(\operatorname{ctg} X) = \{X \in L(E) : \sin X \in GL(E)\}.$$

Заметим, что

$$D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X) = \{X \in L(E) : \sin X, \cos X \in GL(E)\}.$$

Покажем, что

$$D(\operatorname{tg} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{ctg} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X) \neq \emptyset. \quad (1.1)$$

Пусть

$$M_1 = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \right\}, \quad M_2 = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Заметим, что M_1, M_2 являются областями определения скалярных функций $\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{ctg} \alpha$. Определим множество $M = M_1 \cap M_2 = \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \neq \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Лемма 1.1. *Справедливы включения*

$$\alpha I \in D(\operatorname{tg} X), \quad \forall \alpha \in M_1; \quad (1.2)$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{ctg} X), \quad \forall \alpha \in M_2; \quad (1.3)$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X), \quad \forall \alpha \in M. \quad (1.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определения функций $\sin X, \cos X$ и равенство $I^n = I, \quad n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sin(\alpha I) = I \sin \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad (1.5)$$

$$\cos(\alpha I) = I \cos \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Из равенства (1.6) следует, что существует

$$\cos^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\cos \alpha} I, \quad \forall \alpha \in M_1, \quad (1.7)$$

значит, определен $\operatorname{tg}(\alpha I) = \sin(\alpha I) \cos^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.2) доказано. Далее, из равенства (1.5) видно, что существует

$$\sin^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\sin \alpha} I, \quad \forall \alpha \in M_2, \quad (1.8)$$

следовательно, определен $\operatorname{ctg}(\alpha I) = \cos(\alpha I) \sin^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.3) доказано. Включение (1.4) следует из (1.2), (1.3). $\square$

В силу леммы 1.1 справедливы соотношения (1.1).

В силу (1.5)–(1.8)

$$\operatorname{tg}(\alpha I) = I \operatorname{tg} \alpha, \quad \forall \alpha \in M_1;$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha I) = I \operatorname{ctg} \alpha, \quad \forall \alpha \in M_2.$$

В силу (0.5), (0.6)

$$\operatorname{tg} O = O, \quad O \notin D(\operatorname{ctg} X), \quad \operatorname{tg}(-X) = -\operatorname{tg} X, \quad \operatorname{ctg}(-X) = -\operatorname{ctg} X.$$

Пусть $X \in L(E)$, $r > 0$. Обозначим через $O_r(X) = \{H \in L(E) : \|H - X\| < r\}$ открытый шар в пространстве $L(E)$ с центром $X \in L(E)$ радиуса r .

Известно (см. [10, с. 229]), что множество $GL(E)$ открыто: если $F_0 \in GL(E)$, то

$$O_{\|F_0^{-1}\|^{-1}}(F_0) \subset GL(E).$$

Пусть $\alpha \in M_1$, α фиксировано. В силу (1.7) $A_\alpha = \cos(\alpha I) \in GL(E)$. Следовательно,

$$O_{\|A_\alpha^{-1}\|^{-1}}(A_\alpha) \subset GL(E).$$

Из (1.7) следует, что

$$\|A_\alpha^{-1}\|^{-1} = |\cos \alpha|. \quad (1.9)$$

Учитывая равенства (1.6), (1.9), имеем

$$O_{|\cos \alpha|}(I \cos \alpha) \subset GL(E). \quad (1.10)$$

Положим

$$P_\alpha = \{F \in L(E) : \|\cos F - I \cos \alpha\| < |\cos \alpha|\},$$

т. е.

$$P_\alpha = \{F \in L(E) : \cos F \in O_{|\cos \alpha|}(I \cos \alpha)\}.$$

В силу включения (1.10)

$$\cos F \in GL(E), \quad \forall F \in P_\alpha.$$

Таким образом,

$$P_\alpha \subset D(\operatorname{tg} X), \quad \forall \alpha \in M_1. \quad (1.11)$$

В частности, множество $P_0 = \{F \in L(E) : \|\cos F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{tg} X)$.

Аналогично для множества

$$Q_\alpha = \{F \in L(E) : \|\sin F - I \sin \alpha\| < |\sin \alpha|\}$$

показывается, что

$$Q_\alpha \subset D(\operatorname{ctg} X), \quad \forall \alpha \in M_2. \quad (1.12)$$

В частности, множество $Q_{\frac{\pi}{2}} = \{F \in L(E) : \|\sin F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{ctg} X)$.

Операторные функции $\sec X$, $\operatorname{cosec} X$ определяются равенствами

$$\sec X = \cos^{-1} X; \quad \operatorname{cosec} X = \sin^{-1} X.$$

Заметим, что

$$D(\sec X) = D(\operatorname{tg} X), \quad D(\operatorname{cosec} X) = D(\operatorname{ctg} X), \quad (1.13)$$

следовательно, в силу (1.2)–(1.4)

$$\alpha I \in D(\sec X), \quad \forall \alpha \in M_1;$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{cosec} X), \quad \forall \alpha \in M_2;$$

$$\alpha I \in D(\sec X) \cap D(\operatorname{cosec} X), \quad \forall \alpha \in M.$$

В силу (1.7), (1.8)

$$\begin{aligned}\sec(\alpha I) &= I \sec \alpha, \quad \forall \alpha \in M_1; \\ \operatorname{cosec}(\alpha I) &= I \operatorname{cosec} \alpha, \quad \forall \alpha \in M_2.\end{aligned}$$

В силу (0.5), (0.6)

$$\sec O = I, \quad O \notin D(\operatorname{cosec} X), \quad \sec(-X) = \sec X, \quad \operatorname{cosec}(-X) = -\operatorname{cosec} X.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\cos X \sec X &= I, \quad \sin X \operatorname{cosec} X = I, \\ \operatorname{tg} X &= \sin X \sec X, \quad \operatorname{ctg} X = \cos X \operatorname{cosec} X.\end{aligned}$$

В силу (1.11)–(1.13)

$$\begin{aligned}P_\alpha &\subset D(\sec X), \quad \forall \alpha \in M_1; \\ Q_\alpha &\subset D(\operatorname{cosec} X), \quad \forall \alpha \in M_2.\end{aligned}$$

Операторные гиперболические функции $\operatorname{th} X$, $\operatorname{cth} X$ определяются равенствами

$$\operatorname{th} X = \operatorname{sh} X \operatorname{ch}^{-1} X; \quad \operatorname{cth} X = \operatorname{ch} X \operatorname{sh}^{-1} X,$$

где $\operatorname{ch}^{-1} X = (\operatorname{ch} X)^{-1}$, $\operatorname{sh}^{-1} X = (\operatorname{sh} X)^{-1}$ — обратные операторы соответственно для операторов $\operatorname{ch} X$, $\operatorname{sh} X$. Для этих функций

$$\begin{aligned}D(\operatorname{th} X) &= \{X \in L(E) : \operatorname{ch} X \in GL(E)\}, \\ D(\operatorname{cth} X) &= \{X \in L(E) : \operatorname{sh} X \in GL(E)\}.\end{aligned}$$

Заметим, что

$$D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X) = \{X \in L(E) : \operatorname{sh} X, \operatorname{ch} X \in GL(E)\}.$$

Приведем утверждение, из которого следует, что

$$D(\operatorname{th} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{cth} X) \neq \emptyset, \quad D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X) \neq \emptyset. \quad (1.14)$$

Лемма 1.2. *Справедливы включения*

$$\alpha I \in D(\operatorname{th} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad (1.15)$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{cth} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0; \quad (1.16)$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0. \quad (1.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (0.11)

$$\operatorname{sh}(\alpha I) = 2^{-1}(e^{\alpha I} - e^{-\alpha I}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad (1.18)$$

$$\operatorname{ch}(\alpha I) = 2^{-1}(e^{\alpha I} + e^{-\alpha I}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Используя определение функции e^X , получаем

$$e^{\alpha I} = e^\alpha I, \quad e^{-\alpha I} = e^{-\alpha} I, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.20)$$

В силу (1.18)–(1.20)

$$\operatorname{sh}(\alpha I) = I \operatorname{sh} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}; \quad (1.21)$$

$$\operatorname{ch}(\alpha I) = I \operatorname{ch} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.22)$$

Заметим, что

$$\operatorname{sh} \alpha \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0; \quad (1.23)$$

$$\operatorname{ch} \alpha \neq 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.24)$$

Из (1.22), (1.24) видно, что существует

$$\operatorname{ch}^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} I, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1.25)$$

следовательно, определен $\operatorname{th}(\alpha I) = \operatorname{sh}(\alpha I) \operatorname{ch}^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.15) доказано. Далее, в силу (1.21), (1.23) существует

$$\operatorname{sh}^{-1}(\alpha I) = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} I, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \quad (1.26)$$

значит, определен $\operatorname{cth}(\alpha I) = \operatorname{ch}(\alpha I) \operatorname{sh}^{-1}(\alpha I)$. Включение (1.16) доказано. Включение (1.17) следует из (1.15), (1.16). $\square$

В силу леммы 1.2 справедливы соотношения (1.14).

В силу (1.21), (1.22), (1.25), (1.26)

$$\operatorname{th}(\alpha I) = I \operatorname{th} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{cth}(\alpha I) = I \operatorname{cth} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

В силу (0.7), (0.8)

$$\operatorname{th} O = O, \quad O \notin D(\operatorname{cth} X), \quad \operatorname{th}(-X) = -\operatorname{th} X, \quad \operatorname{cth}(-X) = -\operatorname{cth} X.$$

При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ определим множество $U_\alpha = \{F \in L(E) : \|\operatorname{ch} F - I \operatorname{ch} \alpha\| < |\operatorname{ch} \alpha|\}$. По аналогии с включением (1.11) получаем

$$U_\alpha \subset D(\operatorname{th} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.27)$$

В частности, множество $U_0 = \{F \in L(E) : \|\operatorname{ch} F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{th} X)$.

Для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, положим $V_\alpha = \{F \in L(E) : \|\operatorname{sh} F - I \operatorname{sh} \alpha\| < |\operatorname{sh} \alpha|\}$. По аналогии с включением (1.12) имеем

$$V_\alpha \subset D(\operatorname{cth} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0. \quad (1.28)$$

В частности, множество $V_{\operatorname{arsh} 1} = \{F \in L(E) : \|\operatorname{sh} F - I\| < 1\}$ включено в $D(\operatorname{cth} X)$.

Операторные гиперболические секанс и косеканс определяются равенствами

$$\operatorname{sech} X = \operatorname{ch}^{-1} X; \quad \operatorname{cosech} X = \operatorname{sh}^{-1} X.$$

Заметим, что

$$D(\operatorname{sech} X) = D(\operatorname{th} X), \quad D(\operatorname{cosech} X) = D(\operatorname{cth} X), \quad (1.29)$$

следовательно, в силу (1.15)–(1.17)

$$\alpha I \in D(\operatorname{sech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{cosech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0;$$

$$\alpha I \in D(\operatorname{sech} X) \cap D(\operatorname{cosech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

В силу (1.25), (1.26)

$$\operatorname{sech}(\alpha I) = I \operatorname{sech} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{cosech}(\alpha I) = I \operatorname{cosech} \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

В силу (0.7), (0.8)

$$\operatorname{sech} O = I, \quad O \notin D(\operatorname{cosech} X), \quad \operatorname{sech}(-X) = \operatorname{sech} X, \quad \operatorname{cosech}(-X) = -\operatorname{cosech} X.$$

Заметим, что

$$\operatorname{ch} X \operatorname{sech} X = I, \quad \operatorname{sh} X \operatorname{cosech} X = I.$$

В силу (1.27)–(1.29)

$$U_\alpha \subset D(\operatorname{sech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R};$$

$$V_\alpha \subset D(\operatorname{cosech} X), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0.$$

2. Основные результаты

Справедливо основное свойство экспоненциальной функции (см. [2, с. 41])

$$e^{X_1+X_2} = e^{X_1} e^{X_2}, \tag{2.1}$$

для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию

$$X_1 X_2 = X_2 X_1. \tag{2.2}$$

Используя равенства (0.4), (2.1), приходим к выводу: при любом фиксированном $X \in L(E)$ существует $(e^X)^{-1} = e^{-X}$, т. е. $e^X \in GL(E)$. Таким образом, область значений $R(e^X)$ функции e^X является подмножеством множества $GL(E) \subset L(E)$, следовательно, $R(e^X) \neq L(E)$, т. е. функция e^X не является сюръективной. Заметим, что любой оператор $F \in L(E) \setminus GL(E)$ не принадлежит множеству $R(e^X)$. Например, $O \notin R(e^X)$, т. е. функция e^X не имеет нулей: $e^X \neq O$ для любого $X \in L(E)$.

Рассмотрим в алгебре $L(E)$ подалгебру $S = \{\alpha I : \alpha \in \mathbb{R}\}$ скалярных операторов. Заметим, что подалгебра S коммутативна. Выделим в S множество $S_+ = \{\beta I : \beta > 0\}$ положительных скалярных операторов. Справедливо включение $S_+ \subset R(e^X)$, ибо для любого $\beta I \in S_+$, используя (1.20), получаем

$$e^{I \ln \beta} = e^{\ln \beta} I = \beta I.$$

Попутно показано, что натуральный логарифм положительного скалярного оператора βI имеет вид $\ln(\beta I) = I \ln \beta$.

Используя теорему 61 из [9, с. 138] при $B : L(E) \times L(E) \rightarrow L(E)$, $B(F_1, F_2) = F_1 F_2$, получаем

Следствие 2.1. *Произведение двух абсолютно сходящихся рядов с членами из алгебры $L(E)$ является абсолютно сходящимся рядом и его сумма равна произведению сумм перемножаемых рядов.*

С помощью следствия 2.1 доказываются некоторые формулы операторной тригонометрии (см. [11]). Например, основное операторное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 X + \cos^2 X = I, \quad \forall X \in L(E);$$

формулы сложения

$$\sin(X_1 + X_2) = \sin X_1 \cos X_2 + \cos X_1 \sin X_2, \quad (2.3)$$

$$\cos(X_1 + X_2) = \cos X_1 \cos X_2 - \sin X_1 \sin X_2 \quad (2.4)$$

для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию (2.2).

В силу (2.3), (2.4) справедливы формулы для операторных тригонометрических функций двойного аргумента: для любого $X \in L(E)$

$$\sin 2X = 2 \sin X \cos X, \quad \cos 2X = \cos^2 X - \sin^2 X.$$

В силу (0.6), (2.3), (2.4)

$$\sin(X_1 - X_2) = \sin X_1 \cos X_2 - \cos X_1 \sin X_2, \quad (2.5)$$

$$\cos(X_1 - X_2) = \cos X_1 \cos X_2 + \sin X_1 \sin X_2. \quad (2.6)$$

Из (2.3)–(2.6) следуют формулы преобразования произведения операторных тригонометрических функций в сумму:

$$\sin X_1 \cos X_2 = \frac{1}{2} [\sin(X_1 + X_2) + \sin(X_1 - X_2)], \quad (2.7)$$

$$\cos X_1 \cos X_2 = \frac{1}{2} [\cos(X_1 + X_2) + \cos(X_1 - X_2)], \quad (2.8)$$

$$\sin X_1 \sin X_2 = \frac{1}{2} [\cos(X_1 - X_2) - \cos(X_1 + X_2)]. \quad (2.9)$$

Из (2.7)–(2.9) следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных тригонометрических функций в произведение:

$$\sin X_1 + \sin X_2 = 2 \sin \frac{X_1 + X_2}{2} \cos \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad (2.10)$$

$$\sin X_1 - \sin X_2 = 2 \sin \frac{X_1 - X_2}{2} \cos \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad (2.11)$$

$$\cos X_1 + \cos X_2 = 2 \cos \frac{X_1 + X_2}{2} \cos \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad (2.12)$$

$$\cos X_1 - \cos X_2 = -2 \sin \frac{X_1 - X_2}{2} \sin \frac{X_1 + X_2}{2}. \quad (2.13)$$

Напомним, что формулы (2.3)–(2.13) справедливы при выполнении условия (2.2).

Покажем периодичность операторных тригонометрических функций.

Теорема 2.1. Для любого $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, справедливы равенства

$$\sin(X + 2\pi mI) = \sin X, \quad \forall X \in L(E); \quad (2.14)$$

$$\cos(X + 2\pi mI) = \cos X, \quad \forall X \in L(E); \quad (2.15)$$

$$\operatorname{tg}(X + \pi mI) = \operatorname{tg} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{tg} X); \quad (2.16)$$

$$\operatorname{ctg}(X + \pi mI) = \operatorname{ctg} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{ctg} X). \quad (2.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Операторы X , $2\pi mI$ коммутируют между собой, следовательно, в силу (2.3), (2.4)

$$\sin(X + 2\pi mI) = \sin X \cos(2\pi mI) + \cos X \sin(2\pi mI), \quad (2.18)$$

$$\cos(X + 2\pi mI) = \cos X \cos(2\pi mI) - \sin X \sin(2\pi mI). \quad (2.19)$$

В силу (1.5), (1.6)

$$\sin(2\pi mI) = O, \quad \cos(2\pi mI) = I. \quad (2.20)$$

Из соотношений (2.18)–(2.20) следуют равенства (2.14), (2.15).

Покажем справедливость равенств (2.16), (2.17). В силу (2.3), (2.4)

$$\sin(X + \pi mI) = \sin X \cos(\pi mI) + \cos X \sin(\pi mI), \quad (2.21)$$

$$\cos(X + \pi mI) = \cos X \cos(\pi mI) - \sin X \sin(\pi mI). \quad (2.22)$$

В силу (1.5), (1.6)

$$\sin(\pi mI) = O, \quad \cos(\pi mI) = (-1)^m I. \quad (2.23)$$

В силу (2.21)–(2.23)

$$\sin(X + \pi mI) = (-1)^m \sin X, \quad (2.24)$$

$$\cos(X + \pi mI) = (-1)^m \cos X, \quad (2.25)$$

следовательно, существуют

$$\sin^{-1}(X + \pi mI) = (-1)^{-m} \sin^{-1} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{ctg} X); \quad (2.26)$$

$$\cos^{-1}(X + \pi mI) = (-1)^{-m} \cos^{-1} X, \quad \forall X \in D(\operatorname{tg} X). \quad (2.27)$$

Из (2.27) видно, что для любого $X \in D(\operatorname{tg} X)$ определен

$$\operatorname{tg}(X + \pi mI) = \sin(X + \pi mI) \cos^{-1}(X + \pi mI),$$

т. е. $X + \pi mI \in D(\operatorname{tg} X)$. Из (2.26) следует, что для любого $X \in D(\operatorname{ctg} X)$ определен

$$\operatorname{ctg}(X + \pi mI) = \cos(X + \pi mI) \sin^{-1}(X + \pi mI),$$

т. е. $X + \pi mI \in D(\operatorname{ctg} X)$. В силу (2.24), (2.27) для любого $X \in D(\operatorname{tg} X)$ получаем

$$\operatorname{tg}(X + \pi mI) = (-1)^m \sin X \cdot (-1)^{-m} \cos^{-1} X = \sin X \cos^{-1} X = \operatorname{tg} X;$$

а для любого $X \in D(\operatorname{ctg} X)$ в силу (2.25), (2.26) имеем

$$\operatorname{ctg}(X + \pi mI) = (-1)^m \cos X \cdot (-1)^{-m} \sin^{-1} X = \cos X \sin^{-1} X = \operatorname{ctg} X.$$

Равенства (2.16), (2.17) доказаны. $\square$

В качестве основного периода берется для функций $\sin X, \cos X$ оператор $T_1 = 2\pi I$, для функций $\operatorname{tg} X, \operatorname{ctg} X$ оператор $T_1 = \pi I$.

Покажем, что для операторных тригонометрических функций справедливы стандартные формулы приведения.

Теорема 2.2. *Для любого $X \in L(E)$*

$$\sin(X + \pi I) = -\sin X, \quad \cos(X + \pi I) = -\cos X, \quad (2.28)$$

$$\sin\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = \cos X, \quad \cos\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = -\sin X. \quad (2.29)$$

Для любого $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$

$$\operatorname{tg}\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = -\operatorname{ctg} X, \quad \operatorname{ctg}\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = -\operatorname{tg} X. \quad (2.30)$$

Доказательство. Формулы (2.28) следуют из (2.24), (2.25) при $m = 1$.

Покажем справедливость формул (2.29). В силу (2.3), (2.4)

$$\sin\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = \sin X \cos\left(\frac{\pi}{2}I\right) + \cos X \sin\left(\frac{\pi}{2}I\right), \quad (2.31)$$

$$\cos\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = \cos X \cos\left(\frac{\pi}{2}I\right) - \sin X \sin\left(\frac{\pi}{2}I\right). \quad (2.32)$$

В силу (1.5), (1.6)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}I\right) = I, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}I\right) = O. \quad (2.33)$$

Из соотношений (2.31)–(2.33) следуют формулы (2.29).

Убедимся в справедливости формул (2.30). Пусть $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$. Из равенств (2.29) видно, что существуют

$$\sin^{-1}\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = \cos^{-1} X, \quad (2.34)$$

$$\cos^{-1}\left(X + \frac{\pi}{2}I\right) = -\sin^{-1} X. \quad (2.35)$$

В силу (2.35) определен $\operatorname{tg}(X + \frac{\pi}{2}I) = \sin(X + \frac{\pi}{2}I) \cos^{-1}(X + \frac{\pi}{2}I)$, т. е.

$$X + \frac{\pi}{2}I \in D(\operatorname{tg} X). \quad (2.36)$$

Из (2.34) видно, что определен $\operatorname{ctg}(X + \frac{\pi}{2}I) = \cos(X + \frac{\pi}{2}I) \sin^{-1}(X + \frac{\pi}{2}I)$, т. е.

$$X + \frac{\pi}{2}I \in D(\operatorname{ctg} X). \quad (2.37)$$

В силу (2.36), (2.37) $X + \frac{\pi}{2}I \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$. Из соотношений (2.29), (2.34), (2.35) следуют формулы (2.30). $\square$

Для любого $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$ справедливо тождество

$$\operatorname{tg} X \operatorname{ctg} X = I. \quad (2.38)$$

Действительно, используя сочетательное свойство $F_1(F_2F_3) = (F_1F_2)F_3$ алгебры $L(E)$, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} X \operatorname{ctg} X &= (\sin X \cos^{-1} X)(\cos X \sin^{-1} X) = \sin X(\cos^{-1} X(\cos X \sin^{-1} X)) \\ &= \sin X((\cos^{-1} X \cos X) \sin^{-1} X) = \sin X(I \sin^{-1} X) = \sin X \sin^{-1} X = I.\end{aligned}$$

Тождество (2.38) доказано.

Известно (см. [8, с. 141]), что если $F_1, F_2 \in GL(E)$, то $F_1F_2 \in GL(E)$ и

$$(F_1F_2)^{-1} = F_2^{-1}F_1^{-1}. \quad (2.39)$$

Используя формулу (2.39), получаем для любого $X \in D(\operatorname{tg} X) \cap D(\operatorname{ctg} X)$

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}^{-1} X &= (\cos X \sin^{-1} X)^{-1} = \sin X \cos^{-1} X = \operatorname{tg} X, \\ \operatorname{tg}^{-1} X &= (\sin X \cos^{-1} X)^{-1} = \cos X \sin^{-1} X = \operatorname{ctg} X,\end{aligned}$$

т. е.

$$\operatorname{tg} X = \operatorname{ctg}^{-1} X, \quad \operatorname{ctg} X = \operatorname{tg}^{-1} X. \quad (2.40)$$

В дальнейшем понадобятся следующие равенства:

$$e^X e^{-X} = e^{-X} e^X = I, \quad \forall X \in L(E); \quad (2.41)$$

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \quad (2.42)$$

для любых $A, B \in L(E)$, удовлетворяющих условию $AB = BA$.

Некоторые соотношения для скалярных гиперболических функций переносятся на операторные гиперболические функции.

Справедливо основное операторное гиперболическое тождество: для любого $X \in L(E)$

$$\operatorname{ch}^2 X - \operatorname{sh}^2 X = I. \quad (2.43)$$

Действительно, используя соотношения (0.11), (2.1), (2.41), (2.42), получаем

$$\operatorname{ch}^2 X = 4^{-1}(e^{2X} + 2I + e^{-2X}), \quad \operatorname{sh}^2 X = 4^{-1}(e^{2X} - 2I + e^{-2X}),$$

откуда следует тождество (2.43).

Для любого $X \in D(\operatorname{th} X) \cap D(\operatorname{cth} X)$

$$\operatorname{th} X \operatorname{cth} X = I; \quad (2.44)$$

$$\operatorname{th} X = \operatorname{cth}^{-1} X, \quad \operatorname{cth} X = \operatorname{th}^{-1} X. \quad (2.45)$$

Доказательство тождества (2.44) аналогично доказательству соотношения (2.38). Справедливость равенств (2.45) проверяется аналогично тому, как были получены соотношения (2.40).

Для любых $X_1, X_2 \in L(E)$, удовлетворяющих условию (2.2), справедливы формулы сложения:

$$\operatorname{sh}(X_1 + X_2) = \operatorname{sh} X_1 \operatorname{ch} X_2 + \operatorname{ch} X_1 \operatorname{sh} X_2, \quad (2.46)$$

$$\operatorname{ch}(X_1 + X_2) = \operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 + \operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2. \quad (2.47)$$

Доказательство формул (2.46), (2.47) идентично: с помощью соотношений (0.11), (2.1) показывается, что правая часть формулы равна ее левой части.

В силу (0.8), (2.46), (2.47)

$$\operatorname{sh}(X_1 - X_2) = \operatorname{sh} X_1 \operatorname{ch} X_2 - \operatorname{ch} X_1 \operatorname{sh} X_2, \quad (2.48)$$

$$\operatorname{ch}(X_1 - X_2) = \operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 - \operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2. \quad (2.49)$$

В силу (2.46), (2.47) справедливы формулы для операторных гиперболических функций двойного аргумента:

$$\operatorname{sh} 2X = 2 \operatorname{sh} X \operatorname{ch} X, \quad \operatorname{ch} 2X = \operatorname{ch}^2 X + \operatorname{sh}^2 X.$$

Из (2.46)–(2.49) следуют формулы преобразования произведения операторных гиперболических функций в сумму:

$$\operatorname{sh} X_1 \operatorname{ch} X_2 = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(X_1 + X_2) + \operatorname{sh}(X_1 - X_2)], \quad (2.50)$$

$$\operatorname{ch} X_1 \operatorname{ch} X_2 = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(X_1 + X_2) + \operatorname{ch}(X_1 - X_2)], \quad (2.51)$$

$$\operatorname{sh} X_1 \operatorname{sh} X_2 = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(X_1 + X_2) - \operatorname{ch}(X_1 - X_2)]. \quad (2.52)$$

Из (2.50)–(2.52) следуют формулы преобразования суммы и разности одноименных операторных гиперболических функций в произведение:

$$\operatorname{sh} X_1 + \operatorname{sh} X_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{X_1 + X_2}{2} \operatorname{ch} \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad (2.53)$$

$$\operatorname{sh} X_1 - \operatorname{sh} X_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{X_1 - X_2}{2} \operatorname{ch} \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad (2.54)$$

$$\operatorname{ch} X_1 + \operatorname{ch} X_2 = 2 \operatorname{ch} \frac{X_1 + X_2}{2} \operatorname{ch} \frac{X_1 - X_2}{2}, \quad (2.55)$$

$$\operatorname{ch} X_1 - \operatorname{ch} X_2 = 2 \operatorname{sh} \frac{X_1 - X_2}{2} \operatorname{sh} \frac{X_1 + X_2}{2}. \quad (2.56)$$

Напомним, что формулы (2.46)–(2.56) справедливы при выполнении условия (2.2).

Укажем одно полезное применение операторных тригонометрических формул.

Пусть $B \in L(E)$, B фиксирован.

Теорема 2.3. *Операторные функции $Y_1(t) = \sin Bt$, $Y_2(t) = \cos Bt$ непрерывны на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{R}$, t фиксировано. Покажем непрерывность функции $Y_1(t)$ в взятой точке t , т. е. покажем, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Y_1(t) = 0, \quad (2.57)$$

где $\Delta Y_1(t) = Y_1(t + \Delta t) - Y_1(t)$. Согласно определению предела, равенство (2.57) означает, что

$$\|\Delta Y_1(t)\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (2.58)$$

Используя формулу (2.11), получаем

$$\Delta Y_1(t) = 2 \sin \frac{B\Delta t}{2} \cos \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right). \quad (2.59)$$

Следовательно,

$$\|\Delta Y_1(t)\| \leq 2 \left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\| \left\| \cos \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right) \right\|. \quad (2.60)$$

Известно (см. [8, с. 132]), что для любого $X \in L(E)$

$$\|\sin X\| \leq \operatorname{sh} \|X\|, \quad (2.61)$$

$$\|\cos X\| \leq \operatorname{ch} \|X\|. \quad (2.62)$$

В силу оценки (2.61)

$$\left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\| \leq \operatorname{sh} \frac{\|B\| |\Delta t|}{2}. \quad (2.63)$$

В силу непрерывности скалярной функции $\operatorname{sh} x$ и равенства $\operatorname{sh} 0 = 0$ справедлив предельный переход $\operatorname{sh} \frac{\|B\| |\Delta t|}{2} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, следовательно, в силу (2.63)

$$\left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (2.64)$$

В силу (2.4)

$$\cos \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right) = \cos Bt \cos \frac{B\Delta t}{2} - \sin Bt \sin \frac{B\Delta t}{2},$$

следовательно,

$$\left\| \cos \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right) \right\| \leq \|\cos Bt\| \left\| \cos \frac{B\Delta t}{2} \right\| + \|\sin Bt\| \left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\|. \quad (2.65)$$

В силу оценки (2.62)

$$\left\| \cos \frac{B\Delta t}{2} \right\| \leq \operatorname{ch} \frac{\|B\| |\Delta t|}{2}. \quad (2.66)$$

Из непрерывности скалярной функции $\operatorname{ch} x$ и равенства $\operatorname{ch} 0 = 1$ получаем

$$\operatorname{ch} \frac{\|B\| |\Delta t|}{2} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 1,$$

следовательно, в силу неравенства (2.66) $\left\| \cos \frac{B\Delta t}{2} \right\|$ ограничена при $\Delta t \rightarrow 0$. Значит, произведение $\|\cos Bt\| \left\| \cos \frac{B\Delta t}{2} \right\|$ является ограниченной величиной при $\Delta t \rightarrow 0$. В силу соотношения (2.64) имеем

$$\|\sin Bt\| \left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом, правая часть неравенства (2.65) ограничена при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, левая часть этого неравенства является ограниченной величиной при $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда, в силу (2.64) правая часть неравенства (2.60) сходится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, справедливо соотношение (2.58). Непрерывность функции $Y_1(t)$ доказана.

Покажем непрерывность функции $Y_2(t)$ во взятой точке t , т. е. покажем, что

$$\|\Delta Y_2(t)\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0, \quad (2.67)$$

где $\Delta Y_2(t) = Y_2(t + \Delta t) - Y_2(t)$. Используя формулу (2.13), получаем

$$\Delta Y_2(t) = -2 \sin \frac{B\Delta t}{2} \sin \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right). \quad (2.68)$$

Следовательно,

$$\|\Delta Y_2(t)\| \leq 2 \left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\| \left\| \sin \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right) \right\|. \quad (2.69)$$

В силу (2.3)

$$\sin \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right) = \sin Bt \cos \frac{B\Delta t}{2} + \cos Bt \sin \frac{B\Delta t}{2},$$

следовательно,

$$\left\| \sin \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right) \right\| \leq \left\| \sin Bt \right\| \left\| \cos \frac{B\Delta t}{2} \right\| + \left\| \cos Bt \right\| \left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\|. \quad (2.70)$$

Выше было показано, что $\left\| \cos \frac{B\Delta t}{2} \right\|$ ограничена при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, произведение $\left\| \sin Bt \right\| \left\| \cos \frac{B\Delta t}{2} \right\|$ является ограниченной величиной при $\Delta t \rightarrow 0$. В силу (2.64)

$$\left\| \cos Bt \right\| \left\| \sin \frac{B\Delta t}{2} \right\| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0.$$

Таким образом, правая часть неравенства (2.70) ограничена при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, левая часть этого неравенства является ограниченной величиной при $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда, в силу (2.64) правая часть неравенства (2.69) сходится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, справедлив предельный переход (2.67). Непрерывность функции $Y_2(t)$ установлена. $\square$

Найдем производные функций $Y_1(t)$, $Y_2(t)$. Для этого потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.1. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k \quad (2.71)$$

с членами из алгебры $L(E)$ сходится и его сумма равна S . Тогда при любом фиксированном $H \in L(E)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} H F_k \quad (2.72)$$

сходится и его сумма равна HS :

$$\sum_{k=1}^{\infty} H F_k = H \sum_{k=1}^{\infty} F_k \quad (2.73)$$

Доказательство. Сходимость ряда (2.71) означает, по определению, что последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится к S , т. е.

$$\|S_n - S\| \rightarrow 0. \quad (2.74)$$

Заметим, что частичные суммы $\tilde{S}_n$ ряда (2.72) имеют вид

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n H F_k = H \sum_{k=1}^n F_k = H S_n.$$

Используя соотношение (2.74), получаем

$$\|\tilde{S}_n - HS\| = \|HS_n - HS\| = \|H(S_n - S)\| \leq \|H\| \|S_n - S\| \rightarrow 0,$$

следовательно, $\|\tilde{S}_n - HS\| \rightarrow 0$, а это означает, по определению, что ряд (2.72) сходится и его сумма равна HS , т. е. справедливо равенство (2.73). $\square$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t), \quad (2.75)$$

членами которого являются функции, определенные на промежутке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ со значениями в алгебре $L(E)$.

Теорема 2.4. Пусть все члены ряда (2.75) непрерывны на $[a, b]$ и этот ряд сходится равномерно на $[a, b]$. Тогда сумма $S(t)$ данного ряда непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство теоремы 2.4 аналогично доказательству теоремы о непрерывности суммы функционального ряда в скалярном случае (см. [12, с. 128]).

В дальнейшем потребуются следующие три утверждения.

Замечание 2.1. Каждый оператор из алгебры $L(E)$ замкнут (см. [13, с. 208]).

Замечание 2.2. Замкнутый оператор можно выносить за знак предела (см. [1, с. 28]).

Замечание 2.3. Замкнутый оператор можно выносить за знак производной (см. [1, с. 28]).

Теорема 2.5. Операторные функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и справедливы формулы

$$Y_1'(t) = (\sin Bt)' = B \cos Bt, \quad (2.76)$$

$$Y_2'(t) = (\cos Bt)' = -B \sin Bt. \quad (2.77)$$

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{R}$, t фиксировано. Покажем справедливость равенства (2.76), т. е. покажем, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Y_1(t)}{\Delta t} = B \cos Bt. \quad (2.78)$$

В силу (2.59)

$$\frac{\Delta Y_1(t)}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin \frac{B\Delta t}{2} \cos \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\right). \quad (2.79)$$

Далее,

$$\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin \frac{B\Delta t}{2} = \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k+1} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

или

$$\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin \frac{B\Delta t}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} B(-1)^k \frac{B^{2k} (\Delta t)^{2k}}{2^{2k} (2k+1)!}. \quad (2.80)$$

С помощью первого признака сравнения и признака Даламбера показывается, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} \quad (2.81)$$

сходится абсолютно, следовательно, этот ряд сходится (см. [8, с. 126]). В силу равенства (2.73) (см. лемму 2.1) из (2.80) получаем

$$\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin \frac{B\Delta t}{2} = B \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}. \quad (2.82)$$

В силу (2.79), (2.82)

$$\frac{\Delta Y_1(t)}{\Delta t} = \left[B \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} \right] \cos \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right). \quad (2.83)$$

В силу непрерывности функции $Y_2(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \cos \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2} \right) = \cos Bt. \quad (2.84)$$

Нас интересует поведение суммы ряда (2.81) при $\Delta t \rightarrow 0$. Поэтому будем в дальнейшем рассматривать этот ряд как функциональный ряд с общим членом

$$u_k(\Delta t) = (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}.$$

В силу малости Δt будем считать, что $|\Delta t| \leq 1$. Тогда функциональный ряд (2.81) мажорируется на промежутке $[-1, 1]$ сходящимся знакоположительным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|B\|^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!}.$$

Известно (см. [9, с. 160]), что из мажорируемости функционального ряда, членами которого являются функции со значениями в нормированном пространстве, следует равномерная сходимость этого ряда. Значит, функциональный ряд (2.81) сходится равномерно на промежутке $[-1, 1]$. Кроме того, члены $u_k(\Delta t)$ этого ряда непрерывны на $[-1, 1]$. Следовательно, в силу теоремы 2.4 сумма $S(\Delta t)$ ряда (2.81) непрерывна на промежутке $[-1, 1]$. Значит, для ряда (2.81) возможен почленный переход к пределу, в частности,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} \right] \\ &= I + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(-1)^k B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} = I + O = I. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Учитывая замечания 2.1, 2.2 и равенство (2.85), получаем

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[B \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} \right] = B \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{B^{2k}(\Delta t)^{2k}}{2^{2k}(2k+1)!} = B. \quad (2.86)$$

Из соотношений (2.83), (2.84), (2.86) следует равенство (2.78). Формула (2.76) доказана.

Покажем справедливость формулы (2.77), т. е. покажем, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Y_2(t)}{\Delta t} = -B \sin Bt. \quad (2.87)$$

В силу (2.68)

$$\frac{\Delta Y_2(t)}{\Delta t} = -\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin \frac{B\Delta t}{2} \sin \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\right). \quad (2.88)$$

В силу непрерывности функции $Y_1(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sin \left(Bt + \frac{B\Delta t}{2}\right) = \sin Bt. \quad (2.89)$$

В силу (2.82), (2.86)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} \sin \frac{B\Delta t}{2} \right] = B. \quad (2.90)$$

Из соотношений (2.88)–(2.90) следует равенство (2.87). Формула (2.77) доказана. Из равенств (2.76), (2.77) видно, в силу непрерывности функций $\sin Bt$, $\cos Bt$ на $\mathbb{R}$, что производные $Y_1'(t)$, $Y_2'(t)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, т. е. функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$. $\square$

Учитывая формулы (2.76), (2.77), включение $B^n \in L(E)$, $n \in \mathbb{N}$, и замечания 2.1, 2.3, получаем

Следствие 2.2. *Функции $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливы формулы*

$$(\sin Bt)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^{l+1} B^m \cos Bt, & m = 2l - 1, \\ (-1)^l B^m \sin Bt, & m = 2l; \end{cases}$$

$$(\cos Bt)^{(m)} = \begin{cases} (-1)^l B^m \sin Bt, & m = 2l - 1, \\ (-1)^l B^m \cos Bt, & m = 2l. \end{cases}$$

Для операторной экспоненты $Y(t) = e^{At}$ (здесь $A \in L(E)$, A фиксирован) имеем

$$Y'(t) = Ae^{At} \quad (2.91)$$

(см. [2, с. 41]). Учитывая формулу (2.91), включение $A^n \in L(E)$, $n \in \mathbb{N}$, и замечания 2.1, 2.3, получаем: функция $Y(t)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$ и для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива формула $Y^{(m)}(t) = A^m e^{At}$.

В перспективе естественный интерес представляет исследование вопросов, связанных с дифференцированием и интегрированием операторных функций семейства (0.2), в частности, конкретных функций из этого семейства, рассмотренных в данной работе. Интеграл Римана для функций из семейства (0.2) построен в [14].

Результаты данной работы анонсированы в [15].

References

- [1] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967. [S. G. Kreyn, *Linear Differential Equations in a Banach space*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russian)].
- [2] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970. [Y. L. Daleckiy, M. G. Kreyn, *Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russian)].
- [3] *Функциональный анализ*, Справочная математическая библиотека, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972. [*Functional Analysis*, Reference Math Library, ed. S. G. Krein, Nauka, Moscow, 1972 (In Russian)].
- [4] А. Н. Талдыкин, *Элементы прикладного функционального анализа*, Высш. школа, М., 1982. [A. N. Taldykin, *Elementy Prikladnogo Funkcionalnogo Analiza*, Vyssh. shk. Publ., Moscow, 1982 (In Russian)].
- [5] В. И. Фомин, “Об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве в случае комплексных характеристических операторов”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 211–217. [V. I. Fomin, “About a general solution of a linear homogeneous differential equations in a Banach space in the case of complex characteristic operators”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 211–217 (In Russian)].
- [6] В. И. Фомин, “О случае комплексных корней характеристического операторного полинома линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **56**:8 (2020), 1045–1054; англ. пер.: V. I. Fomin, “On the Case of Complex Roots of the Characteristic Operator Polynomial of a Linear n th-Order Homogeneous Differential Equation in a Banach Space”, *Differential Equations*, **56**:8 (2020), 1021–1030.
- [7] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева, *Задачи и упражнения по функциональному анализу*, Физматлит, М., 2002. [V. A. Trenogin, B. M. Pisarevskij, T. S. Soboleva, *Problems and Exercises in Functional Analysis*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].
- [8] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980. [V. A. Trenogin, *Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russian)].
- [9] Л. Шварц, *Анализ*. Т. 1, Мир, М., 1972. [L. Schwartz, *Analysis*. V. 1, Mir Publ., Moscow, 2002 (In Russian)].
- [10] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976. [A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].
- [11] В. И. Фомин, “Об основном свойстве комплексной операторной экспоненциальной функции комплексного операторного аргумента”, *Вестник российских университетов. Математика*, **24**:127 (2019), 324–332. [V. I. Fomin, “About a complex operator exponential function of a complex operator argument main property”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **24**:127 (2019), 324–332 (In Russian)].
- [12] А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. Б. Сугак, *Математический анализ. Часть 2*, Высш. шк., Минск, 1990. [A. I. Gerasimovich, N. P. Keda, M. B. Sugak, *Mathematical Analysis. Part 2*, Vyssh. shk. Publ., Minsk, 1990 (In Russian)].
- [13] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972. [T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russian)].
- [14] В. И. Фомин, “Об интеграле Римана операторной функции операторного переменного”, *Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна*, Материалы международной конференции (Воронеж), Тезисы докладов, 2022, 232–234. [V. I. Fomin, “On the Riemann integral of an operator function of an operator variable”, *Voronezh Winter Mathematical School S. G. Krein*, Materials of the International Conference (Voronezh), Abstracts, 2022, 232–234 (In Russian)].
- [15] В. И. Фомин, “Об операторных функциях операторного переменного”, *Воронежская весенняя математическая школа*, Материалы международной конференции (Воронеж), Тезисы докладов, 2022, 278–279. [V. I. Fomin, “On the operator functions of an operator variable”, *Voronezh Spring Mathematical School*, Materials of the International Conference (Voronezh), Abstracts, 2022, 278–279 (In Russian)].

Информация об авторе

Фомин Василий Ильич, кандидат физико-математических наук, доцент. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: vasilyfomin@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Поступила в редакцию 04.10.2022 г.

Поступила после рецензирования 26.01.2023 г.

Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the author

Vasiliy I. Fomin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate professor. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: vasilyfomin@bk.ru

ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3846-4882>

Received 04.10.2022

Reviewed 26.01.2023

Accepted for press 10.03.2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Раин Т., 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-90-96

УДК 004.896



Описание программного комплекса для моделирования робота-манипулятора

Ту РАИН

ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет
(НИУ «БелГУ»)»

308015, Российская Федерация, г. Белгород, ул. Победы, 85

Аннотация. В статье предлагается разработка программного модуля для моделирования кинематики и динамики манипулятора с пятью степенями подвижности. Для решения прямой задачи кинематики манипулятора использован метод Денавита–Хартенберга. Для решения обратной задачи кинематики и динамики манипулятора использованы аналитические методы — метод Левенберга–Марквардта, метод Ньютона–Эйлера, и метод мягких вычислений — адаптивная нейро-нечеткая система вывода. Программный модуль для моделирования кинематики и динамики манипулятора разработан с использованием программного комплекса системы автоматизированного проектирования SolidWorks и программы MatLab. Полученный программный модуль позволяет выполнять моделирование кинематики и динамики манипулятора на основе описываемых методов, визуализацию результатов моделирования, формирование траектории для целевого положения и ориентации рабочего органа манипулятора, имитационное моделирование движения манипулятора по заданной траектории.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, моделирование кинематики, метод Левенберга–Марквардта, моделирование динамики, метод Ньютона–Эйлера, манипулятор

Для цитирования: Раин Т. Описание программного комплекса для моделирования робота-манипулятора // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 90–96. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-90-96.

SCIENTIFIC ARTICLES

© T. Rain, 2023

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-90-96



Program complex for modelling a manipulating robot

Thu RAIN

Belgorod State National Research University
85, Pobedy St., Belgorod 308015, Russian Federation

Abstract. The article proposes the development of a software module for modeling the kinematics and dynamics of a manipulator with five degrees of freedom. To solve the forward kinematics problem of the manipulator, the Denavit–Hartenberg method was used. To solve the inverse kinematics and dynamics problem of the manipulator, analytical methods (the Levenberg–Marquardt method, the Newton–Euler method) and a soft computing method (adaptive neuro-fuzzy inference system) were used. The software module for modeling the kinematics and dynamics of the manipulator was developed using the software package of the SolidWorks computer-aided design system and the MatLab program. The developed software module is able to simulate the kinematics and dynamics of the manipulator based on the described methods, visualize the simulation results, generate a trajectory for the target position and orientation of the end-effector of the manipulator, simulate the movement of the manipulator along a given trajectory.

Keywords: computer modeling, kinematics modeling, Levenberg–Marquardt method, dynamics modeling, Newton–Euler method, manipulator

Mathematics Subject Classification: 34A30, 34C10, 34D05, 34K15.

For citation: Rain T. Program complex for modelling a manipulating robot. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 90–96. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-90-96. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Программное обеспечение для кинематического и динамического моделирования манипуляторов требуется для исследования движения рабочего органа, анализа конструкций, разработки системы автоматического управления и алгоритмов функционирования манипуляторов (см. [1, 2]). Одним из основных преимуществ программных симуляций является то, что они могут предоставить пользователям практическую обратную связь при разработке реальных систем. Это позволяет разработчику определить правильность и эффективность проекта еще до того, как система будет построена. Существуют несколько алгоритмов программного обеспечения для моделирования манипуляторов (см., например, [3, 4]). Во многих работах для кинематического анализа различных манипуляторов использовалась программа RoboAnalyzer. Программное обеспечение для автоматизированного проектирования «САПР», такое как SolidWorks, CATIA и Autodesk, также используется для моделирования манипуляторов.

В данной работе предлагается схема проектирования и осуществлена реализация программного модуля компьютерного и имитационного моделирования манипулятора в рабочей зоне. Реализация разработанных алгоритмов и методов позволит применять их при разработке манипуляторов, синтезе систем управления манипуляторами. Данный программный модуль компьютерного и имитационного моделирования также позволяет проводить эксперименты, необходимые для исследования предложенных в работе методов и алгоритмов. Разработанные программные модули предоставляют следующие функциональности: визуализация 3D моделирования; взаимодействие с пользователем через графический интерфейс; расчет обратной задачи кинематики «ОЗК» манипулятора на основе метода Левенберга–Марквардта и АНСВ; расчет обратной задачи динамики «ОЗД» манипулятора на основе метода Ньютона–Эйлера и АНСВ; формирование траектории для целевого положения и ориентации рабочего органа манипулятора; имитационное моделирование движения манипулятора по заданной траектории.

1. Постановка задачи и описание модели

Для программирования математического моделирования манипулятора выбрана среда «MATLAB». При реализации 3D моделирования предложено использовать САПР-программу «SolidWorks». С целью достижения фактического размера, степени свободы и других факторов, касающихся анимации и моделирования манипулятора, был рассмотрен манипулятор с пятью степенями свободы. После разработки 3D-деталей отдельные детали были собраны в один файл «сборка». После ввода деталей в сборку были введены шарниры вращения манипулятора. Также при виртуальной сборке манипулятора, помимо обычных ограничений, учитывалось то, что 3D-детали помещались в вертикальное положение. Это положение было принято для облегчения следующих шагов; собранное положение рассматривалось как исходное, и все изменения углов стыков рассчитывались в соответствии с этим положением.

Значения соответствующих параметров Денавита–Хартенберга, связанных с соглашением о присоединении систем отсчета к звеньям манипулятора (подробнее о параметрах Денавита–Хартенберга см. [5]), указаны в таблице 1, геометрических параметров — в таблице 2.

Таблица 1

Параметры Денавита–Хартенберга (Д-Х)
манипулятора с пятью степенями свободы

Звено	a_i (м)	α_i (рад)	d_i (м)	θ_i (рад)
1	0	$\pi/2$	d_1	θ_1
2	0.246	0	0	θ_2
3	0.163	0	0	θ_3
4	0	$-\pi/2$	0	θ_4
5	0	0	0.165	θ_5

Таблица 2

Геометрические параметры манипулятора

Звено	Высота (м)	Радиус (м)	Масса (кг)
1	0.071	0.06	0.102
2	0.295	0.035	0.569
3	0.205	0.035	0.310
4	0.091	0.035	0.123
5	0.08	0.05	0.142

Затем модель интерпретируется в формат URDF (Унифицированный формат описания робототехники) для проведения моделирования и анализа. Процесс перевода САПР, по сути, состоит из двух этапов. Первоначально сборка САПР, разработанная в SolidWorks, экспортируется в формат URDF. Затем файл URDF импортируется в MATLAB для создания имитационной модели, которая будет открыта в среде моделирования.

2. Разработка компонентов программного интерфейса «GUI»

Для упрощения экспериментальной работы и получения лучшего представления о поведении системы в среде MATLAB был разработан графический пользовательский интерфейс (GUI) с использованием инструмента Среды разработки графического пользовательского интерфейса MATLAB (GUIDE). Для выбранного набора параметров графический интерфейс выполняет моделирование, отображающее временные характеристики углов сочленения, крутящих моментов в сочленениях и положения рабочего органа манипулятора.

Определение положения и ориентации рабочего органа при заданных значениях вектора обобщенных координат манипулятора называется прямой задачей кинематики. Прямую задачу кинематику манипулятора формулируют следующим образом: по заданному вектору обобщенных координат $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T$ найти положение и ориентацию рабочего органа $s = f(\theta)$. Положение и ориентацию рабочего органа будем искать в форме матрицы однородного преобразования

$$T_i = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, 5}$$

которая задает переход от системы координат i -го звена к системе координат $(i - 1)$ -го звена, $i = \overline{2, 5}$. Согласно правилам Денавита–Хартенберга, матрица однородного преобразования T_i имеет вид

$$T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\alpha_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\alpha_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выполняя необходимые вычисления, получим ориентацию рабочего органа

$$\begin{aligned} n_x &= s_1 s_5 - c_5 [c_4 (c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3) + s_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)], \\ n_y &= -c_1 s_5 - c_5 [c_4 (s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1) + s_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)], \\ n_z &= c_5 (c_4 s_2 s_3 + s_4 c_2 s_3), \\ o_x &= c_5 s_1 + [c_4 (c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3) + s_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2)], \\ o_y &= s_5 [c_4 (s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1) + s_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2)] - c_1 c_5, \\ o_z &= -s_5 [c_4 (c_2 s_3 + c_3 s_2) + s_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3)], \\ a_x &= c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) - s_4 (c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3), \\ a_y &= c_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) - s_4 (s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1), \\ a_z &= s_4 (c_2 s_3 + c_3 s_2) - c_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3); \end{aligned}$$

а также положение рабочего органа

$$\begin{aligned} p_x &= d_5 [c_4 (c_1 c_2 s_3 + c_1 c_3 s_2) - s_4 (c_1 s_2 s_3 - c_1 c_2 c_3)] + a_2 c_1 c_2 + a_3 c_1 c_2 c_3 - a_3 c_1 s_2 s_3, \\ p_y &= d_5 [c_4 (c_2 s_1 s_3 + c_3 s_1 s_2) - s_4 (s_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 s_1)] + a_2 c_2 s_1 + a_3 c_2 c_3 s_1 - a_3 s_1 s_2 s_3, \\ p_z &= d_1 + a_2 s_2 - d_5 [c_4 (c_2 c_3 - s_2 s_3) - s_4 (c_2 s_3 + c_3 s_2)] + a_3 c_2 s_3 + a_3 c_3 s_2. \end{aligned}$$

Определение вектора обобщенных координат, который позволяет манипулятору достичь желаемых положения и ориентаций рабочего органа, называется обратной задачей кинематики. В данной работе для численного решения обратной задачи кинематики используется метод Левенберга–Марквардта. Кинематические параметры манипулятора представлены набором ограничений, которые накладываются на вектор обобщенных координат. Ограничение по положению рабочего органа можно записать в виде

$$p_i(\theta) = p_i^d,$$

где $p \in \mathbb{R}^3$ — текущее положение рабочего органа, $p^d \in \mathbb{R}^3$ — целевое положение в пространстве. Для ограничения ориентации используется условие

$$R_i(\theta) = R_i^d,$$

где $R_i \in SO(3)$ — ориентация рабочего органа, $R_i^d \in SO(3)$ — целевая ориентация в пространстве. В обоих случаях вектор невязок $e_i(\theta)$ может быть определен как

$$e_i(\theta) = \begin{cases} p_i^d - p_i(\theta), \\ \alpha(R_i^d R_i(\theta)^T), \end{cases}$$

где $\alpha(R) \in \mathbb{R}^3$ для произвольного $R \in SO(3)$ — эквивалентный вектор угла–оси.

Принимая число всех ограничений равным $3m$, определим вектор невязок

$$e(\theta) = [e_1^T(\theta), e_2^T(\theta), \dots, e_m^T(\theta)]^T \in \mathbb{R}^{3m}.$$

Решение обратной задачи кинематики сводится к решению следующего нелинейного уравнения

$$e(\theta) = 0.$$

Алгоритм метода Левенберга–Марквардта включает следующие этапы:

ШАГ 1. Инициализация значений, которые будут использоваться для настройки коэффициента демпфирования: параметров θ , весовой матрицы W_E , параметра λ , а также λ_{up} и λ_{down} .

ШАГ 2. Проверка счетчика итераций: если счетчик итераций не достиг максимального количества шагов, то переход к шагу 3, если достиг, то переход к концу алгоритма.

ШАГ 3. Расчет матрицы преобразования T_i и оценка вектора невязок e .

ШАГ 4. Проверка: если $C < tol$, то переход к концу; если $C > tol$, то переход к шагу 5.

ШАГ 5. Вычисление матрицы Якобиана J , $g_k = JW_E J + \lambda I$, функции стоимости, $\nabla C = J^T W_E e$ и $C = \frac{1}{2}e^2$.

ШАГ 6. Вычисление нового значения $\theta_{new} = \theta + g^{-1} \nabla C$.

ШАГ 7. Оценка нового вектора невязок e_{new} в точке, заданной θ_{new} и вычисление функции оценки в новой точке $C_{new} = \frac{1}{2}e_{new}^2$.

ШАГ 8. Проверка: если $C_{new} > C$, то отклонить шаг, сохранить старый параметр предположения θ и старые невязки e , настроить $\lambda = \lambda \times \lambda_{up}$ и перейти к шагу 2; а если $C_{new} < C$, то принимать шаг, установить $\theta = \theta_{new}$ и $e = e_{new}$, $\lambda = \lambda / \lambda_{down}$ и перейти к шагу 2.

Заключение. В данной работе для программирования математического моделирования манипулятора использован язык программирования MATLAB. Для реализации 3D-модели манипулятора использована САПР-программа «SolidWorks». Разработаны программные модули для компьютерного и имитационного моделирования перемещения манипулятора в рабочей зоне со следующими функциями: визуализация 3D-моделирования; взаимодействие с пользователем через графический интерфейс; расчет ОЗК манипулятора на основе метода Левенберга–Марквардта; расчет ОЗД манипулятора на основе метода Ньютона–Эйлера; формирование траектории для целевого положения и ориентации рабочего органа манипулятора; имитационное моделирование движения манипулятора по заданной траектории.

References

- [1] Т. Раин, В.М. Довгаль, Н.С. Ян, “Моделирование кинематического управления роботом-манипулятором «Intelbot» на основе адаптивной нейро-нечеткой системы вывода (ANFIS)”, *Научные ведомости БелГУ. Сер. Экономика. Информатика*, **45** (2018), 497–509. [T. Rain, V. M. Dovgal, N. S. Yan, “Modelling of the adaptive neuro-fuzzy inference system based control of 5-dof robotic manipulator “Intelbot”, *Belgorod State University Scientific Bulletin. (Economics. Information Technologies)*, **45** (2018), 497–509 (In Russian)].
- [2] Т. Раин, Н.С. Ян, “Моделирование динамики манипулятора с использованием адаптивной нейро-нечеткой системы вывода”, *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*, **7:4** (2019), 1–14. [T. Rain, V. M. Dovgal, N. S. Yan, “Dynamic modelling of manipulator using adaptive neuro fuzzy inference system Modeling”, *Modeling, Optimization and Information Technology*, **7:4** (2019), 1–14 (In Russian)].

- [3] В. Н. Нестеров, К. В. Жеребятьев, “Математическое моделирование шестизвенного манипулятора универсального промышленного робота. Прямая кинематическая задача для робота ПР125”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*, 2005, № 32, 19–28. [V. N. Nesterov, K. V. Zherebyatiev, “Mathematical modeling of a six-link manipulator of a universal industrial robot. Direct kinematic problem for the PR125 robot”, *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*, 2005, № 32, 19–28 (In Russian)].
- [4] С. В. Алексеева, “Математическое моделирование одного типа трехзвенного манипулятора робота”, *Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии*, 2019, № 229, 255–265. [S. V. Alekseeva, “Mathematical modeling of one type of three-link robot manipulator”, *Izvestia Sankt-Peterburgskoj Lesotekhniceskoj Akademii*, 2019, № 229, 255–265 (In Russian)].
- [5] J. Angeles, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods and Algorithms*, Springer, New York, 2007.

Информация об авторе

Раин Ту, научный соискатель. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород, Российская Федерация. E-mail: thurein.48@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5964-0641>

Поступила в редакцию 21.11.2022 г.
Поступила после рецензирования 02.03.2023 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the author

Thu Rain, Research Applicant. Belgorod State National Research University, Belgorod, Russian Federation. E-mail: thurein.48@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5964-0641>

Received 21.11.2022
Reviewed 02.03.2023
Accepted for press 10.03.2023

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \lambda$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$S_{25} = E$$

$$H^2(\Pi, M^{\Pi}) \rightarrow$$

$$\{ \mu_p^{(0)} \} \rightarrow \{ \mu_p^{(\infty)} \}$$

$$L_v(E, 1)$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

$$\text{other entries in } \mathbb{Z}$$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \\ \alpha & \frac{\bar{\alpha} + 2}{\alpha + 1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma \in G \times E \mathbb{Z}_p$$

$$A \frac{4}{\pi} = \frac{1}{\pi} a a \frac{1}{\pi} \sigma = -\pi$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|R|, |M|, |VE| =$$

$$\pi \approx \frac{1}{11}$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots)$$

$$\psi = \frac{1}{\mu_{H^2}}$$

$$\lambda + \mu$$

$$\lambda' + \mu' = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$K, 0/X, 0 \text{ Ind } \mathbb{Z}/p$$

$$\det(X, \Theta X) \neq 0$$