

ISSN 2686-9667

ВЕСТНИК
РОССИЙСКИХ
УНИВЕРСИТЕТОВ
МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN
UNIVERSITIES
REPORTS
MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



TOM 24
№ 128
2019

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 24, № 128,
2019

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендуемых
Высшей аттестационной комиссией для опубликования основных научных результатов
диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук,
на соискание ученой степени доктора наук по физико-математическим наукам
(распоряжение Минобрнауки России от 28 декабря 2018 г. № 90-р)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS		343
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ		
<i>С. Берчану, А. Георге</i>	Группа Якоби и ее представления голоморфной дискретной серии на областях Зигеля–Якоби	345
<i>Х. Геббай, С. Сегни, М. Гиат, В. Мерчела</i>	Псевдоспектр оператора конвенции-диффузии с переменным членом реакции	354
<i>Л.И. Грошева</i>	Разложение граничных представлений на плоскости Лобачевского в сечениях линейных расслоений	368
<i>З.Т. Жуковская, С.Е. Жуковский</i>	О существовании непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для неявного дифференциального уравнения	376
<i>Е.С. Жуковский, Ж.П. Мунембе</i>	О неявной и обратной многозначных функциях в топологических пространствах	384
<i>Г.Л. Литвинов, А.Я. Родионов, С.Н. Сергеев, А.Н. Соболевский</i>	Универсальные алгоритмы решения дискретных стационарных уравнений Беллмана	393
<i>В.Ф. Молчанов</i>	Задачи Радона для гиперboloидов	432
<i>С.С. Платонов</i>	Спектральный синтез на нульмерных локально компактных абелевых группах	450

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки».

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), доктор, проф. Г. ван Дейк (г. Лейден, Нидерланды), д.ф.-м.н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), д.ф.-м.н., проф. Б.А. Пасынков (г. Москва, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. Ф.Л. Перейра (г. Порто, Португалия), доктор, проф. А.В. Поносков (г. Ос, Норвегия), д.ф.-м.н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: (4752)-72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html>

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-76133 от 03 июля 2019 г.

Подписной индекс 83372 в каталоге АО Агентства «Роспечать»

Редакторы: Ю.А. Бирюкова, М.И. Филатова

Редакторы английских текстов: В.В. Ключихин, С.Ю. Можаров

Технический секретарь М.В. Борзова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. – 2019. – Т. 24, № 128. – 116 с. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128

Подписано в печать 12.12.2019. Дата выхода в свет 10.01.2020

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 14,5. Усл. печ. л. 13,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 19475. Цена свободная

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33.

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2019

© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2019

При перепечатке, а также при цитировании материалов ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 24, no. 128,
2019**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission for publication of principal scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences (order of the Ministry of Science and Higher Education RF no. 90-p of December 28, 2018)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>S. Berceanu, A. Gheorghe</i>	The Jacobi group and its holomorphic discrete series representations on Siegel–Jacobi domains	345
<i>H. Guebbai, S. Segni, M. Ghiat, W. Merchela</i>	The pseudospectrum of the convection-diffusion operator with a variable reaction term	354
<i>L.I. Grosheva</i>	Decomposition of boundary representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles	368
<i>Z.T. Zhukovskaya, S.E. Zhukovskiy</i>	On the existence of a continuously differentiable solution to the Cauchy problem for implicit differential equations	376
<i>E.S. Zhukovskiy, M.J. Munembe</i>	On the implicit and inverse many-valued functions in topological spaces	384
<i>G.L. Litvinov, A.Ya. Rodionov, C.N. Sergeev, A.N. Sobolevskiy</i>	Universal algorithms for solving discrete stationary Bellman equations	393
<i>V.F. Molchanov</i>	Radon problems for hyperboloids	432
<i>S.S. Platonov</i>	Spectral synthesis on zero-dimensional locally compact Abelian groups	450

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”.

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Prof., Dr. E.S. Zhukovskiy (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Assoc. Prof., Cand. E.A. Panasenko (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), I.V. Ilyina (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. A.V. Arutyunov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. L.M. Berezanskiy (Beer-Sheva, Israel), Prof., Dr. G. van Dijk (Leiden, Netherlands), Prof., Dr. V.F. Molchanov (Tambov, Russian Federation), Prof., Dr. B.A. Pasyukov (Moscow, Russian Federation), Prof., Dr. M. Pevzner (Reims, French Republic), Prof., Dr. F.L. Pereira (Porto, Portuguese Republic), Prof., Dr. A.V. Ponomarev (Ås, Kingdom of Norway), Prof., Dr. A.G. Chentsov (Ekaterinburg, Russian Federation), Prof., Dr. G. Helminck (Amsterdam, Netherlands)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: (4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: vestnik1@tsu.tmb.ru; ilina@tsutmb.ru

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics.html>;

<http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en.html>

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor). The mass media registration certificate is ПИ no. ФС77-76133 of July 3, 2019

Subscription index in the catalogue of the Stock company Agency “Rospechat” is 83372

Editors: Y.A. Biryukova, M.I. Filatova

English texts editors: V.V. Klochikhin, S.Y. Mozharov

Technical editor M.V. Borzova

For citation:

Russian Universities Reports. Mathematics. – 2019. – Vol. 24, no. 128. – 116 p. – ISSN 2686-9667. – DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128

Podpisano v pechat' 12.12.2019. Data vykhoda v svet 10.01.2020

Format A4 (60×84 1/8). Garnitura «Times New Roman». Pechat' na rizografe.

Pech. list 14,5. Usl. pech. list 13,5. Tirazh 1000 ekz. Zakaz № 19475. Tsena svobodnaya

Publisher's address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region,
FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy”
of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.

190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru

© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2019

© The journal “Russian Universities Reports. Mathematics”, 2019

The reference is obligatory while reprinting and citation of materials.

The author is responsible for the contents of publications

© Berceanu S., Gheorghe A., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-345-353

УДК 512.54, 512.817

The Jacobi group and its holomorphic discrete series representations on Siegel–Jacobi domains

Stefan BERCEANU, Alexandru GHEORGHE

Horia Hulubei National Institute for R&D in Physics and Nuclear Engineering
RO-077125, Bucharest-Magurele P.O.Box MG-6, Romania

Группа Якоби и ее представления голоморфной дискретной серии на областях Зигеля–Якоби

Стефан БЕРЧАНУ, Александру ГЕОРГЕ

Национальный институт исследований и разработок
в области физики и ядерной инженерии им. Хории Хулубея
Р.О.Бох МГ-6, Румыния, Бухарест-Магуреле, RO-077125

Abstract. This is the summary of a part of the talk delivered at the workshop held at the Tambov University in September 2012, reporting several results on Jacobi groups and its holomorphic representations published by the authors.

Keywords: Jacobi group; Siegel–Jacobi domain; canonical automorphy factor; canonical kernel function; scalar holomorphic discrete series

Acknowledgements: The work is partially supported by the ANCS project programs PN 09 37 01 02/2009 and by the UEFISCDI-Romania PN-II (contract no. 55/05.10.2011).

For citation: Berceanu S., Gheorghe A. The Jacobi group and its holomorphic discrete series representations on Siegel–Jacobi domains. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 345–353.

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-345-353.

Аннотация. Эта статья — краткое изложение части лекции, прочитанной на конференции в Тамбовском университете в октябре 2012, излагающее некоторые результаты о группах Якоби и их голоморфных представлениях, полученные авторами.

Ключевые слова: группа Якоби; область Зигеля–Якоби; канонический фактор автоморфности, каноническое ядро (функция); скалярная голоморфная дискретная серия

Благодарности: Работа выполнена при поддержке проекта ANCS программы PN 09 37 01 02/2009 и UEFISCDI-Romania PN-II (контракт № 55/05.10.2011).

Для цитирования: Берчану С., Георге А. Группа Якоби и ее представления голоморфной дискретной серии на областях Зигеля–Якоби // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 345–353. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-345-353. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The Jacobi group is the semidirect product of the real symplectic group with Heisenberg group of adequate dimension [9, 10]. Several generalizations are known [12, 20]. The Jacobi groups are unimodular, nonreductive, algebraic groups of Harish-Chandra type. The Siegel-Jacobi domains are nonreductive symmetric domains associated to the Jacobi groups by the generalized Harish-Chandra embedding [12, 16, 21, 22].

In [1] we have introduced Perelomov coherent states [13] defined on the Siegel-Jacobi disk. Similar constructions have been used previously [11, 14, 17]. The Jacobi group with applications in Quantum Mechanics has been investigated in a series of papers [2–7]. The present note is based mainly on [5], where we have not used Perelomov coherent states. The problem of Berezin quantization [8], the fundamental conjecture for homogeneous Kähler manifolds, the classical and quantum evolution on Siegel-Jacobi domains, and the orthonormal base of polynomials in which the Bergman kernel is developed, all summarized in our the talk in accord with [2–7], are not included in this note.

1. Canonical automorphy factor and kernel function

Let $\mathfrak{H}_n$ be the Siegel upper half space of degree n consisting of all symmetric matrices $\Omega \in M_n(\mathbb{C})$ with $\text{Im } \Omega > 0$. The symplectic group $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ of degree n consists of all matrices $\sigma \in M_{2n}(\mathbb{R})$ such that ${}^t\sigma J_n \sigma = J_n$, where

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in M_n(\mathbb{R}); \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

The group $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ acts transitively on $\mathfrak{H}_n$ by $\sigma\Omega = (a\Omega + b)(c\Omega + d)^{-1}$.

Let G^s be a Zariski connected semisimple real algebraic group of Hermitian type. Let $\mathfrak{D} = G^s/K^s$ be the associated Hermitian symmetric domain, where K^s is a maximal compact subgroup of G^s . Suppose there exist a homomorphism $\rho : G^s \rightarrow \text{Sp}(n, \mathbb{R})$ and a holomorphic map $\tau : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{H}_n$ such that $\tau(gz) = \rho(g)\tau(z)$ for all $g \in G^s$ and $z \in \mathfrak{D}$. The *Jacobi group* G^J [9, 12, 20] is the semidirect product of G^s and the Heisenberg group $H[V]$ associated with the symplectic $\mathbb{R}$ -space V and the nondegenerate alternating bilinear form $D : V \times V \rightarrow \mathcal{A}$, where $\mathcal{A}$ is the center of $H[V]$. The multiplication operation of $G^J \approx G^s \times V \times \mathcal{A}$ is defined by

$$gg' = (\sigma\sigma', \rho(\sigma)v' + v, \varkappa + \varkappa' + \frac{1}{2}D(v, \rho(\sigma)v')),$$

where $g = (\sigma, v, \varkappa) \in G^J$, $g' = (\sigma', v', \varkappa') \in G^J$. The *Jacobi-Siegel domain* associated to the Jacobi group G^J is defined by $\mathfrak{D}^J = \mathfrak{D} \times \mathbb{C}^N \cong G^J/(K^s \times \mathcal{A})$, where $\dim V = 2N$ (cf. [9, 12, 20]). The definitions above are represented in the scheme below.

G^J is an algebraic group of Harish-Chandra type [12, 16, 20].

Following [20] and [12], we obtain [5].

$$\begin{array}{ccccc}
G^J \approx G^s \times V \times \mathcal{A} & & & & \\
\swarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr} & & \searrow \text{pr}_2 \\
H[V] & & & & G^s \xrightarrow{\rho} \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \\
\downarrow & & & & \downarrow \text{pr} \\
\mathbb{C}^N & \hookrightarrow & \mathfrak{D}^J = \mathfrak{D} \times \mathbb{C}^N & \leftarrow & \mathfrak{D} = G^s/K^s \xrightarrow{\tau} \mathfrak{H}_n = \text{Sp}(n, \mathbb{R})/\text{U}(n)
\end{array}$$

Theorem 1.1. a) The Jacobi group G^J acts transitively on $\mathfrak{D}^J$ by

$$gx = (\sigma w, v_{\sigma w} + {}^t(c\tau(w) + d)^{-1}z), \quad \rho(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

where $g = (\sigma, v, \varkappa) \in G^J$ and $x = (w, z) \in \mathfrak{D}^J$.

b) The canonical automorphy factor J for the Jacobi group G^J is given by

$$J(g, x) = (J_1(\sigma, w), 0, J_2(g, x)),$$

where J_1 is the canonical automorphy factor for G^s , and

$$J_2(g, x) = \varkappa + \frac{1}{2}D(v, v_{\sigma w}) + \frac{1}{2}D(2v + \rho(\sigma)z, J_1(\sigma, w)z).$$

c) The canonical kernel function K for the Jacobi group G^J is given by

$$K(x, x') = (K_1(w, w'), 0, K_2(x, x')),$$

where K_1 is the canonical kernel function for G^s , and

$$K_2(x, x') = D(2\bar{z}' + \frac{1}{2}\overline{\tau(w')}z, qz) + \frac{1}{2}D(\bar{z}', q\tau(w)\bar{z}'), \quad q = \rho(K_1(w, w'))^{-1}.$$

The Heisenberg group $H_n(\mathbb{R})$ consists of all elements (λ, μ, κ) , where $\lambda, \mu \in M_{1n}(\mathbb{R})$, $\kappa \in \mathbb{R}$, with the multiplication law

$$(\lambda, \mu, \kappa) \circ (\lambda', \mu', \kappa') = (\lambda + \lambda', \mu + \mu', \kappa + \kappa' + \lambda {}^t\mu' - \mu {}^t\lambda').$$

Let $G_n^J = \text{Sp}(n, \mathbb{R}) \ltimes H_n(\mathbb{R})$ endowed with the following multiplication law:

$$(\sigma, (\lambda, \mu, \kappa)) \cdot (\sigma', (\lambda', \mu', \kappa')) = (\sigma\sigma', (\lambda\sigma', \mu\sigma', \kappa) \circ (\lambda', \mu', \kappa')).$$

The Jacobi group G_n^J of degree n acts transitively on the Jacobi-Siegel space $\mathfrak{H}_n^J = \mathfrak{H}_n \times \mathbb{C}^n$ by $g(\Omega, \zeta) = (\Omega_g, \zeta_g)$, where

$$\Omega_g = (a\Omega + b)(c\Omega + d)^{-1}, \quad \zeta_g = \nu(c\Omega + d)^{-1}, \quad \nu = \zeta + \lambda\Omega + \mu. \quad (1.2)$$

Proposition 1.1. *The canonical automorphy factor J_1 and the canonical kernel function K_1 for $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ are given by*

$$J_1(\sigma, \Omega) = \begin{pmatrix} {}^t(c\Omega + d)^{-1} & 0 \\ 0 & c\Omega + d \end{pmatrix},$$

$$K_1(\Omega', \Omega) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\Omega} - \Omega' \\ (\Omega' - \overline{\Omega})^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

where $\Omega, \Omega' \in \mathfrak{H}_n$ and $\sigma \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ is given by (1.1).

The canonical automorphy factor $\theta = J_2(g, (\Omega, \zeta))$ for G_n^J is given by

$$\theta = \kappa + \lambda {}^t\zeta + \nu {}^t\lambda - \nu(c\Omega + d)^{-1}c {}^t\nu, \quad \nu = \zeta + \lambda\Omega + \mu, \quad (1.3)$$

where $g = (\sigma, (\lambda, \mu, \kappa)) \in G_n^J$, σ is given by (1.1), and $(\Omega, \zeta) \in \mathfrak{H}_n^J$.

The canonical automorphy kernel K_2 for G_n^J is given by

$$K_2((\zeta', \Omega'), (\zeta, \Omega)) = -\frac{1}{2}(\zeta' - \bar{\zeta})(\Omega' - \bar{\Omega}')^{-1}({}^t\zeta' - {}^t\bar{\zeta}). \quad (1.4)$$

Let $\mathfrak{D}_n$ be the Siegel disk of degree n consisting of all symmetric matrices $W \in M_n(\mathbb{C})$ with $I_n - W\bar{W} > 0$. Let $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})_*$ be the multiplicative group of all matrices $\omega \in M_{2n}(\mathbb{C})$ such that

$$\omega = \begin{pmatrix} p & q \\ \bar{q} & \bar{p} \end{pmatrix}, \quad {}^tp\bar{p} - {}^t\bar{q}q = I_n, \quad {}^tp\bar{q} = {}^t\bar{q}p, \quad p, q \in M_n(\mathbb{C}). \quad (1.5)$$

The group $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})_*$ acts transitively on $\mathfrak{D}_n$ by $\omega W = (pW + q)(\bar{q}W + \bar{p})^{-1}$. Let $K_{n*} \cong \mathrm{U}(n)$ be the maximal compact subgroup of $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})_*$ consisting of all $\omega \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})_*$ given by (1.5) with $p \in \mathrm{U}(n)$ and $q = 0$. Then $\mathfrak{D}_n \cong \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})_*/\mathrm{U}(n)$.

Let G_{n*}^J be the Jacobi group consisting of all elements $(\omega, (\alpha, \varkappa))$, where $\omega \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})_*$, $\alpha \in \mathbb{C}^n$, $\varkappa \in i\mathbb{R}$, and endowed with the multiplication law

$$(\omega', (\alpha', \varkappa'))(\omega, (\alpha, \varkappa)) = (\omega'\omega, \beta + \alpha, \varkappa + \varkappa' + \beta^t\bar{\alpha} - \bar{\beta}^t\alpha),$$

where $(\omega, (\alpha, \varkappa)), (\omega', (\alpha', \varkappa')) \in G_{n*}^J$, $\beta = \alpha'p + \bar{\alpha}'\bar{q}$, and ω is given by (1.5).

The Heisenberg group $H_n(\mathbb{R})_*$ consists of all elements $(I_n, (\alpha, \varkappa)) \in G_{n*}^J$, with $\alpha \in \mathbb{C}^n$, $\varkappa \in i\mathbb{R}$. The center $\mathcal{A}_* \cong \mathbb{R}$ of $H_n(\mathbb{R})_*$ consists of all elements $(I_n, (0, \varkappa)) \in G_{n*}^J$, $\varkappa \in i\mathbb{R}$. There exists an isomorphism $\Theta : G_n^J \rightarrow G_{n*}^J$ given by $\Theta(g) = g_*$, $g = (\sigma, (\lambda, \mu, \kappa)) \in G_n^J$, $g_* = (\omega, (\alpha, \varkappa)) \in G_{n*}^J$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} p_+ & p_- \\ \bar{p}_- & \bar{p}_+ \end{pmatrix},$$

$$p_{\pm} = \frac{1}{2}(a \pm d) \pm \frac{i}{2}(b \mp c), \quad \alpha = \frac{1}{2}(\lambda + i\mu), \quad \varkappa = -i\frac{\kappa}{2}.$$

Let $\mathfrak{D}_n^J = \mathfrak{D}_n \times \mathbb{C}^n \cong G_{n*}^J/(\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R})$ be the Siegel-Jacobi disk of degree n . G_{n*}^J acts transitively on $\mathfrak{D}_n^J$ by $g_*(W, z) = (W_{g_*}, z_{g_*})$, where

$$W_{g_*} = (pW + q)(\bar{q}W + \bar{p})^{-1}, \quad z_{g_*} = (z + \alpha W + \bar{\alpha})(\bar{q}W + \bar{p})^{-1}. \quad (1.6)$$

We now consider a partial Cayley transform of the Siegel-Jacobi disk $\mathfrak{D}_n^J$ onto the Siegel-Jacobi space $\mathfrak{H}_n^J$ which gives a partially bounded realization of $\mathfrak{H}_n^J$ [22]. The *partial Cayley transform* $\phi : \mathfrak{D}_n^J \rightarrow \mathfrak{H}_n^J$ is defined by

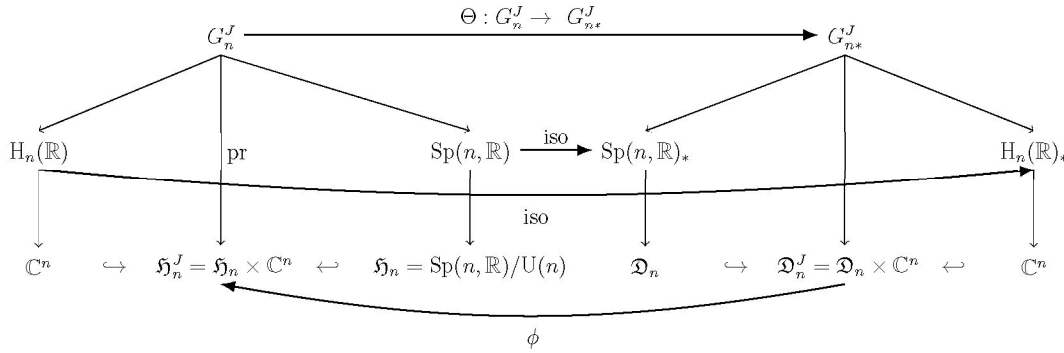
$$\Omega = i(I_n + W)(I_n - W)^{-1}, \quad \zeta = 2iz(I_n - W)^{-1}, \quad (1.7)$$

where $(\zeta, \Omega) = \phi((W, z))$ and $(W, z) \in \mathfrak{D}_n^J$. The map ϕ is a biholomorphic map which satisfies $g\phi = \phi g_*$ for any $g \in G_n^J$ and $g_* = \Theta(g)$ [22].

The inverse partial Cayley transform $\phi^{-1} : \mathfrak{H}_n^J \rightarrow \mathfrak{D}_n^J$ is given by

$$W = (\Omega - iI_n)(\Omega + iI_n)^{-1}, \quad z = \zeta(\Omega + iI_n)^{-1}. \quad (1.8)$$

The situation is summarized in the diagram below.



Proposition 1.2. *The canonical automorphy factor J_{1*} and the canonical kernel function K_{1*} for $\text{Sp}(n, \mathbb{R})_*$ are given by*

$$J_{1*}(\omega, W) = \begin{pmatrix} {}^t(\bar{q}W + \bar{p})^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{q}W + \bar{p} \end{pmatrix},$$

$$K_{1*}(W', W) = \begin{pmatrix} I_n - W'\bar{W} & 0 \\ 0 & {}^t(I_n - W'\bar{W})^{-1} \end{pmatrix},$$

where $W, W' \in \mathfrak{D}_n$ and $\omega \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})_*$ is given by (1.5).

The canonical automorphy factor $\theta_* = J_2(g_{n*}, (W, z))$ for G_{n*}^J is given by

$$\theta_* = \kappa_* + z {}^t\alpha + \nu_* {}^t\alpha - \nu_* (\bar{q}W + \bar{p})^{-1} \bar{q} {}^t\nu_*, \quad \nu_* = z + \alpha W + \bar{\alpha}, \quad (1.9)$$

where $g_* = (\omega, (\alpha, \varkappa)) \in G_{n*}^J$, ω is given by (1.5), and $(W, z) \in \mathfrak{D}_n^J$.

The canonical automorphy kernel for G_{n*}^J is given by

$$K_{2*}((W', z'), (W, z)) = A(W', z'; W, z),$$

where $(W, z), (W', z') \in \mathfrak{D}_n^J$, and

$$A(W', z'; W, z) = (\bar{z} + \frac{1}{2}z'\bar{W})(I_n - W'\bar{W})^{-1} {}^t z' + \frac{1}{2}\bar{z}(I_n - W'\bar{W})^{-1} W' {}^t \bar{z}. \quad (1.10)$$

2. Scalar holomorphic discrete series

Consider the Jacobi group G_n^J . Let δ be a rational representation of $GL(n, \mathbb{C})$ such that $\delta|_{U(n)}$ is a scalar irreducible representation of the unitary group $U(n)$ with highest weight k , $k \in \mathbb{Z}$, and $\delta(A) = (\det A)^k$ [23]. Let $m \in \mathbb{R}$. Let $\chi = \delta \otimes \bar{\chi}^m$, where the central character χ^m of $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}$ is defined by $\chi^m(\kappa) = \exp(2\pi i m \kappa)$, $\kappa \in \mathcal{A}$. Any scalar holomorphic irreducible representation of G_n^J is characterized by an index m and a weight k . Suppose $m > 0$ and $k > n + 1/2$.

Let $\mathcal{H}^{mk}$ denote the Hilbert space of all holomorphic functions $\varphi \in \mathcal{O}(\mathfrak{H}_n^J)$ such that $\|\varphi\|_{\mathfrak{H}_n^J} < \infty$ with the inner product defined by [18]

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{H}_n^J} = C \int_{\mathfrak{H}_n^J} \varphi(\Omega, \zeta) \overline{\psi(\Omega, \zeta)} \mathcal{K}^{mk}(\Omega, \zeta)^{-1} d\mu(\Omega, \zeta),$$

where C is a positive constant, $(\Omega, \zeta) \in \mathfrak{H}_n^J$ and the G_n^J -invariant measure on $\mathfrak{H}_n^J$ is given by

$$d\mu(\Omega, \zeta) = (\det Y)^{-n-2} \prod_{1 \leq i \leq n} d\xi_i d\eta_i \prod_{1 \leq j \leq k \leq n} dX_{jk} dY_{jk}.$$

Here $\xi = \operatorname{Re} \zeta$, $\eta = \operatorname{Im} \zeta$, $X = \operatorname{Re} \Omega$, $Y = \operatorname{Im} \Omega$.

The kernel function $\mathcal{K}^{mk}$ is defined by [18]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{mk}(\Omega, \zeta) &= \mathcal{K}^{mk}((\Omega, \zeta), (\Omega, \zeta)) = \exp(4\pi m \eta Y^{-1} \operatorname{tr} \eta) (\det Y)^k, \\ \mathcal{K}^{mk}((\zeta', \Omega'), (\zeta, \Omega)) &= \left(\det \left(\frac{i}{2} \bar{\Omega} - \frac{i}{2} \Omega' \right) \right)^{-k} \exp(2\pi i m K((\zeta', \Omega'), (\zeta, \Omega))), \end{aligned}$$

where K is given by (1.4).

Let π^{mk} be the unitary representation of G_n^J on $\mathcal{H}^{mk}$ defined by [18]

$$(\pi^{mk}(g^{-1})\varphi)(\Omega, \zeta) = \mathcal{J}^{mk}(g, (\Omega, \zeta))\varphi(\Omega_g, \zeta_g),$$

where $\varphi \in \mathcal{H}^{mk}$, $g \in G_n^J$, $(\Omega, \zeta) \in \mathfrak{H}_n^J$ and $(\Omega_g, \zeta_g) \in \mathfrak{H}_n^J$ is given by (1.2).

The automorphic factor $\mathcal{J}^{mk}$ for G_n^J is defined by [18]

$$\mathcal{J}^{mk}(g, (\zeta, \Omega)) = (\det(c\Omega + d))^{-k} \exp(2\pi i m \theta),$$

where θ is given by (1.3) and σ is given by (1.1).

Takase proved the following theorem [18, 19]:

Theorem 2.1. *Suppose $k > n + 1/2$. Then $\mathcal{H}^{mk} \neq \{0\}$ and π^{mk} is an irreducible unitary representation of G_n^J which is square integrable modulo center.*

Let $\mathcal{H}_*^{mk}$ denote the complex pre-Hilbert space of all $\psi \in \mathcal{O}(\mathfrak{D}_n^J)$ such that $\|\psi\|_{\mathfrak{D}_n^J} < \infty$ with the inner product defined by

$$(\psi_1, \psi_2)_{\mathfrak{D}_n^J} = C_* \int_{\mathfrak{D}_n^J} \psi_1(W, z) \overline{\psi_2(W, z)} (\mathcal{K}_*^{mk}(W, z))^{-1} d\nu(W, z),$$

where C_* is a positive constant, $(z, W) \in \mathfrak{D}_n^J$,

$$\mathcal{K}_*^{mk}(W, z) = (\det(I_n - W\overline{W}))^{-k} \exp(8\pi m A(W, z)),$$

and $A(W, z) = K_{2*}((W, z), (W, z))$ can be written as

$$A(W, z) = (\overline{z} + \frac{1}{2}z\overline{W})(I_n - W\overline{W})^{-1}z + \frac{1}{2}\overline{z}(I_n - W\overline{W})^{-1}W^t\overline{z}.$$

and the G_n^J -invariant measure on $\mathfrak{D}_n^J$ is [22]

$$d\nu(W, z) = (\det(1 - W\overline{W}))^{-n-2} \prod_{i=1}^n d\operatorname{Re} z_i d\operatorname{Im} z_i \prod_{1 \leq j \leq k \leq n} d\operatorname{Re} W_{jk} d\operatorname{Im} W_{jk}.$$

According with [15, 22], and (1.10), the kernel function $\mathcal{K}_*^{mk}$ is given by

$$\mathcal{K}_*^{mk}(W, z) = \mathcal{K}_*^{mk}((W, z), (W, z)),$$

where

$$\mathcal{K}_*^{mk}((z, W), (z', W')) = (\det(I_n - W'\overline{W}))^{-k} \exp(8\pi m A(W', z'; W, z)).$$

We now introduce the map $g_* \mapsto \pi_*^{mk}(g_*)$, where $\pi_*^{mk}(g_*): \mathcal{H}_*^{mk} \rightarrow \mathcal{H}_*^{mk}$ is defined by

$$(\pi_*^{mk}(g_*^{-1})\psi)(z, W) = J_*^{mk}(g_*, (z, W))\psi(z_{g_*}, W_{g_*}),$$

$\psi \in \mathcal{H}_*^{mk}$, $g_* = (\omega, (\alpha, \varkappa)) \in G_{n*}^J$, $(z, W) \in \mathfrak{D}_n^J$, and $(z_{g_*}, W_{g_*}) \in \mathfrak{D}_n^J$ is given by (1.6). The automorphic factor J_*^{mk} for G_{n*}^J is defined by [15, 22]

$$J_*^{mk}(g_*, (z, W)) = \exp(2\pi i m \theta_*) (\det(\overline{q}W + \overline{p}))^{-k},$$

where θ_* is given by (1.9) and ω given by (1.5).

Proposition 2.1. *Suppose $m > 0$, $k > n + 1/2$, and $C = 2^{n(n+3)}C_*$. Then*

a) $\mathcal{H}_*^{mk} \neq \{0\}$ and π_*^{mk} is an irreducible unitary representation of G_{n*}^J on the Hilbert space $\mathcal{H}_*^{mk}$ which is square integrable modulo center.

b) There exists the unitary isomorphism $T_*^{mk}: \mathcal{H}_*^{mk} \rightarrow \mathcal{H}^{mk}$ given by

$$\varphi(\Omega, \zeta) = \psi(W, z) (\det(I_n - W))^k \exp(4\pi m z(I_n - W)^{-1}t z),$$

where $\psi \in \mathcal{H}_*^{mk}$, $\varphi = T_*^{mk}(\psi)$, $(W, z) \in \mathfrak{D}_n^J$, $(\Omega, \zeta) = \phi((-W, z)) \in \mathfrak{H}_n^J$, and ϕ is given by (1.7).

The inverse isomorphism $T^{mk}: \mathcal{H}^{mk} \rightarrow \mathcal{H}_*^{mk}$ is given by

$$\psi(W, z) = \varphi(\Omega, \zeta) (\det(I_n - i\Omega))^k \exp(2\pi m \zeta(I_n - i\Omega)^{-1}t \zeta),$$

where $\psi \in \mathcal{H}_*^{mk}$, $\varphi = T^{mk}(\varphi)$, $(\Omega, \zeta) \in \mathfrak{H}_n^J$, $(-W, z) = \phi^{-1}((\Omega, \zeta)) \in \mathfrak{D}_n^J$, and ϕ^{-1} is given by (1.8).

c) The representations π_*^{mk} and π_*^{mk} are unitarily equivalent.

Acknowledgements. Stefan Berceanu express his thanks to Professor V. Molchanov for inviting him at the Workshop «Harmonic analysis on homogeneous spaces and quantization» October, 2012, Tambov, Russia, and for the partial financial support to attend the meeting.

References

- [1] S. Berceanu, “A holomorphic representation of the Jacobi algebra”, *Reviews in Mathematical Physics*, **18**:2 (2006), 163–199, arXiv: [math/0408219v3](https://arxiv.org/abs/math/0408219v3).
- [2] S. Berceanu, “Coherent states associated to the Jacobi group – a variation on a theme by Erich Kähler”, *Journal of Geometry and Symmetry in Physics*, **9** (2007), 1–8 [crossref](#).
- [3] S. Berceanu, “A holomorphic representation of Jacobi algebra in several dimensions”, *The Theta Foundation*, Perspectives in Operator Algebras and Mathematical Physics (Bucharest, August 10–17, 2005), Theta Series in Advanced Mathematics, **11**, eds. F.P. Boca, R. Purice, S. Strătilă, Conference Proceedings, 2008, 1–25.
- [4] S. Berceanu, A. Gheorghe, “Applications of the Jacobi group to Quantum Mechanics”, *Romanian Journal of Physics*, **53**:9–10 (2008), 1013–1021.
- [5] S. Berceanu and A. Gheorghe, “On the geometry of Siegel-Jacobi domains”, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **8** (2011), 1783–1798.
- [6] S. Berceanu, “A convenient coordinatization of Siegel-Jacobi domains”, *Reviews in Mathematical Physics*, **24**:10 (2012), 1–38 [crossref](#).
- [7] S. Berceanu, “Consequences of the fundamental conjecture for the motion on the Siegel-Jacobi disk”, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, **10**:01 (2013), 1–18 [crossref](#).
- [8] F. A. Berezin, “Quantization in complex symmetric spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:2 (1975), 341–379 [crossref](#).
- [9] R. Berndt and R. Schmidt, *Progress in Mathematics: Elements of the Representation Theory of the Jacobi Group*, **163**, Birkhäuser, Basel, 1998, 216 pp.
- [10] M. Eichler and D. Zagier, *Progress in Mathematics: The Theory of Jacobi Forms*, **55**, Birkhäuser, Boston, 1985.
- [11] P. Kramer and M. Saraceno, “Semicoherent states and the group $\mathrm{ISp}(2, \mathbb{R})$ ”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **114**:1–3 (1982), 448–453 [crossref](#).
- [12] M. H. Lee, “Theta functions on hermitian symmetric domains and Fock representations”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **74**:2 (2003), 201–234 [crossref](#).
- [13] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer, Berlin, 1986.
- [14] C. Quesne, “Vector coherent state theory of the semidirect sum Lie algebras $\mathrm{wsp}(2N, \mathbb{R})$ ”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **23**:6 (1990), 847–862.
- [15] I. Satake, “Unitary representations of a semi-direct products of Lie groups on $\bar{\partial}$ -cohomology spaces”, *Mathematische Annalen*, **190**:3 (1971), 177–202.
- [16] I. Satake, *Algebraic Structures of Symmetric Domains*, Princeton University Press, Princeton, 1980.
- [17] K. Shuman, “Complete signal processing bases and the Jacobi group”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **278**:1 (2003), 203–213 [crossref](#).
- [18] K. Takase, “A note on automorphic forms”, *J. Reine Angew. Math.*, **409** (1990), 138–171.
- [19] K. Takase, “On unitary representations of Jacobi groups”, *J. Reine Angew. Math.*, **430** (1992), 130–149.
- [20] K. Takase, “On Siegel modular forms of half-integral weights and Jacobi forms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **351**:2 (1999), 735–780.
- [21] J.-H. Yang, “The method of orbits for real Lie groups”, *Kyungpook Mathematical Journal*, **42**:2 (2002), 199–272.
- [22] J.-H. Yang, “A partial Cayley transform for Siegel-Jacobi disk”, *Journal of the Korean Mathematical Society*, **45** (2008), 781–794.
- [23] C. Ziegler, “Jacobi forms of higher degree”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, **59**:1 (1989), 191–224.

Information about the authors

Stefan Berceanu, Professor. Horia Hulubei National Institute for R&D in Physics and Nuclear Engineering, Bucharest-Magurele, Romania. E-mail: Berceanu@theory.nipne.ro

Alexandru Gheorghe, Professor. Horia Hulubei National Institute for R&D in Physics and Nuclear Engineering, Bucharest-Magurele, Romania.

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Stefan Berceanu

E-mail: Berceanu@theory.nipne.ro

Received 26 August 2019

Reviewed 23 October 2019

Accepted for press 29 November 2019

Информация об авторах

Берчану Стефан, профессор. Национальный институт исследований и разработок в области физики и ядерной инженерии им. Хории Хулубея, г. Бухарест-Магуреле, Румыния. E-mail: Berceanu@theory.nipne.ro

Георге Александру, профессор. Национальный институт исследований и разработок в области физики и ядерной инженерии им. Хории Хулубея, г. Бухарест-Магуреле, Румыния.

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Берчану Стефан

E-mail: Berceanu@theory.nipne.ro

Поступила в редакцию 26 августа 2019 г.

Поступила после рецензирования 23 октября 2019 г.

Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

© Guebbai H., Segni S., Ghat M., Merchela W., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-354-367

УДК 517.984.5

The pseudospectrum of the convection-diffusion operator with a variable reaction term

Hamza GUEBBAI¹, Sami SEGNI¹, Mourad GHIAT¹, Wassim MERCHELA²¹ Université 8 Mai 1945

B.P. 401, Guelma, Algérie

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Псевдоспектр оператора конвекции-диффузии с переменным членом реакции

Хамза ГЕББАЙ¹, Сами СЕГНИ¹, Морад ГИАТ¹, Вассим МЕРЧЕЛА²¹ Университет 8 мая 1945,

24000, Алжир, Гельма, В.Р. 401

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Abstract. In this paper, we study the spectrum of non-self-adjoint convection-diffusion operator with a variable reaction term defined on an unbounded open set Ω of $\mathbb{R}^n$. Our idea is to build a family of operators that have the same convection-diffusion-reaction formula, but which will be defined on bounded open sets $\{\Omega_\eta\}_{\eta \in [0,1]}$ of $\mathbb{R}^n$. Based on the relationships that link this family to Ω , we obtain relations between the spectrum and the pseudospectrum. We use the notion of the pseudospectrum to build relationships between convection-diffusion operator and its restrictions to bounded domains. Using these relationships we are able to find the spectrum of our operator in $\mathbb{R}^+$. Also, the techniques developed to obtain the spectrum allow us to study the properties of the spectrum of this operator when we go to the limit as the reaction term tends to zero. Indeed, we show a spectral localization result for the same convection-diffusion-reaction operator when a perturbation is carried on the reaction term and no longer on the definition domain.

Keywords: differential operator; spectrum; pseudospectrum; convection-diffusion operator

For citation: Guebbai H., Segni S., Ghat M., Merchela W. Pseudospectrum of the convection-diffusion operator with a variable reaction term [The pseudospectrum of the convection-diffusion operator with a variable reaction term]. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 354–367. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-354-367.

Аннотация. В статье исследуется спектр несамосопряженного оператора конвекции-диффузии с переменным членом реакции, определенным на неограниченном открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Идея исследования состоит в том, чтобы построить семейство операторов, имеющих такую же формулу конвекции-диффузии-реакции, но определенных

на ограниченных открытых множествах $\{\Omega_\eta\}_{\eta \in]0,1[} \subset \mathbb{R}^n$. Основываясь на соотношениях, которые связывают это семейство с Ω , получены соотношения между спектром и псевдоспектром. Для построения соотношений между оператором конвекции-диффузии и его сужениями на ограниченные области используется понятие псевдоспектра. Полученные соотношения используются для определения спектра исходного оператора в $\mathbb{R}^+$. Методы, разработанные для нахождения спектра заданного оператора, позволяют также изучить некоторые свойства этого спектра при переходе к пределу, когда член реакции стремится к нулю. В частности, показано, как определить спектр заданного оператора конвекции-диффузии-реакции при возмущении члена реакции, а не области определения.

Ключевые слова: дифференциальный оператор; спектр; псевдоспектр; оператор конвекции-диффузии

Для цитирования: Геббай Х., Сегни С., Гуат М., Мерчела В. Псевдоспектр оператора конвекции-диффузии с переменным членом реакции // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 354–367. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-354-367. (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The study of the spectrum of convection-diffusion operator is one of the most complicated problems in functional analysis. In this paper, we study the spectrum of the following operator:

$$Au = -\Delta u + \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \cdot \nabla u + Vu, \quad (0.1)$$

where $h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ such that h'' is positive and

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1(x) = \sum_{i=1}^n \left(h' \left(\prod_{j=1}^n x_j \right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_i \right)^2.$$

Non-negative potential V_2 is considered as a reaction to the convection-diffusion phenomena represented by $A_0 = -\Delta + \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \cdot \nabla + V_1$. The operator A in the case $h(x) = x$ was studied in [1].

We recall that, for an unbounded operator T defined on $D(T) \subset H$ to H and for $\varepsilon > 0$, the pseudospectrum is given by (see [2])

$$sp_\varepsilon(T) = \{z \in re(T) : \|(zI - T)^{-1}\| > \varepsilon^{-1}\} \cup sp(T).$$

The resolvent set is given by

$$re(T) = \{z \in \mathbb{C} : (zI - T)^{-1} \text{ exists and bounded}\};$$

$sp(T)$ denotes the spectrum of T and is defined as $sp(T) = \mathbb{C} \setminus re(T)$. An equivalent definition of the pseudospectrum has been given in [3]:

$$sp_\varepsilon(T) = \bigcup_{D: H \rightarrow H, \text{ linear and } \|D\| < \varepsilon} sp(T + D).$$

Pseudospectrum is easier to calculate and more efficient than spectrum when dealing with unbounded operators [4, 5]. In fact, it has been established that an approximation of the spectrum of differential operators may be unstable when going to the limit, unlike the pseudospectrum which shows to be stable (see [6–8]). For example, if T is a normal operator, its pseudospectrum is equal to the ε -neighborhood of its spectrum. The ε -neighborhood of $S \subset \mathbb{C}$ is given by

$$N_\varepsilon(S) = \{s + z : s \in S, |z| < \varepsilon\}.$$

It is clear that, for all $S \subset \mathbb{C}$, $\bigcap_{\varepsilon > 0} N_\varepsilon(S) = S$.

Moreover we take advantage of the fact that the spectrum of an operator is divided into two sets: the pointwise spectrum, $sp_p(T)$, which consists of all the eigenvalues of T ; the essential spectrum, $sp_{\text{ess}}(T)$ which consists of all $\lambda \in \mathbb{C}$ such that the operator $(\lambda I - T)$ is injective, but not surjective. In addition, we define the limit of a sequence of sets as follows: for all $\theta > 0$, $S_\theta \subset \mathbb{C}$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} S_\theta = \{s \in \mathbb{C} : \exists \{s_\theta\}_{\theta > 0}, s_\theta \in S_\theta, \lim_{\theta \rightarrow 0} s_\theta = s\}$.

In this article, we study in detail the pseudospectrum and the spectrum of the operator A to establish that its spectrum is real positive. We conclude this work with a result on the stability of the spectrum obtained by the pseudospectral theory.

1. Convection-diffusion operator

Let $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$ be an unbounded open set. Let $h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ be such that h'' is positive. Let A be the convection-diffusion operator (see [9]) defined on $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ into itself by (0.1).

We define the hermitian form φ on $L^2(\Omega, \mathbb{C})$ as

$$\varphi(f, g) = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \overline{\nabla g} dx + \int_{\Omega} \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \cdot \nabla f \overline{g} dx + \int_{\Omega} V f \overline{g} dx,$$

where the quadratic form associated with φ is given by

$$Q(u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \cdot \nabla u \overline{u} dx + \int_{\Omega} V |u|^2 dx.$$

For $u \in C_c^\infty(\Omega)$, we set $z = \int_{\Omega} (-\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i)) \overline{u} \cdot \nabla u dx$, so

$$\begin{aligned} z &= \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) |u|^2 dx}_{=0} + \int_{\Omega} \left(\Delta h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) |u|^2 dx \\ &+ \int_{\Omega} \left(\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \cdot \overline{\nabla u} u dx = \int_{\Omega} \left(\Delta h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) |u|^2 dx - \overline{z}. \end{aligned}$$

Using $z + \overline{z} = 2\text{Re}(z) = \int_{\Omega} (\Delta h(\prod_{i=1}^n x_i)) |u|^2 dx$ yields

$$\text{Re}(Q(u)) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \Delta h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) + \|\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)\|_{L^2(\Omega)}^2 + V_2(x) \right) |u|^2 dx \geq 0,$$

and

$$\begin{aligned} |Im(Q(u))| &= \left| Im \left(\int_{\Omega} \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \bar{u} \cdot \nabla u dx \right) \right| = \left| \frac{z - Re(z)}{i} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \|\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)\|_{L^2(\Omega)}^2 |u|^2 dx \right) + \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} \left(\Delta h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) |u|^2 dx \right|. \end{aligned}$$

Hence, φ is a sectorial form defined on the vector space R given by the following expression:

$$R = H_0^1(\Omega, \mathbb{C}) \cap \{u \in L^2(\Omega, \mathbb{C}) : Vu \in L^2(\Omega, \mathbb{C})\}.$$

We recall that A is the operator associated with φ [10, Theorem 2.1, p. 322], and the domain of A is given by $D(A) = H^2(\Omega, \mathbb{C}) \cap R$.

Our goal is to determine the spectrum of A . We notice that $D(A)$ is a Dirichlet integral boundary condition. Consider the eigenvalue problem: *find $\lambda \in \mathbb{C}$ and $u \in D(A) \setminus \{0\}$ such that*

$$-\Delta u + \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \cdot \nabla u + Vu = \lambda u \text{ on } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

Let $\{\Omega_\eta\}_{\eta \in]0,1[}$ be a sequence of bounded open sets such that $\Omega_\eta \subset \Omega_\eta$, for all $\eta \leq \eta$, and $\bigcup_{\eta \in]0,1[} \Omega_\eta = \Omega$. For all $\eta \in]0,1[$, we identify the hermitian form φ_η on $L^2(\Omega_\eta, \mathbb{C})$ by

$$\varphi_\eta(f, g) = \int_{\Omega_\eta} \nabla f \cdot \overline{\nabla g} dx + \int_{\Omega_\eta} \left(-\nabla h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) \cdot \nabla f \overline{g} dx + \int_{\Omega_\eta} V f \overline{g} dx.$$

We recall that φ_η is a sectorial form defined on $R_\eta = H_0^1(\Omega_\eta, \mathbb{C})$. We denote by A_η the differential operator associated with φ_η [10, Theorem 2.1, p. 322]. The domain of A_η is given by $D(A_\eta) = H^2(\Omega_\eta, \mathbb{C}) \cap H_0^1(\Omega_\eta, \mathbb{C})$. We notice that A_η is defined by the same formula as A . Let B_η be the differential operator which is defined by the same formula as A , but is given on $D(B_\eta) = H_0^2(\Omega_\eta, \mathbb{C})$. The extension of each function in $D(B_{\eta'})$ to Ω_η by zero belongs to $D(B_\eta)$ [11, Lemma 3.22, p. 57]. Thus $D(B_{\eta'}) \subset D(B_\eta)$.

To achieve our goal we will define the spectrum of A_η , after that we will establish a relation between the pseudospectrum and spectrum of A_η , B_η and A .

2. Spectrum of A_η and B_η

In this section, we will explain some characteristics of the operator A_η which allow us to locate the spectrum of A .

2.1. Spectrum of A_η

Define the following scalar product on $L^2(\Omega_\eta)$:

$$\forall (u, v) \in L^2(\Omega_\eta) \times L^2(\Omega_\eta), \quad \langle u, v \rangle_\eta = \int_{\Omega_\eta} \exp \left(h \left(\prod_{i=1}^n x_i \right) \right) u \bar{v} dx.$$

Theorem 2.1. *For all $\eta \in]0,1[$, A_η is self-adjoint with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$.*

P r o o f. For all $u \in D(A_\eta)$, we define $\tilde{u} = \exp\left(\frac{1}{2}h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right)u$. Hence, we get

$$\Delta\tilde{u} = \left(\Delta u + \left(\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right) \cdot \nabla u\right) + \frac{1}{4}\|\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 u \exp\left(\frac{1}{2}h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right).$$

Then, for all $(u, v) \in D(A_\eta) \times D(A_\eta)$,

$$\begin{aligned} \langle A_\eta u, v \rangle_\eta &= \int_{\Omega_\eta} \exp\left(h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right) A_\eta u \bar{v} dx = \int_{\Omega_\eta} \left(-\Delta u + \left(-\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right) \cdot \nabla u + \right. \\ &\quad \left. + \left(\|\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 + V_2(x)\right)u\right) \exp\left(\frac{1}{2}h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right) \bar{v} dx \\ &= \int_{\Omega_\eta} -\Delta \tilde{u} \bar{\tilde{v}} dx + \int_{\Omega_\eta} \left(\frac{5}{4}\|\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 + V_2(x)\right) \tilde{u} \bar{\tilde{v}} dx \\ &= \int_{\Omega_\eta} \nabla \tilde{u} \overline{\nabla \tilde{v}} dx - \int_{\partial\Omega_\eta} \underbrace{\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}}_{=0} \bar{\tilde{v}} d\sigma + \int_{\Omega_\eta} \left(\frac{5}{4}\|\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 + V_2(x)\right) \tilde{u} \bar{\tilde{v}} dx. \end{aligned}$$

So, for all $\eta \in]0, 1[$, $\langle A_\eta \cdot, \cdot \rangle_\eta$ is also a scalar product, which means that A_η is self-adjoint [10, Theorem 2.7]. $\square$

As a consequence, $sp(A_\eta)$ is real for all $\eta \in]0, 1[$. Since we cannot extend the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_\eta$ over $L^2(\Omega)$, we cannot guarantee that A is self-adjoint.

We define

$$\begin{aligned} K &= \inf \left\{ \frac{1}{2} \Delta h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) + \|\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\|_{L^2_{\Omega_\eta}}^2 + V_2(x) : (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_\eta \right\}, \\ K_1 &= \inf \left\{ \|\nabla h\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\|_{L^2_{\Omega_\eta}}^2 : (x_1, \dots, x_n) \in \Omega_\eta \right\}, \\ M &= C_{PF}^{-2} + K - \frac{5K_1}{4}, \\ E &= \{\eta \in]0, 1] : M \leq 0\}, \end{aligned}$$

where C_{PF} is the Poincarre-Friedrichs constant (see [10]).

Theorem 2.2. For all $\eta \in]0, 1[$,

- If $\eta \notin E$, the essential spectrum $sp_{ess}(A_\eta)$ is included in $] \frac{5}{4}K_1, C_{PF}^{-2} + K[$, and the point spectrum $sp_p(A_\eta)$ is included in $[C_{PF}^{-2} + K, +\infty[$,
- If $\eta \in E$, A_η has no essential spectrum, and the point spectrum is included in $[C_{PF}^{-2} + K, +\infty[$.

P r o o f. For all $\eta \in]0, 1[$ and all $u \in D(A_\eta)$,

$$Re(\langle A_\eta u, u \rangle) = \frac{1}{2}(\langle A_\eta u, u \rangle + \overline{\langle u, A_\eta u \rangle}) = \frac{1}{2}(\langle A_\eta u, u \rangle + \langle u, A_\eta u \rangle).$$

However

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\eta} -\Delta u \bar{u} dx &= - \int_{\partial\Omega_\eta} \frac{\partial u}{\partial \nu} \underbrace{\bar{u}}_{=0} d\sigma + \int_{\Omega_\eta} \nabla u \nabla \bar{u} dx = \int_{\Omega_\eta} |\nabla u|^2 dx. \\ \int_{\Omega_\eta} \nabla h(\prod_{i=1}^n x_i) \cdot \nabla u \bar{u} dx &= - \int_{\Omega_\eta} \nabla h(\prod_{i=1}^n x_i) \cdot \nabla \bar{u} u dx - \int_{\Omega_\eta} \Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) |u|^2 dx. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\langle A_\eta u, u \rangle) &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 + \int_{\Omega_\eta} \left(\frac{1}{2} \Delta h(\prod_{i=1}^n x_i) + \|\nabla h(\prod_{i=1}^n x_i)\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 + V_2(x) \right) |u|^2 dx \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 + K \|u\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2. \end{aligned}$$

By the theorem of Poincarre-Friedrich (see [10]),

$$\operatorname{Re}(\langle A_\eta u, u \rangle) \geq C_{PF}^{-2} \|u\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 + K \|u\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2 \geq (C_{PF}^{-2} + K) \|u\|_{L^2(\Omega_\eta)}^2.$$

Thus, for all $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\|(A_\eta - \lambda I)u\|_{L^2(\Omega_\eta)} \geq (C_{PF}^{-2} + K - \lambda) \|u\|_{L^2(\Omega_\eta)}.$$

Hence $(A_\eta - \lambda I)$ is injective for all $\lambda < C_{PF}^{-2} + K$, and thus $sp(A_\eta)$ is included in $[C_{PF}^{-2} + K, +\infty[$. Let $H = H_0^1(\Omega_\eta)$ and $\lambda \in [-\infty, \frac{5}{4}K_1[$. The sesquilinear form is defined on H by

$$\varphi_\lambda(u, v) = \int_{\Omega_\eta} (\nabla u \nabla \bar{v} + (\frac{5}{4}V_1 + V_2 - \lambda)u\bar{v})dx,$$

which verifies

$$|\varphi_\lambda(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\eta)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\eta)} + C \|u\|_{L^2(\Omega_\eta)} \|v\|_{L^2(\Omega_\eta)},$$

where

$$C = \sup \left\{ \frac{5}{4}V_1(x) + V_2(x) : x \in \Omega_\eta \right\} + |\lambda|,$$

and

$$|\varphi_\lambda(u, v)| \geq \min \left\{ 1, \left(\frac{5}{4}K_1 - \lambda \right) \right\} \|u\|_H^2.$$

Since, for all $g \in L^2(\Omega_\eta)$, the semilinear form $L : H \rightarrow \mathbb{C}$, $v \mapsto \int_{\Omega_\eta} g \bar{v} dx$ is continuous, it follows from the Lax-Milgram theorem that the equation

$$\varphi_\lambda(u, v) = L(v)$$

has a unique solution u in H for all $v \in H$. Take into consideration the problem

$$(p) \begin{cases} \text{for } g \in L^2(\Omega_\eta), & \text{find } u \in L^2(\Omega_\eta) \text{ such that} \\ A_\eta u - \lambda u = g & \text{on } \Omega_\eta, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega_\eta. \end{cases}$$

We use the same variable change as in the previous theorem: we multiply the equation by $\exp(\frac{h(\prod_{i=1}^n x_i)}{2})$ and set $\tilde{g} = g \exp(\frac{h(\prod_{i=1}^n x_i)}{2})$, $\tilde{u} = u \exp(\frac{h(\prod_{i=1}^n x_i)}{2})$. We see that (p) is equivalent to

$$(\tilde{p}) \begin{cases} \text{for } \tilde{g} \in L^2(\Omega_\eta), & \text{find } \tilde{u} \in L^2(\Omega_\eta) \text{ such that} \\ -\Delta \tilde{u} + (\frac{5}{4}V_1 + V_2)\tilde{u} - \lambda \tilde{u} = \tilde{g} & \text{on } \Omega_\eta, \\ \tilde{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega_\eta. \end{cases}$$

Therefore, the sesquilinear form $\varphi_\lambda(u, v) = \int_{\Omega_\eta} \nabla u \nabla \bar{v} + (\frac{5}{4}K_1 - \lambda)u\bar{v}$ is an inner product in $L^2(\Omega_\eta)$ for $\lambda < \frac{5}{4}K_1$. Hence, $(\tilde{p})$ has a unique solution $\tilde{u}$, and (p) has a unique solution u defined by $u = \tilde{u} \exp(-h(\prod_{i=1}^n x_i))$. $\square$

2.2. Relation between A_η and B_η

It is known that, for every $\eta \in]0, 1[$, $B_\eta \subseteq A_\eta$, i. e. $D(B_\eta) \subseteq D(A_\eta)$ and, for all $f \in D(B_\eta)$,

$$B_\eta f = A_\eta f.$$

Furthermore, for every $\eta \in]0, 1[$, $B_\eta \subseteq A$. In fact, for any $f \in D(B_\eta) = H_0^2(\Omega_\eta)$, extending f to Ω by 0 gives $f \in D(A)$. This proves that

$$\bigcup_{0 < \eta < 1} sp_p(B_\eta) \subseteq sp_p(A_\eta).$$

To determine the spectrum of A the study of the difference $sp_p(A_\eta) \setminus sp_p(B_\eta)$ is required. In this section, we prove that this difference is empty for $\eta \in]0, 1[$.

Lemma 2.1. *For all $\varepsilon > 0$ and for all $\eta \in]0, 1[$,*

$$sp_\varepsilon(B_\eta) = sp_\varepsilon(A_\eta).$$

P r o o f. Let $\lambda \in sp_\varepsilon(B_\eta)$. Then there exists $f \in D(B_\eta)$ such that

$$\frac{\|B_\eta f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)}}{\|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}} < \varepsilon.$$

But $f \in D(A_\eta)$, so

$$\frac{\|A_\eta f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)}}{\|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}} < \varepsilon,$$

and $\lambda \in sp_\varepsilon(A_\eta)$.

Inversely, let $\lambda \in sp_\varepsilon(A_\eta)$. Then there is $f \in D(A_\eta)$ such that

$$\frac{\|A_\eta f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)}}{\|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}} < \varepsilon.$$

Since the space of infinitely differentiable functions with compact support $C_c^\infty(\Omega_\eta)$ is dense in $D(A)$ with respect to the graph norm defined by $\|\cdot\|_A = \|A\cdot\|_{L^2(\Omega)} + \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, for all

$f \in D(A_\eta)$, there is a sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega_\eta)$ such that $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_A = 0$. So, for all $\theta > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that, for all $n \geq N$, we have

$$\left| \frac{\|A_\eta f_n - \lambda f_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|f_n\|_{L^2(\Omega)}} - \frac{\|A_\eta f - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} \right| < \theta.$$

We set

$$\theta = \varepsilon - \frac{\|A_\eta f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)}}{\|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}} > 0.$$

Then there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\frac{\|A_\eta f_{n_0} - \lambda f_{n_0}\|_{L^2(\Omega)}}{\|f_{n_0}\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon.$$

However $f_{n_0} \in D(B_\eta)$, then $\lambda \in sp_\varepsilon(B_n)$. □

Corollary 2.1. *For all $\varepsilon > 0$, if $0 < \eta \leq \eta' < 1$, then*

$$sp_\varepsilon(A_{\eta'}) \subseteq sp_\varepsilon(A_\eta).$$

P r o o f. Let $\lambda \in sp_\varepsilon(B_{\eta'})$. Then there exists $f \in D(B_{\eta'})$ such that

$$\frac{\|B_{\eta'} f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_{\eta'})}}{\|f\|_{L^2(\Omega_{\eta'})}} < \varepsilon.$$

Extending f to Ω_η by 0,

$$\frac{\|B_\eta f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)}}{\|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}} < \varepsilon.$$

It follows that λ belongs to $sp_\varepsilon(B_\eta)$. Now we can apply Lemma 2.1 to complete the proof. □

We proved that the family $\{sp_\varepsilon(A_\eta)\}_{0 < \eta < 1}$ is decreasing, and this makes us to say that the family $\{sp(A_\eta)\}_{0 < \eta < 1}$ is decreasing with respect to inclusion. In fact, for all $0 < \eta \leq \eta' < 1$,

$$sp(A_{\eta'}) \subseteq sp_\varepsilon(A_{\eta'}) \subseteq sp_\varepsilon(A_\eta).$$

But A_η is self-adjoint, i. e. $sp_\varepsilon(A_\eta) = N_\varepsilon(sp(A_\eta))$, for all $\eta \in]0, 1[$. Then

$$sp(A_{\eta'}) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} N_\varepsilon(sp(A_\eta)) = sp(A_\eta).$$

Theorem 2.3. *For all $\eta \in E$,*

$$sp(B_\eta) = sp(A_\eta).$$

P r o o f. Since A_η is self-adjoint for all $\eta \in E$, we have

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} sp_\varepsilon(A_\eta) = sp(A_\eta).$$

Then, by using Lemma 2.1, we find

$$sp(B_\eta) \subseteq sp_\varepsilon(B_\eta) = sp_\varepsilon(A_\eta) \Rightarrow sp(B_\eta) \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} sp_\varepsilon(A_\eta) = sp(A_\eta).$$

Reciprocally, let $\lambda \in sp(A_\eta)$ for some $\eta \in E$. According to Theorem 2.2, there exists $f \in D(A), f \neq 0$ such that

$$A_\eta f = \lambda f.$$

Since $C_c^\infty(\Omega_\eta)$ is dense in $D(A_\eta)$ with respect to the graph norm, there is a sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega_\eta)$ which converges to f in the graph norm. We define the sequence

$$g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_{L^2(\Omega_\eta)}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

For all $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n \in D(B_\eta), \quad \|g_n\|_{L^2(\Omega_\eta)} = 1,$$

and

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|B_\eta g_n - \lambda g_n\|_{L^2(\Omega_\eta)} = \frac{\|A_\eta f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)}}{\|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}} = 0.$$

Then $\lambda \in sp(B_\eta)$. In fact, if $(B_\eta - \lambda I)^{-1}$ exists and is bounded, then

$$1 = \|g_n\|_{L^2(\Omega_\eta)} \leq \|(B_\eta - \lambda I)^{-1}\| \|B_\eta g_n - \lambda g_n\|_{L^2(\Omega_\eta)} \longrightarrow 0.$$

Therefor, the operator $(B_\eta - \lambda I)^{-1}$, if it exists, can not be bounded, which means that $B_\eta - \lambda I$ can not be surjective. $\square$

3. Pseudospectrum and spectrum of A

The pseudospectrum has better stability than the spectrum. Pseudospectrum is easier to be controlled and can be considered as the finest stable for the passage to the limit.

3.1. Pseudospectrum

In this subsection, we establish a relation between the spectrum and the pseudospectrum of A seen as limits of $sp(A_\eta)$ and $sp(B_\eta)$ respectively.

Theorem 3.1. *For all $\varepsilon > 0$,*

$$sp_\varepsilon(A) = \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta) = \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(B_\eta).$$

P r o o f. Let $\lambda \in \bigcup_{0 < \eta < 1} sp_\varepsilon(B_\eta)$. Then there exist $\eta_1 \in E$ and $f \in D(B_{\eta_1})$ such that

$$\frac{\|B_{\eta_1} f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_{\eta_1})}}{\|f\|_{L^2(\Omega_{\eta_1})}} < \varepsilon.$$

Extending f to Ω by 0,

$$\frac{\|Af - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon.$$

So, it follows that λ belongs to $sp_\varepsilon(A)$, and

$$\bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(B_\eta) \subseteq sp_\varepsilon(A).$$

Reciprocally, let $\lambda \in sp_\varepsilon(A)$. Then there is $f \in D(A)$ such that

$$\frac{\|Af - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon.$$

Since $C_c^\infty(\Omega)$ is dense in $D(A)$ with respect to the graph norm, for all $f \in D(A)$, there is a sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega)$ such that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|Af_n - \lambda f_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|f_n\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|Af - \lambda f\|_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Like in the proof of Lemma 2.1, we choose n_0 such that

$$\frac{\|Af_{n_0} - \lambda f_{n_0}\|_{L^2(\Omega)}}{\|f_{n_0}\|_{L^2(\Omega)}} < \varepsilon.$$

There is η small enough for which the support of $g = f_{n_0}$ is included in Ω_η . It follows that λ belongs to $sp_\varepsilon(A_\eta)$. Thus,

$$sp_\varepsilon(A) \subseteq \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta).$$

Now, we use Lemma 2.1 to conclude the proof. □

From the previous theorem, we deduce that

$$sp_\varepsilon(A) \subseteq N_\varepsilon(\mathbb{R}^+) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\} \bigcup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0, |z| < \varepsilon\}.$$

In fact, for all $\eta \in E$, A_η is self-adjoint. Then $sp_\varepsilon(A_\eta) = N_\varepsilon(sp(A_\eta))$. But, $sp(A_\eta) \subseteq \mathbb{R}^+$. We obtain

$$\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta) \subseteq \mathbb{R}^+.$$

3.2. Spectra

In this part, we will set a new relation between the spectrum of A and that of A_η . First, we begin with a topological result that will allow us to obtain the desired property.

Proposition 3.1. *For all $\varepsilon > 0$,*

$$\bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta) = N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)\right).$$

P r o o f. Let $\lambda \in \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta)$. There is $\eta_1 \in E$ such that

$$\lambda \in sp_\varepsilon(A_{\eta_1}) = N_\varepsilon(sp(A_{\eta_1})).$$

So, $\lambda = s + z$, where $s \in sp(A_{\eta_1})$ and $|z| < \varepsilon$. But $s \in \bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)$ implies

$$\lambda \in N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)\right).$$

Reciprocally, let $\lambda \in N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)\right)$. Then $\lambda = s + z$, where $s \in \bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)$ and $|z| < \varepsilon$.

So, there is $\eta_1 \in E$ such that

$$\lambda = s + z \in N_\varepsilon(sp(A_{\eta_1})) = sp_\varepsilon(A_{\eta_1}).$$

Thus, $\lambda \in \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta)$. □

Theorem 3.2.

$$sp(A) = \bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta).$$

P r o o f. Let $\lambda \in \bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)$. There is $\eta_1 \in E$ such that $\lambda \in sp(A_{\eta_1})$. Then there is $f \in D(A_{\eta_1})$, where $A_{\eta_1}f - \lambda f = 0$. Since $C_c^\infty(\Omega_{\eta_1})$ is dense in $D(A_{\eta_1})$ with respect to the graph norm, there is a sequence $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_c^\infty(\Omega_{\eta_1})$ which converges to f in the graph norm. We define the sequence

$$g_n = \begin{cases} \frac{f_n}{\|f_n\|_{L^2(\Omega_{\eta_1})}} & \text{on } \Omega_{\eta_1}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{on } \Omega/\Omega_{\eta_1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

We have, for all $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n \in D(A), \|g_n\|_{L^2(\Omega_{\eta_1})} = 1,$$

then

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Ag_n - \lambda g_n\|_{L^2(\Omega_{\eta_1})} = 0.$$

Thus $\lambda \in sp(A)$. By Theorem 3.1, we have

$$sp(A) \subset sp_\varepsilon(A) = \bigcup_{\eta \in E} sp_\varepsilon(A_\eta),$$

and by Proposition 3.1,

$$sp(A) \subset N_\varepsilon\left(\bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)\right).$$

So, we obtain

$$sp(A) \subseteq \bigcup_{\eta \in E} sp(A_\eta)$$

as ε tends to 0. □

4. Formula perturbation

This section is devoted to the study of pseudospectrum stability when the perturbation is applied directly to the operator's formula. For this purpose, we define for $\alpha > 0$,

$$A_\alpha = A_0 + \alpha V_3,$$

where V_3 is a continuous function over Ω such that

$$K_2 = \sup_{x \in \Omega} |V_3(x)| < \infty, K_3 = \inf_{x \in \Omega} |V_3(x)|,$$

which means that, for all $\alpha > 0$, $D(A_\alpha) = D(A_0)$. Our aim is to compare $sp(A_\alpha)$ and $sp(A_0)$. For $\eta > 0$, $A_{\alpha,\eta}$, $A_{0,\eta}$ are defined in the same way as A_η . It is clear, that for $\varepsilon > 0$,

$$\forall \alpha \geq 0, \quad sp_\varepsilon(A_\alpha) = \bigcup_{\eta \in E_\alpha} sp_\varepsilon(A_{\alpha,\eta}),$$

where $E_\alpha = \{\eta \in]0, 1] : C_{PF}^{-2} + K - \frac{5K_1}{4} - \alpha K_3 \leq 0\}$, and

$$\forall \alpha \geq 0, \quad sp(A_\alpha) = \bigcup_{\eta \in E_\alpha} sp(A_{\alpha,\eta}).$$

Theorem 4.1.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} sp(A_\alpha) \subset sp(A_0) \subset \lim_{\alpha \rightarrow 0} sp_{\alpha K_2}(A_\alpha).$$

P r o o f. Let $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ and $\lambda \in sp_\varepsilon(A_{0,\eta})$. Then there exists $f \in D(A_{0,\eta})$ such that

$$\|A_{0,\eta}f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)} < \varepsilon \|f\|_{L^2(\Omega_\eta)}.$$

Therefore, for $\alpha > 0$,

$$\|A_{\alpha,\eta}f - \lambda f\|_{L^2(\Omega_\eta)} < (\varepsilon + \alpha K_2) \|f\|_{L^2(\Omega_\eta)},$$

which means that $\lambda \in sp_{\varepsilon + \alpha K_2}(A_{\alpha,\eta})$. However, $A_{0,\eta}$ and $A_{\alpha,\eta}$ are self-adjoint operators, then

$$sp(A_{0,\eta}) \subset sp_{\alpha K_2}(A_{\alpha,\eta}) \Rightarrow sp(A_0) \subset \bigcup_{\eta \in E_0} sp_{\alpha K_2}(A_{\alpha,\eta}).$$

We use the fact that $E_0 \subset E_\alpha$ for all $\alpha > 0$ to get

$$sp(A_0) \subset sp_{\alpha K_2}(A_\alpha) \Rightarrow sp(A_0) \subset \lim_{\alpha \rightarrow 0} sp_{\alpha K_2}(A_\alpha).$$

Inversely, it is clear that, for all $\alpha > 0$ and all $\eta > 0$,

$$sp(A_{\alpha,\eta}) \subset sp_{\alpha K_2}(A_{0,\eta}).$$

Then

$$sp(A_\alpha) = \bigcup_{\eta \in E_\alpha} sp(A_{\alpha,\eta}) \subset \bigcup_{\eta \in E_\alpha} sp_{\alpha K_2}(A_{0,\eta}) \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} sp(A_\alpha) \subset \lim_{\alpha \rightarrow 0} \bigcup_{\eta \in E_\alpha} sp_{\alpha K_2}(A_{0,\eta}),$$

but

$$\bigcup_{\eta \in E_\alpha} sp_{\alpha K_2}(A_{0,\eta}) = N_{\alpha K_2} \left(\bigcup_{\eta \in E_\alpha} sp(A_{0,\eta}) \right).$$

We use $\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_\alpha = E_0$ to get

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} sp(A_\alpha) \subset sp(A_0).$$

□

Acknowledgements. We are very grateful to the editor and reviewer for their remarks proposed to improve our paper. We thank Mr. Ammar Khellaf for his effort and help.

References

- [1] H. Guebbai, A. Largillier, “Spectra and Pseudospectra of Convection-Diffusion Operator”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **33**:1 (2012), 274–283.
- [2] E. Shargorodsky, “On the definition of pseudospectra”, *Bull. London Math. Soc.*, **41**:2 (2009), 524–534.
- [3] S. Roch, B. Silbermann, “C*-algebra techniques in numerical analysis”, *J. Operator Theory*, **35** (1996), 241–280.
- [4] L. N. Trefethen, *Pseudospectra of matrices*, Longman Sci. Tech. Publ., Harlow, 1992.
- [5] L. N. Trefethen, “Pseudospectra of linear operators”, *SIAM Review*, **39**:3 (1997), 383–406.
- [6] E. B. Davies, “Pseudospectra of Differential Operators”, *J. Operator Theory*, **43**:3 (2000), 243–262.
- [7] E. B. Davies, *Spectral Theory and Differential Operators*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [8] L. Boulton, *Non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semigroups and pseudospectra*, Maths.SP/9909179, London, 1999.
- [9] S. C. Reddy, L. N. Trefethen, “Pseudospectra of the convection-diffusion operator”, *SIAM J. Appl. Math.*, **54**:1 (1994), 1634–1649.
- [10] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [11] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

Information about the authors

Hamza Guebbai, Associate Professor of Mathematics Department. University 8 Mai 1945, Guelma, Algeria. E-mail: guebbaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>

Информация об авторах

Геббай Хамза, доцент, кафедра математики. Университет 8 мая 1945, г. Гельма, Алжир.

E-mail: guebbaihamza@yahoo.fr; guebbai.hamza@univ-guelma.dz

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8119-2881>

Sami Segni, PhD Student of Mathematics.
University 8 Mai 1945, Guelma, Algeria.
E-mail: segnianis@gmail.com;
segn.sami@univ-guelma.dz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5330-1822>

Mourad Ghiat, Associate Professor of Mathematics Department. University 8 Mai 1945, Guelma, Algeria.
E-mail: mourad.ghi24@gmail.com;
ghiat.mourad@univ-guelma.dz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4484-2504>

Wassim Merchela, PhD Student of Mathematics. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation.
E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Wassim Merchela
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

Received 22 August 2019
Reviewed 17 October 2019
Accepted for press 29 November 2019

Сегни Сами, аспирант, кафедра математики.
Университет 8 мая 1945, г. Гельма, Алжир.
E-mail: segnianis@gmail.com;
segn.sami@univ-guelma.dz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5330-1822>

Гиат Морад, доцент, кафедра математики.
Университет 8 мая 1945, г. Гельма, Алжир.
E-mail: mourad.ghi24@gmail.com;
ghiat.mourad@univ-guelma.dz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4484-2504>

Мерчела Вассим, аспирант, кафедра функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация.
E-mail: merchela.wassim@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3702-0932>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Мерчела Вассим
E-mail: merchela.wassim@gmail.com

Поступила в редакцию 22 августа 2019 г.
Поступила после рецензирования 17 октября 2019 г.
Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

© Grosheva L.I., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-368-375

УДК 517.98

Decomposition of boundary representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles

Larisa I. GROSHEVA

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Разложение граничных представлений на плоскости Лобачевского в сечениях линейных расслоений

Лариса Игоревна ГРОШЕВА

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Abstract. Earlier we described canonical (labelled by $\lambda \in \mathbb{C}$) and accompanying boundary representations of the group $G = \mathrm{SU}(1, 1)$ on the Lobachevsky plane D in sections of linear bundles and decomposed canonical representations into irreducible ones. Now we decompose representations acting on distributions concentrated at the boundary of D . In the generic case $2\lambda \notin \mathbb{N}$ they are diagonalizable, in the exceptional case Jordan blocks appear.

Keywords: Lobachevsky plane; canonical representations; distributions; boundary representations; Poisson transforms

For citation: Grosheva L.I. Razlozhenie granichnykh predstavlenij na ploskosti Lobachevskogo v secheniyah linejnykh rassloenij [Decomposition of boundary representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 368–375. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-368-375.

Аннотация. Ранее мы описали канонические и граничные представления группы $G = \mathrm{SU}(1, 1)$ на плоскости Лобачевского в сечениях линейных расслоений (они нумеруются комплексными числами λ) и разложили канонические представления на неприводимые. Сейчас мы разлагаем представления, действующие в обобщенных функциях, сосредоточенных на границе. В общем случае $2\lambda \notin \mathbb{N}$ они диагонализуются, в исключительном случае появляются жордановы клетки.

Ключевые слова: плоскость Лобачевского; канонические представления; обобщенные функции; граничные представления; преобразования Пуассона

Для цитирования: Грошева Л.И. Разложение граничных представлений на плоскости Лобачевского в сечениях линейных расслоений // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 368–375. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-368-375. (In Engl., Abstr. in Russian)

In our work [3] we described canonical and boundary representations of the group $G = \mathrm{SU}(1, 1)$ on the Lobachevsky plane D in sections of linear bundles on D . Then in [4] we decomposed *canonical* representations into irreducible ones. Now we continue [4] and decompose *boundary* representations. We lean on works [1, 2].

1. The Lobachevsky plane

The Lobachevsky plane is the unit disk $D : z\bar{z} < 1$ on the complex plane with the linear-fractional action of G :

$$z \mapsto z \cdot g = \frac{az + \bar{b}}{bz + \bar{a}}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} - b\bar{b} = 1.$$

The boundary S of D is the circle $z\bar{z} = 1$, it consists of points $s = \exp i\alpha$, the measure ds on S is $d\alpha$. Let $\bar{D}$ be the closure of D : $\bar{D} = D \cup S$. Let

$$p = 1 - z\bar{z},$$

so that $D = \{p > 0\}$ and $S = \{p = 0\}$. The stabilizer of the point $z = 0$ is the maximal compact subgroup $K = \mathrm{U}(1)$ consisting of diagonal matrices:

$$k = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a\bar{a} = 1,$$

so that $D = G/K$. The Euclidean measure $dx dy$ on D is $(1/2) dp ds$, a G -invariant measure $d\mu(z)$ on D is

$$d\mu(z) = p^{-2} dx dy.$$

If M is a manifold, then $\mathcal{D}(M)$ denotes the space of compactly supported infinitely differentiable $\mathbb{C}$ -valued functions on M , with a usual topology, and $\mathcal{D}'(M)$ denotes the space of distributions on M – of antilinear continuous functionals on $\mathcal{D}(M)$.

We use the notation

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Recall principal non-unitary series representations of G trivial on the center, see also [4]. Let $\sigma \in \mathbb{C}$. The representation T_σ acts on the space $\mathcal{D}(S)$ by

$$(T_\sigma(g)\varphi)(s) = \varphi(s \cdot g) |bs + \bar{a}|^{2\sigma}.$$

The inner product from $L^2(S, ds)$:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \int_S \psi(s) \overline{\varphi(s)} ds$$

is invariant with respect to the pair $(T_\sigma, T_{-\bar{\sigma}-1})$.

If $\sigma \notin \mathbb{Z}$, then T_σ is irreducible and equivalent to $T_{-\sigma-1}$ (for $\sigma \in \mathbb{Z}$ there is a “partial equivalence”). For $\sigma = v \in \mathbb{N}$ the representation T_v has an invariant irreducible subspace E_v spanned by $\exp ir\alpha$, $r = -v, -v+1, \dots, v$.

A basis of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G is

$$L_0 = \begin{pmatrix} i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

We also use their linear combinations (they belong to the complexification of $\mathfrak{g}$):

$$L_+ = L_2 + iL_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_- = L_2 - iL_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denote by $\Delta_{\mathfrak{g}}$ the twice Casimir element of the universal enveloping algebra $\text{Env}(\mathfrak{g})$ of $\mathfrak{g}$:

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = -L_0^2 + L_1^2 + L_2^2.$$

The representation T_{σ} of $\mathfrak{g}$ assigns to L_0 , L_+ , L_- the following operators:

$$\begin{aligned} T_{\sigma}(L_0) &= \frac{d}{d\alpha}, \\ T_{\sigma}(L_+) &= e^{i\alpha} \left(\sigma + i \frac{d}{d\alpha} \right), \\ T_{\sigma}(L_-) &= e^{-i\alpha} \left(\sigma - i \frac{d}{d\alpha} \right), \\ T_{\sigma}(\Delta_{\mathfrak{g}}) &= \sigma(\sigma + 1). \end{aligned}$$

2. Canonical representations

Let $\mathcal{D}(\overline{D})$ be the space of restrictions to $\overline{D}$ of functions from $\mathcal{D}(\mathbb{C})$ with the induced topology, and by $\mathcal{D}'(\overline{D})$ the space of distributions on $\mathbb{C}$ with supports in $\overline{D}$. Consider the inner product with respect to the Lebesgue measure on D :

$$\langle F, f \rangle_D = \int_D F(z) \overline{f(z)} dx dy, \quad z = x + iy. \quad (2.1)$$

The space $\mathcal{D}(\overline{D})$ can be embedded into $\mathcal{D}'(\overline{D})$ by assigning to $h \in \mathcal{D}(\overline{D})$ the functional $f \mapsto \langle h, f \rangle_D$, $f \in \mathcal{D}(\overline{D})$.

We shall use denotation:

$$z^{\mu, m} = |z|^{\mu} \left(\frac{z}{|z|} \right)^m, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Let $\lambda \in \mathbb{C}$. We define the *canonical representation* $R_{\lambda, m}$ of the group G associated with a character of K as follows:

$$(R_{\lambda, m}(g)f)(z) = f(z \cdot g) (bz + \overline{a})^{-2\lambda - 4, 2m},$$

it acts on the space $\mathcal{D}(\overline{D})$.

The inner product (2.1) is invariant with respect to the pair $(R_{\lambda,m}, R_{-\bar{\lambda}-2,m})$:

$$\langle R_{\lambda,m}(g)f, h \rangle_D = \langle f, R_{-\bar{\lambda}-2,m}(g^{-1})h \rangle_D, \quad g \in G. \quad (2.2)$$

The formula (2.2) allows to extend the representation $R_{\lambda,m}$ to the space $\mathcal{D}'(\bar{D})$ of distributions on $\bar{D}$.

Here are formulae for basic elements of $\mathfrak{g}$ in variables p and α :

$$\begin{aligned} R_{\lambda,m}(L_0) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} - im, \\ R_{\lambda,m}(L_{\pm}) &= e^{\pm i\alpha} \left\{ -rp \frac{\partial}{\partial p} \pm \frac{1}{2}(r + r^{-1})i \frac{\partial}{\partial \alpha} - (\lambda + 2 \mp m)r \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Let us also write the operator corresponding to $\Delta_{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned} R_{\lambda,m}(\Delta_{\mathfrak{g}}) &= (p^3 - p^2) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + [(2\lambda + 4)p - (2\lambda + 5)p^2] \frac{\partial}{\partial p} + \\ &\quad + imp \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{p^2}{1-p} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \\ &\quad + [(\lambda + 2)(\lambda + 1) - ((\lambda + 2)^2 - m^2)p]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

In (2.4) one has to use the binomial expansions $(r = (1 - p)^{1/2})$:

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n p^n, \quad (2.5)$$

$$r^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-1)^n p^n, \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{2}(r + r^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (1 - n) (-1)^n p^n. \quad (2.7)$$

Applying these formulae to distributions ζ , we have to keep in mind the following:

$$p^n \delta^{(k)}(p) = (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}(p).$$

3. Boundary representations

Canonical representations $R_{\lambda,m}$ generate two boundary representations $L_{\lambda,m}$ and $M_{\lambda,m}$. For simplicity, in this paper we restrict ourselves to the first one. It acts on distributions in $\mathcal{D}'(\bar{D})$ concentrated at S .

Consider distributions of the following form:

$$\zeta = \varphi(s) \delta^{(k)}(p),$$

where $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ and $\delta(p)$ is the Dirac delta function on the real line (being a continuous linear functional on $\mathcal{D}(\mathbb{R})$) and $\delta^{(k)}(p)$ its k -th derivative. The space of these distributions will be denoted by $\Delta_k(\overline{D})$. Define also

$$\Sigma_k(\overline{D}) = \Delta_0(\overline{D}) + \Delta_1(\overline{D}) + \cdots + \Delta_k(\overline{D}),$$

so that a distribution ζ in $\Sigma_k(\overline{D})$ is a linear combination

$$\zeta = \varphi_0(s) \delta(p) + \varphi_1(s) \delta'(p) + \cdots + \varphi_k(s) \delta^{(k)}(p).$$

We get a filtration:

$$\Delta_0(\overline{D}) = \Sigma_0(\overline{D}) \subset \Sigma_1(\overline{D}) \subset \Sigma_2(\overline{D}) \subset \cdots$$

Let $\Sigma(\overline{D})$ denote the union of all $\Sigma_k(\overline{D})$.

The canonical representation $R_{\lambda,m}$ acting on $\mathcal{D}'(\overline{D})$, preserves the space $\Sigma(\overline{D})$ and the filtration (2.3). The boundary representation $L_{\lambda,m}$ is the restriction of $R_{\lambda,m}$ to $\Sigma(\overline{D})$.

4. Poisson transform

Let $\lambda, \sigma \in \mathbb{C}$ and $m \in \mathbb{Z}$. We define the *Poisson transform associated with the canonical representation* $R_{\lambda,m}$ as the map $P_{\lambda,\sigma}^{(m)} : \mathcal{D}(S) \rightarrow C^\infty(D)$ by the following formula

$$\left(P_{\lambda,\sigma}^{(m)}\right)(z) = p^{-\lambda-\sigma-2} \int_S (1-s\bar{z})^{2\sigma-2m} s^m \varphi(s) ds.$$

The Poisson transform $P_{\lambda,\sigma}^{(m)}$ intertwines the representations $T_{-\sigma-1}$ and the canonical representation $R_{\lambda,m}$:

$$R_{\lambda,m}(g) P_{\lambda,\sigma}^{(m)} = P_{\lambda,\sigma}^{(m)} T_{-\sigma-1}(g) \quad (g \in G).$$

The Poisson transform $P_{\lambda,\sigma}^{(m)}$ is meromorphic in σ , and has poles at the points

$$\sigma = \lambda - k, \quad \sigma = -\lambda - 1 + l \quad (k, l \in \mathbb{N}). \quad (4.1)$$

All poles are simple except in the case when the two sequences (4.1) have a non-empty intersection and the pole belongs to this intersection. This happens when $2\lambda + 1 \in \mathbb{N}$ and $0 \leq k, l \leq 2\lambda + 1$, $k + l = 2\lambda + 1$. In this case the pole μ is of the second order. Let us write down the principal part of the Laurent series of $P_{\lambda,\sigma}^{(m)}$ at the poles μ of the first order:

$$P_{\lambda,\sigma}^{(m)} = \frac{\widehat{P}_{\lambda,\mu}^{(m)}}{\sigma - \mu} + \cdots.$$

The residue intertwines $T_{-\mu-1}$ with $R_{\lambda,m}$. Let us write it explicitly. We set

$$V_{\sigma,m,n}(p) = (1-p)^{(m+n)/2} F(\sigma + 1 + m, \sigma + 1 + n; 2\sigma + 2; p),$$

where F is the Gauss hypergeometric function. Expand V in powers of p :

$$V_{\sigma,m,n}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{\sigma,k}^{(m)}(n) p^k,$$

here $w_{\sigma,k}^{(m)}$ are polynomials in n of degree k . The coefficients of these polynomials are rational functions of σ with simple poles. We set

$$W_{\sigma,k}^{(m)} = w_{\sigma,k}^{(m)} \left(\frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha} \right).$$

If a pole μ belongs only to one of the sequences (4.1), then it is simple. In particular,

$$\widehat{P}_{\lambda,\lambda-k}^{(m)} = (-1)^{k+m} \frac{1}{k!} a_{-m}(\lambda - k) \xi_{\lambda,k}^{(m)},$$

where

$$a_n(\sigma) = 2\pi (-1)^n \frac{\Gamma(-2\sigma - 1)}{\Gamma(-\sigma + n) \Gamma(-\sigma - n)}$$

and $\xi_{\lambda,k}^{(m)}$ is the following operator $\mathcal{D}(S) \rightarrow \Sigma_k(\overline{D})$:

$$\xi_{\lambda,k}^{(m)} \varphi = s^m \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{k!}{(k-n)!} \left(W_{\lambda-k,n}^{(m)} \varphi \right) (s) \delta^{(k-n)}(p).$$

The operator $\xi_{\lambda,k}^{(m)}$ is meromorphic in λ . For fixed $k = 1, 2, \dots$ it has k poles (simple) at the points $\lambda = k - 1, k - 3/2, k - 2, \dots, (k - 1)/2$. It intertwines $T_{-\lambda-1+k}$ with $L_{\lambda,m}$ (restricted to $\Sigma_k(\overline{D})$).

Let us write three first operators:

$$\begin{aligned} \xi_{\lambda,0}^{(m)} \varphi &= s^m \varphi \cdot \delta(p), \\ \xi_{\lambda,1}^{(m)} \varphi &= s^m \left\{ \varphi \cdot \delta(p) - \frac{1}{2\lambda} (\lambda^2 \varphi - m \cdot i\varphi') \cdot \delta'(p) \right\}, \\ \xi_{\lambda,2}^{(m)} \varphi &= s^m \left\{ \varphi \cdot \delta(p) - \frac{1}{\lambda-1} ((\lambda-1)^2 \varphi - m \cdot i\varphi') \cdot \delta'(p) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4(\lambda-1)(2\lambda-1)} \left\{ [(\lambda-1)^2 \lambda^2 + m^2] \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2(\lambda-1)(2\lambda-1) m \cdot i\varphi' - [(\lambda-1)^2 + 2m^2] \varphi'' \right\} \cdot \delta''(p) \right\}. \end{aligned}$$

5. Decomposition of boundary representations

Theorem 5.1. *The representation $L_{\lambda,m}$ is equivalent to a upper triangular matrix with diagonal $T_{-\lambda-1}, T_{-\lambda}, T_{-\lambda+1}, \dots$*

P r o o f. The formulae (2.3) and (2.5)–(2.7) show that operators $R_{\lambda,m}(L^\pm)$ move subspaces $\Delta_k(\overline{D})$ to $\Sigma_k(\overline{D})$. Also these formulae show that the operator $R_{\lambda,m}(X)$ where $X \in \mathfrak{g}$ moves a distribution $s^m \varphi(s) \delta^{(k)}(p)$ in $\Delta_k(\overline{D})$ to the distribution $s^m (T_{-\lambda-1+k}(X)\varphi)(s) \delta^{(k)}(p) + \dots$ in $\Sigma_k(\overline{D})$. $\square$

Let $V_{\lambda,k}^{(m)}$ be the image of $\xi_{\lambda,k}^{(m)}$. This space is contained in $\Sigma_k(\overline{D})$ and its projection to $\Delta_k(\overline{D})$ is the whole $\Delta_k(\overline{D})$. It gives:

Theorem 5.2. *In the generic case $2\lambda \notin \mathbb{N}$ the boundary representation $L_{\lambda,m}$ is diagonalizable which means that $\Sigma(\overline{D})$ decomposes into the direct sum of subspaces $V_{\lambda,k}^{(m)}$, $k \in \mathbb{N}$, the restriction of $L_{\lambda,m}$ to $V_{\lambda,k}^{(m)}$ is equivalent to $T_{-\lambda-1+k}$ (by $\xi_{\lambda,k}$), so that $L_{\lambda,m}$ is the direct sum of the $T_{-\lambda-1+k}$ ($k \in \mathbb{N}$).*

Now let $\lambda \in (1/2)\mathbb{N}$. This number λ is a pole (of the first order) of $\xi_{\tau,k}^{(m)}$ in τ for $k \in \mathbb{N}$ such that $\lambda + 1 \leq k \leq 2\lambda + 1$. For example, if $\lambda = 0$, then $k = 1$; if $\lambda = 1/2$, then $k = 2$; if $\lambda = 1$, then $k = 2, 3$; if $\lambda = 3/2$, then $k = 3, 4$. For these λ the spaces $V_{\lambda,k}^{(m)}$ are defined for all $k \in \mathbb{N}$ such that $k < \lambda + 1$ and $2\lambda + 1 < k$, for the others these spaces are absent. Let us write down the Laurent expansion of $\xi_{\tau,k}^{(m)}$ at $\tau = \lambda$:

$$\xi_{\tau,k}^{(m)} = \frac{\tilde{\xi}_{\lambda,k}^{(m)}}{\tau - \lambda} + \xi_{\lambda,k}^{(m)} + \dots$$

For the indicated k we define the spaces $\widehat{V}_{\lambda,k}^{(m)}$ and $\overset{\circ}{V}_{\lambda,k}^{(m)}$ as the images of the operators $\widehat{\xi}_{\lambda,k}^{(m)}$ and $\overset{\circ}{\xi}_{\lambda,k}^{(m)}$ respectively. The space $\widehat{V}_{\lambda,k}^{(m)}$ is isomorphic to $V_{\lambda,l}^{(m)}$ where $l + k = 2\lambda + 1$, namely there is a relation $\overset{\circ}{\xi}_{\lambda,k}^{(m)}(\varphi) = \xi_{\lambda,l}^{(m)}(\psi)$ where ψ is obtained from φ by means of some operator. Therefore the operator $\widehat{\xi}_{\lambda,k}^{(m)}$ intertwines $T_{-\lambda-1+l}$ with $L_{\lambda,m}$, notice that it vanishes on E_l . The space $\overset{\circ}{V}_{\lambda,k}^{(m)}$ has the full projection to $\Delta_k(\overline{D})$.

On the pair $\widehat{V}_{\lambda,k}^{(m)}, \overset{\circ}{V}_{\lambda,k}^{(m)}$ the representation $L_{\lambda,m}$ is the block

$$\begin{pmatrix} T_{-\lambda-1+l} & * \\ 0 & T_{-\lambda-1+k} \end{pmatrix}.$$

Since $-\lambda-1+l = -(-\lambda-1+k)-1$, representations $T_{-\lambda-1+l}$ and $T_{-\lambda-1+k}$ are isomorphic, so that this block is a genuine Jordan block. Here is the matrix corresponding to the Casimir operator $R_{\lambda,m}(\Delta_{\mathfrak{g}})$:

$$\begin{pmatrix} \mu(\mu+1) & * \\ 0 & \mu(\mu+1) \end{pmatrix},$$

where $\mu = -\lambda - 1 + l$ or $\mu = -\lambda - 1 + k$. Thus, we obtain the following theorem (we use the notation $[a]$ for the integral part of a number a).

Theorem 5.3. *Let $\lambda \in (1/2)\mathbb{N}$. Then the space $\Sigma(\overline{D})$ is the direct sum of the subspaces $V_{\lambda,k}^{(m)}$ with $k \geq 2\lambda + 2$ and $k \leq \lambda$ and subspaces $\overset{\circ}{V}_{\lambda,k}^{(m)}$ with $\lambda + 1 \leq k \leq 2\lambda + 1$.*

The representation $L_{\lambda,m}$ is equivalent to the direct sum of $[\lambda + 1]$ Jordan blocks with the diagonal $(T_{-\lambda-1+j}, T_{\lambda-j})$, $j = 0, 1, \dots, [\lambda]$, acting on subspaces $V_{\lambda,l}^{(m)} + \overset{\circ}{V}_{\lambda,k}^{(m)}$, $k + l = 2\lambda + 1$, the representation $T_{1/2}$ for half-integer λ , and the representations $T_{\lambda+1}, T_{\lambda+2}, \dots$.

Let us write $\widehat{\xi}_{\lambda,k}^{(m)}$ and $\overset{\circ}{\xi}_{\lambda,k}^{(m)}$ for some λ, k .

Let $\lambda = 0$, $k = 1$. Then

$$\widehat{\xi}_{0,1}^{(m)}(\varphi) = \frac{im}{2} s^m \varphi' \delta(p), \quad \overset{\circ}{\xi}_{0,1}^{(m)}(\varphi) = s^m \varphi \delta'(p).$$

Let $\lambda = 1$, $k = 2$. Then

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}_{1,2}^{(m)}(\varphi) &= im s^m \left\{ \varphi' \delta'(p) - \frac{1}{2} (\varphi' - im \varphi'') \delta(p) \right\}, \\ \overset{\circ}{\xi}_{1,2}^{(m)}(\varphi) &= s^m \left\{ \varphi \delta''(p) + \frac{1}{4} (m^2 - 2im \varphi' + (4m^2 - 1) \varphi'') \delta(p) \right\}. \end{aligned}$$

Let $\lambda = 1/2$, $k = 2$. Then

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_{1/2,2}^{(m)}(\varphi) &= \frac{1}{32}(4m^2 - 1)s^m(\varphi + 4\varphi'')\delta(p), \\ \xi_{1/2,2}^{(m)}(\varphi) &= s^m\left\{\varphi\delta''(p) + \frac{1}{2}(\varphi - 4im\varphi')\delta'(p) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16}(4\varphi + im\varphi' + 16m^2\varphi'')\delta(p)\right\}.\end{aligned}$$

References

- [1] V. F. Molchanov, L. I. Grosheva, “Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane”, *Acta Appl. Math.*, **73** (2002), 59–77.
- [2] L. I. Grosheva, “Canonical representations on sections of linear bundles on the Lobachevsky plane”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **12**:4 (2007), 436–438 [crossref](#).
- [3] L. I. Grosheva, “Canonical and boundary representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1218–1228 [crossref](#).
- [4] L. I. Grosheva, “Decomposition of canonical representations on the Lobachevsky plane associated with linear bundles”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:122 (2018), 113–124 [crossref](#).

Information about the author

Larisa I. Grosheva, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: gligli@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8466-3682>

Received 13 August 2019

Reviewed 16 October 2019

Accepted for press 29 November 2019

Информация об авторе

Грошева Лариса Игоревна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: gligli@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8466-3682>

Поступила в редакцию 13 августа 2019 г.

Поступила после рецензирования 16 октября 2019 г.

Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

© Жуковская З.Т., Жуковский С.Е., 2019
DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-376-383
УДК 517

О существовании непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений

Зухра Тагировна ЖУКОВСКАЯ, Сергей Евгеньевич ЖУКОВСКИЙ

ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

On the existence of a continuously differentiable solution to the Cauchy problem for implicit differential equations

Zukhra T. ZHUKOVSKAYA, Sergey E. ZHUKOVSKIY

V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Аннотация. Исследуется вопрос о существовании решения задачи Коши для дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной неизвестной функции. Рассматриваются дифференциальные уравнения, порожденные дважды непрерывно дифференцируемыми отображениями. Приведен пример, показывающий, что предположения регулярности отображения в каждой точке определения недостаточно для разрешимости задачи Коши. Введено понятие равномерной регулярности рассматриваемых отображений. Показано, что предположение равномерной регулярности является достаточным для локальной разрешимости задачи Коши при любых начальных данных в классе непрерывно дифференцируемых функций. Показано, что если отображение, определяющее дифференциальное уравнение, мажорируется отображениями специального вида, то решение рассматриваемой задачи Коши продолжаемо на заданный интервал времени. Рассмотрен случай липшицевой зависимости от фазовой переменной отображения, определяющего уравнение. Для этого случая найдены оценки непродолжаемых решений задачи Коши. Проведено сравнение полученных результатов с известными ранее. Показано, что в предположениях доказанной теоремы существования решения единственность решения для рассматриваемых задач не характерна. Приведен пример, иллюстрирующий существенность предположения равномерной невырожденности для утверждения о существовании локального решения и для утверждения о продолжении решения на заданный интервал времени.

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение; теорема существования

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 19-01-00080_а, № 20-31-70013_Стабильность) и Volkswagen Foundation.

Для цитирования: Жуковская З.Т., Жуковский С.Е. О существовании непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши для неявного дифференциального уравнения // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 376–383. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-376-383.

Abstract. We study the question of the existence of a solution to the Cauchy problem for a differential equation unsolved with respect to the derivative of the unknown function.

Differential equations generated by twice continuously differentiable mappings are considered. We give an example showing that the assumption of regularity of the mapping at each point of the domain is not enough for the solvability of the Cauchy problem. The concept of uniform regularity for the considered mappings is introduced. It is shown that the assumption of uniform regularity is sufficient for the local solvability of the Cauchy problem for any initial point in the class of continuously differentiable functions. It is shown that if the mapping defining the differential equation is majorized by mappings of a special form, then the solution of the Cauchy problem under consideration can be extended to a given time interval. The case of the Lipschitz dependence of the mapping defining the equation on the phase variable is considered. For this case, estimates of non-extendable solutions of the Cauchy problem are found. The results are compared with known ones. It is shown that under the assumptions of the proved existence theorem, the uniqueness of a solution may fail to hold. We provide examples illustrating the importance of the assumption of uniform regularity.

Keywords: implicit ordinary differential equation; existence theorem

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects no. 19-01-00080_a, no. 20-31-70013_Стабильность) and Volkswagen Foundation.

For citation: Zhukovskaya Z.T., Zhukovskiy S.E. O suschestvovanii neprerivno differentsiruyemogo resheniya zadachi Koshi dlya neyavnogo differentsialnogo uravneniya [On the existence of a continuously differentiable solution to the Cauchy problem for implicit differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 376–383. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-376-383. (In Russian, Abstr. in Engl.)

1. Введение и постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши

$$f(t, x, \dot{x}) = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in I. \quad (1.1)$$

Здесь I — заданный открытый интервал, $f : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ — заданное непрерывное отображение, относительно которого всюду далее будем предполагать, что отображение $f(t, x, \cdot)$ дважды дифференцируемо при всех $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$, а отображения $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2}$ непрерывны; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор; $t_0 \in I$ — заданное число; решение $x(\cdot)$ задачи (1.1) ищется в классе непрерывно дифференцируемых функций, определенных на некотором интервале времени, лежащем в I и содержащем t_0 .

Дифференциальное уравнение в (1.1) принято называть неявным или не разрешенным относительно производной неизвестной функции. Уравнения такого типа изучались во многих работах. Наиболее близкими к настоящему исследованию результаты были получены в работах [1, 2]. В них были получены утверждения о существовании и устойчивости решений неявных дифференциальных уравнений в классе абсолютно непрерывных функций. В частности, было доказано, что в предположении накрываемости отображения f по переменной $\dot{x}$ и липшицевости по x существует абсолютно непрерывное решение задачи (1.1). В настоящей работе исследован вопрос о существовании непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши (1.1) при дополнительном предположении гладкости f по $\dot{x}$, и при более слабом предположении — предположении непрерывности отображения f по переменной x .

Заметим, что если для некоторого набора $(t_0, x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ для отображения f выполняется условие регулярности по переменной $\dot{x}$, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t_0, x_0, u_0) \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k, \quad (1.2)$$

и $f(t_0, x_0, u_0) = 0$, то по теореме о неявной функции существует непрерывное отображение $g : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $f(t, x, g(t, x)) = 0$ при всех (t, x) из некоторой окрестности точки (t_0, x_0) , и $u_0 = g(t_0, x_0)$. Поэтому задача

$$\dot{x} = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет решение $\varphi(\cdot)$, удовлетворяющее соотношению $\dot{\varphi}(t_0) = u_0$. Очевидно, что $\varphi(\cdot)$ является решением задачи (1.1).

Отметим, что если предположение (1.2) выполняется при всех $(t_0, x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то задача (1.1) может не иметь решений при некоторых $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, поскольку в этом случае равенство $f(t_0, x_0, u_0) = 0$ может не достигаться ни в какой точке (t_0, x_0, u_0) . Простой пример сказанному дает задача

$$e^{\dot{x}} = 0, \quad x(0) = 0.$$

Очевидно, что данная задача не имеет решений, хотя свойство (1.2) в ней выполняется при любых (t_0, x_0, u_0) . Таким образом, для того, чтобы задача Коши (1.1) имела решение при любом $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, регулярности отображения f в каждой точке области определения не достаточно. В этой работе мы приведем достаточные условия существования решения задачи Коши (1.1) при любых начальных данных и достаточные условия продолжения решения на заданный интервал времени.

2. Предварительные сведения

Прежде чем перейти к основному результату, напомним некоторые определения и утверждения.

Всюду далее через $|\cdot|$ будем обозначать норму в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$, через $\|\cdot\|$ — норму в пространстве $\mathcal{L}_{n,k}$ линейных операторов, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$, через $B_n(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x радиуса r , через $\mathcal{SL}_{n,k}$ — множество всех сюръективных операторов $A \in \mathcal{L}_{n,k}$.

Оператор $A \in \mathcal{L}_{n,k}$ называется α -накрывающим (накрывающим с константой $\alpha > 0$), если

$$B_k(0, \alpha r) \subset AB_n(0, r) \quad \forall r \geq 0.$$

Отметим, что приведенное определение накрываемости для линейных операторов является частным случаем понятия накрываемости нелинейных отображений метрических пространств (см., например, [1, 2]).

Очевидно, что линейный оператор сюръективен тогда и только тогда, когда он является α -накрывающим при некотором $\alpha > 0$. Известно (см., например, [3]), что для произвольного $A \in \mathcal{SL}_{n,k}$ наибольшая константа накрывания $\bar{\alpha}$ оператора A определяется по формуле

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\|A^*(AA^*)\|}.$$

Приведем теперь глобальную теорему о неявной функции из [3, теорема 3].

Пусть Σ — топологическое пространство, $F : \mathbb{R}^n \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ — заданное отображение, относительно которого будем предполагать, что оно непрерывно, отображение $F(\cdot, \sigma)$ дважды непрерывно дифференцируемо при всех $\sigma \in \Sigma$, отображения $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ непрерывны по совокупности аргументов (x, σ) .

Предложение 2.1. (следствие из [3, теорема 3]). Пусть задано $\alpha > 0$. Предположим, что линейный оператор $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \sigma)$ является α -накрывающим при всех $(x, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Sigma$.

Тогда существует непрерывное отображение $G : \mathbb{R}^n \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$F(G(x, \sigma), \sigma) = 0 \quad \forall (x, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Sigma,$$

$$|G(x, \sigma) - x| \leq \frac{|F(x, \sigma)|}{\alpha} \quad \forall (x, \sigma) \in \mathbb{R}^n \times \Sigma.$$

3. Основной результат

Вернемся к задаче Коши (1.1). Сформулируем достаточные условия ее разрешимости при любых начальных данных и условия существования решения на заданном интервале времени.

Пусть задано вещественное число $\alpha > 0$.

Теорема 3.1. Предположим, что для отображения f выполняется предположение равномерной регулярности по переменной $\dot{x}$, то есть линейный оператор $\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}(t, x, \dot{x})$ является α -накрывающим при всех $(t, x, \dot{x}) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

1. Тогда для любого $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ и для любой непрерывной функции $u_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует содержащий t_0 интервал $J \subset I$ и решение $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи Коши (1.1) такое, что

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| \leq \frac{|f(t, \varphi(t), u_0(t))|}{\alpha} \quad \forall t \in J. \quad (3.1)$$

2. Предположим дополнительно, что существуют непрерывные функции $a : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $b : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ такие, что

$$|f(t, x, \dot{x})| \leq a(t)|x| + b(t, \dot{x}) \quad \forall (t, x, \dot{x}) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Тогда для любого $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, для любой непрерывной функции $u_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ существует решение $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ задачи Коши (1.1), для которого выполняется (3.1).

Доказательство. 1. Применяя предложение 2.1 с $\Sigma = I \times \mathbb{R}^n$ и $\sigma = (t, x)$, получаем, что существует непрерывное отображение $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что

$$f(t, x, g(u, t, x)) = 0 \quad \forall (t, x, u) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

$$|g(u, t, x) - u| \leq \frac{|f(t, x, u)|}{\alpha} \quad \forall (t, x, u) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

Возьмем произвольную точку $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ и функцию $u_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = g(u_0(t), t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (3.5)$$

Поскольку функции g и u_0 непрерывны, то правая часть дифференциального уравнения в (3.5) непрерывна, и, значит, задача Коши (3.5) имеет решение $\varphi(\cdot)$, определенное на некотором интервале J (см., например, [4, глава II, теорема 2.1]).

Покажем, что функция φ является искомой. Для произвольного $t \in J$ имеем

$$f(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = f(t, \varphi(t), g(u_0(t), t, \varphi(t))) = 0.$$

Здесь первое равенство следует из того, что функция φ является решением задачи Коши (3.5), а второе — из соотношения (3.3). Кроме того,

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| = |g(u_0(t), t, \varphi(t)) - u_0(t)| \leq \frac{|f(t, \varphi(t), u_0(t))|}{\alpha}.$$

Здесь равенство следует из того, что функция φ является решением задачи Коши (3.5), а неравенство — из соотношения (3.4). Таким образом, функция $\varphi(\cdot)$ является искомой.

2. Применяя предложение 2.1 с $\Sigma = I \times \mathbb{R}^n$ и $\sigma = (t, x)$, получаем, что существует непрерывное отображение $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что выполняются соотношения (3.3) и (3.4).

Возьмем произвольную точку $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ и функцию $u_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ и рассмотрим задачу Коши (3.5). Поскольку функции g и u_0 непрерывны, то правая часть дифференциального уравнения в (3.5) непрерывна. Кроме того,

$$\begin{aligned} |g(u_0(t), t, x)| &= |g(u_0(t), t, x) - u_0(t) + u_0(t)| \leq |g(u_0(t), t, x) - u_0(t)| + |u_0(t)| \leq \\ &\leq \frac{|f(t, x, u_0(t))|}{\alpha} + |u_0(t)| \leq \frac{a(t)}{\alpha}|x| + \frac{b(t, u_0(t))}{\alpha} + |u_0(t)| \end{aligned}$$

для любого $t \in I$. Здесь первое неравенство вытекает из неравенства треугольника, второе — из соотношения (3.4), а третье — из предположения (3.2). Таким образом, для задачи (3.5) выполнены предположения теоремы о продолжении решения на заданный интервал (см., например [5, глава II, теорема 5]). Значит, задача Коши (3.5) имеет решение $\varphi(\cdot)$, определенное на всем интервале I . Дословно повторив соответствующие рассуждения из пункта 1 доказательства, получаем, что функция φ является искомой. $\square$

4. Обсуждение основных результатов

Прокомментируем теорему 3.1. Применительно к задаче Коши для явного дифференциального уравнения, т. е. к задаче

$$\dot{x} = h(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

в которой $h : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданная непрерывная функция, а $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ — заданное начальное условие, теорема 3.1 не дает новых результатов. В этом случае

$f(t, x, \dot{x}) \equiv \dot{x} - h(t, x)$, $\alpha = 1$, и, значит, теорема 3.1 совпадает с известными утверждениями о существовании решения и его продолжении на заданный интервал времени (см., например, [4, 5]). При этом оценка (3.1) принимает вид

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| \leq |h(t, \varphi(t)) - u_0(t)| \quad \forall t \in J.$$

Но это неравенство очевидно, поскольку $\dot{\varphi}(t) \equiv h(t, \varphi(t))$. Таким образом, теорема 3.1 не дает новых результатов для явных дифференциальных уравнений.

Отметим теперь, что в предположениях теоремы 3.1 решение может быть не единственным. Во-первых, это связано с тем, что отображение f непрерывно по переменной x , но не обязательно локально липшицево. Во-вторых, в предположениях теоремы возможна ситуация $k < n$, при которой, очевидно, единственность решения невозможна. Однако, если $k = n$, а отображение f достаточно гладко, то можно доказать единственность решения.

Приведенный в параграфе 1 пример показывает, что предположение равномерной регулярности в теореме 3.1 существенно для утверждения п. 1 о существовании решения. Покажем, что даже если имеет место условие (3.2), то условие равномерной регулярности существенно и для утверждения п. 2 о существовании решения на заданном интервале времени, и не может быть заменено, например, предположением регулярности f по переменной $\dot{x}$ в каждой точке области определения отображения f .

Пример 4.1. Рассмотрим задачу Коши (1.1), в которой $I = \mathbb{R}$, а отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ определено по формуле

$$f(t, x, \dot{x}) := \begin{pmatrix} e^{\dot{x}_1} \cos(\dot{x}_2) \\ e^{\dot{x}_1} \sin(\dot{x}_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2) \in \mathbb{R}^2, \quad x = (x_1, x_2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для этого отображения соотношение (1.2) выполняется при любом $(t_0, x_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ (см., например, [6, §5.3]).

Покажем, что в рассматриваемой задаче выполняется предположение (3.2). Действительно, для любых $(t, x, \dot{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ имеем

$$|f(t, x, \dot{x})| = \left| \begin{pmatrix} e^{\dot{x}_1} \cos(\dot{x}_2) \\ e^{\dot{x}_1} \sin(\dot{x}_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right| \leq |t| + e^{\dot{x}_1} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Значит предположение (3.2) выполняется с $I = \mathbb{R}$. Однако любое решение задачи Коши (1.1) не определено в точке $t = 0$, поскольку $f(0, x, \dot{x}) \neq 0$ ни при каких $x, \dot{x} \in \mathbb{R}^2$.

В заключение рассмотрим случай, когда отображение f липшицево по переменной x . Пусть $\beta \geq 0$ задано.

Предложение 4.1. *Предположим, что отображение $f(t, \cdot, \dot{x})$ липшицево с константой Липшица β при любых $(t, \dot{x}) \in I \times \mathbb{R}^n$. Пусть $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ — заданная точка, $u_0 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданная непрерывная функция,*

$$\Phi[u_0](t) := f\left(t, x_0 + \int_{t_0}^t u_0(s) ds, u_0(t)\right), \quad t \in I,$$

$J \subset I$ — заданный интервал, содержащий t_0 , $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение задачи Коши (1.1), удовлетворяющее неравенству (3.1).

Тогда

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| \leq \frac{\beta}{\alpha^2} \left| \int_{t_0}^t e^{\frac{\beta}{\alpha}(t-s)} |\Phi[u_0](s)| ds \right| + \frac{|\Phi[u_0](t)|}{\alpha} \quad \forall t \in J.$$

Доказательство. В силу (3.1) и липшицевости отображения f по второму аргументу имеем

$$\begin{aligned} \alpha |\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| &\leq |f(t, \varphi(t), u_0(t))| \leq |f(t, \varphi(t), u_0(t)) - \Phi[u_0](t)| + |\Phi[u_0](t)| \leq \\ &\leq \beta \left| \int_{t_0}^t (\dot{\varphi}(s) - u_0(s)) ds \right| + |\Phi[u_0](t)| \leq \beta \int_{t_0}^t |\dot{\varphi}(s) - u_0(s)| ds + |\Phi[u_0](t)| \end{aligned} \quad (4.1)$$

для любого $t \in J$, $t \geq t_0$. Умножая это неравенство на $\alpha^{-1}e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-t_0)}$ получаем, что

$$\frac{d}{dt} \left(e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-t_0)} \int_{t_0}^t |\dot{\varphi}(s) - u_0(s)| ds \right) \leq \frac{e^{-\frac{\beta}{\alpha}(t-t_0)}}{\alpha} |\Phi[u_0](t)|$$

при любом $t \in J$, $t \geq t_0$. Значит,

$$\int_{t_0}^t |\dot{\varphi}(s) - u_0(s)| ds \leq \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t e^{\frac{\beta}{\alpha}(t-s)} |\Phi[u_0](s)| ds$$

при любом $t \in J$, $t \geq t_0$. Отсюда и из (4.1) следует, что

$$|\dot{\varphi}(t) - u_0(t)| \leq \frac{\beta}{\alpha^2} \int_{t_0}^t e^{\frac{\beta}{\alpha}(t-s)} |\Phi[u_0](s)| ds + \frac{|\Phi[u_0](t)|}{\alpha}$$

для любого $t \in J$, $t \geq t_0$. Повторив аналогичные рассуждения для $t \in J$, $t < t_0$, получаем искомую оценку.

References

- [1] Е.Р. Аваков, А.В. Арутюнов, Е.С. Жуковский, “Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной”, *Дифференциальные уравнения*, **45**:5 (2009), 613–634; англ. пер.: E. R. Avakov, A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskii, “Covering mappings and their applications to differential equations unsolved for the derivative”, *Differential Equations*, **45**:5 (2009), 627–649.
- [2] A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations”, *Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications*, **75**:3 (2012), 1026–1044.
- [3] А.В. Арутюнов, С.Е. Жуковский, “Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции”, *Дифференциальные уравнения*, **55**:4 (2019), 452–463; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. E. Zhukovskiy, “Application of methods of ordinary differential equations to global inverse function theorems”, *Differential Equations*, **55**:4 (2019), 437–448.

- [4] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970; англ. пер.: P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York, 1970.
- [5] А. Ф. Филиппов, *Введение в теорию дифференциальных уравнений*, КомКнига, М., 2007. [A. F. Filippov, *Introduction to the Theory of Differential Equations*, KomKniga, Moscow, 2007 (in Russian)].
- [6] Дж. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М, 1975; англ. пер.: J. Ortega, W. Rheiboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York, 1970.

Информация об авторах

Жуковская Зухра Тагировна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zuxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Жуковский Сергей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Жуковский Сергей Евгеньевич
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 12 сентября 2019 г.
Поступила после рецензирования 18 ноября 2019 г.
Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

Information about the authors

Zukhra T. Zhukovskaya, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: zuxra2@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4595-6685>

Sergey E. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, the Russian Federation. E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2686-4654>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Sergey E. Zhukovskiy
E-mail: s-e-zhuk@yandex.ru

Received 12 September 2019
Reviewed 18 November 2019
Accepted for press 29 November 2019

© Жуковский Е.С., Мунембе Ж.П., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-384-392

УДК 515.126.83, 517.988.5

О неявной и обратной многозначных функциях в топологических пространствах

Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ¹, Жоао Пауло МУНЕМБЕ²¹ ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33² Университет Эдуардо Мондлане
CP 257, Мозамбик, г. Мапуту, Площадь 25 июня

On the implicit and inverse many-valued functions in topological spaces

Evgeny S. ZHUKOVSKIY¹, Joao Paulo MUNEMBE²¹ Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation² Eduardo Mondlane University
Praca 25 de Junho, Maputo CP. 257, Mozambique

Аннотация. Предлагаются условия непрерывности действующих в топологических пространствах неявного многозначного отображения и обратного многозначного отображения. Для заданных отображений $f : T \times X \rightarrow Y$, $y : T \rightarrow Y$, где T, X, Y — топологические пространства, пространство Y хаусдорфово, рассматривается уравнение

$$f(t, x) = y(t)$$

с параметром $t \in T$ относительно неизвестного $x \in X$. Предполагается, что для некоторого многозначного отображения $U : T \rightrightarrows X$ при всех $t \in T$ выполнено включение $f(t, U(t)) \ni y(t)$. Определяется неявное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$, которое сопоставляет каждому значению параметра $t \in T$ множество решений $x(t) \in U(t)$ данного уравнения. Доказано, что $\mathfrak{R}_U$ полунепрерывно сверху в точке $t_0 \in T$, если выполнены следующие условия: при любом $x \in X$ отображение f непрерывно в точке (t_0, x) , отображение y непрерывно в точке t_0 , многозначное отображение U полунепрерывно сверху в точке t_0 и множество $U(t_0) \subset X$ компактно. Если дополнительно, при значении параметра t_0 решение уравнения единственно, то отображение $\mathfrak{R}_U$ непрерывно в точке t_0 и любое сечение этого отображения также непрерывно в точке t_0 . Перечисленные результаты применены к исследованию многозначного обратного отображения. Именно, для заданного отображения $g : X \rightarrow T$ рассмотрено уравнение $g(x) = y$ относительно неизвестного $x \in X$. Получены условия полунепрерывности сверху и непрерывности отображения $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$, $\mathfrak{V}_U(t) = \{x \in U(t) : g(x) = t\}$, $t \in T$.

Ключевые слова: неявная функция; обратная функция; многозначное отображение; полунепрерывность сверху; параметр

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00553-а, № 17-41-680975-р_а), Министерства образования и науки РФ (проект № 3.8515.2017/8.9)

и UEM-SIDA 2017-2022 (Подпрограмма № 1.4.2: Наращивание потенциала в математике, статистике и ее приложениях).

Для цитирования: Жуковский Е.С., Мунембе Ж.П. О неявной и обратной многозначных функциях в топологических пространствах // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 384–392. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-384-392.

Abstract. The conditions of continuity of the implicit set-valued map and the inverse set-valued map acting in topological spaces are proposed. For given mappings $f : T \times X \rightarrow Y$, $y : T \rightarrow Y$, where T, X, Y are topological spaces, the space Y is Hausdorff, the equation

$$f(t, x) = y(t)$$

with the parameter $t \in T$ relative to the unknown $x \in X$ is considered. It is assumed that for some multi-valued map $U : T \rightrightarrows X$ for all $t \in T$ the inclusion $f(t, U(t)) \ni y(t)$ is satisfied. An implicit mapping $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$, which associates with each value of the parameter $t \in T$ the set of solutions $x(t) \in U(t)$ of this equation. It is proved that $\mathfrak{R}_U$ is upper semicontinuous at the point $t_0 \in T$, if the following conditions are satisfied: for any $x \in X$ the map f is continuous at (t_0, x) , the map y is continuous at t_0 , a multi-valued map U is upper semicontinuous at the point t_0 and the set $U(t_0) \subset X$ is compact. If, in addition, with the value of the parameter t_0 , the solution to the equation is unique, then the map $\mathfrak{R}_U$ is continuous at t_0 and any section of this map is also continuous at t_0 . The listed results are applied to the study of a multi-valued inverse mapping. Namely, for a given map $g : X \rightarrow T$ we consider the equation $g(x) = t$ with respect to the unknown $x \in X$. We obtain conditions for upper semicontinuity and continuity of the map $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$, $\mathfrak{V}_U(t) = \{x \in U(t) : g(x) = t\}$, $t \in T$.

Keywords: implicit function; inverse function; multi-valued mapping; upper semicontinuity; parameter

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects no. 17-01-00553-a, no. 17-41-680975-p_a), Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 3.8515.2017/8.9) and UEM-SIDA 2017-2022 (Subprogramme № 1.4.2: Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications).

For citation: Zhukovskiy E.S., Munembe M.J. O neyavnoj i obratnoj mnogoznachnykh funktsiyah v topologicheskikh prostranstvakh [On the implicit and inverse many-valued functions in topological spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 384–392. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-384-392. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Пусть заданы непустые множества T, X, Y и определены отображения $f : T \times X \rightarrow Y$, $y : T \rightarrow Y$. Рассмотрим уравнение

$$f(t, x) = y(t) \tag{0.1}$$

с параметром $t \in T$ относительно неизвестного $x \in X$. Пусть для любого $t \in T$ решение $x \in X$ уравнения (0.1) существует. Отображение, сопоставляющее точке $t \in T$ множество решений этого уравнения, называют (см. [1, п. 1.1.10]) *неявным отображением* или *неявной функцией*. Исследованию условий существования и свойств неявной функции посвящена многочисленная литература, эти результаты находят применения в анализе, исследовании различных классов функциональных уравнений и включений, в приложениях (см, например, книгу [2], статью [3] и имеющуюся там библиографию).

В частном случае, когда $Y = T$, $y(t) \equiv t$ и значение $f(t, x)$ не зависит от t , то есть $f(t, x) \equiv g(x)$, уравнение (0.1) принимает вид

$$g(x) = t. \quad (0.2)$$

Отображение, сопоставляющее точке $t \in T$ множество решений уравнения (0.2), называют *обратным отображением* или *обратной функцией*. Известные результаты по теории обратных функций представлены, например, в книге [4], некоторые их уточнения см. в [5].

В большинстве исследований неявная и обратная функция рассматриваются в предположении, что пространства X, Y являются банаховыми, а в ряде задач — конечномерными векторными пространствами. Здесь мы предполагаем, что пространства T, X, Y топологические, и исследуем свойства непрерывности многозначных неявного и обратного отображений.

1. Постановка задачи

Пусть заданы топологические пространства T, X, Y . В произведении $X \times T$ полагаем, что задана стандартная топология, т. е. открытым является объединение произведений открытых множеств из X и T . Пусть определены отображения $g : T \rightarrow Y$, $f : T \times X \rightarrow Y$, $y : T \rightarrow Y$ и многозначное отображение $U : T \rightrightarrows X$ (под многозначным отображением понимается отображение, сопоставляющее каждому аргументу непустое множество).

Напомним определение свойств полунепрерывности сверху и снизу многозначного отображения (подробнее сведения о полунепрерывных отображениях см., например, в [1, п. 1.2.2], [6, §2.3]). Многозначное отображение U называют *полунепрерывным сверху* в точке $t_0 \in T$, если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $U(t_0) \subset V$, существует окрестность $\mathcal{B}_T(t_0)$ точки t_0 , для которой выполнено соотношение

$$\forall t \in \mathcal{B}_T(t_0) \quad U(t) \subset V.$$

Многозначное отображение U называют *полунепрерывным снизу* в точке $t_0 \in T$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $U(t_0) \cap V \neq \emptyset$, существует окрестность $\mathcal{B}_T(t_0)$ точки t_0 , для которой выполнено соотношение

$$\forall t \in \mathcal{B}_T(t_0) \quad U(t) \cap V \neq \emptyset.$$

Отображение, полунепрерывное сверху и снизу в точке t_0 , называют *непрерывным в этой точке*. Если U является полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным) в любой точке, то говорят, что данное многозначное отображение *полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу, непрерывно)*.

Рассмотрим уравнение (0.1). Будем предполагать, что при каждом значении параметра $t \in T$ уравнение (0.1) имеет решение, принадлежащее множеству $U(t)$, то есть справедливо соотношение

$$\forall t \in T \quad f(t, U(t)) \ni y(t). \quad (1.1)$$

Определим неявное отображение, то есть многозначное отображение

$$\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X, \quad \mathfrak{R}_U(t) = \{x \in U(t) : f(t, x) = y(t)\} \quad \forall t \in T. \quad (1.2)$$

Нас будут интересовать условия полунепрерывности сверху, снизу и непрерывности этого отображения.

Также мы рассмотрим уравнение (0.2) в предположении, что

$$\forall t \in T \quad g(U(t)) \ni t. \quad (1.3)$$

Нас будут интересовать свойства обратного отображения — многозначного отображения, определяемого соотношением

$$\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X, \quad \mathfrak{R}_U(t) = \{x \in U(t) : g(x) = t\} \quad \forall t \in T. \quad (1.4)$$

2. Неявная функция

Везде далее предполагаем, что топологическое пространство Y является хаусдорфовым. Пусть задана точка $t_0 \in T$. Сформулируем условия полунепрерывности сверху в этой точке неявного отображения.

Теорема 2.1. Пусть выполнены следующие условия: при любом $x \in X$ отображение $f : T \times X \rightarrow Y$ непрерывно в точке (t_0, x) , отображение $y : T \rightarrow Y$ непрерывно в точке t_0 , многозначное отображение $U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке t_0 , множество $U(t_0) \subset X$ компактно и имеет место включение (1.1).

Тогда определенное формулой (1.2) многозначное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке t_0 и множество $\mathfrak{R}_U(t_0)$ замкнуто в пространстве X .

Доказательство. Пусть для направления $\{x_\alpha\}$, где $x_\alpha \in \mathfrak{R}_U(t_0)$ (α — элемент некоторого упорядоченного, направленного по возрастанию множества A) имеет место сходимость по Муру — Смиту $x_\alpha \rightarrow x \in X$ (подробнее об используемых в данном доказательстве топологических понятиях в терминах сходимости направлений см., например, [7, гл. I, п. 2.6, 2.7]). Тогда $(x_\alpha, t_0) \rightarrow (x, t_0) \in T \times X$ и, в силу непрерывности отображения f в точке (t_0, x) , имеем

$$y(t_0) = f(t_0, x_\alpha) \rightarrow f(t_0, x).$$

Поскольку в хаусдорфовом пространстве Y предел единственный, получаем

$$y(t_0) = f(t_0, x).$$

Таким образом, множество $\mathfrak{R}_U(t_0)$ замкнуто в X .

Пусть многозначное отображение $\mathfrak{R}_U$ не является полунепрерывным сверху в точке t_0 . Тогда существует открытое множество $\tilde{V} \subset X$ такое, что $\mathfrak{R}_U(t_0) \subset \tilde{V}$ и в любой окрестности $\mathcal{B}_T(t_0)$ точки t_0 находится точка $t \in \mathcal{B}_T(t_0)$, для которой существует $x \in \mathfrak{R}_U(t)$, $x \notin \tilde{V}$.

Определим множество $\tilde{U}^0 = U(t_0) \setminus \mathfrak{R}_U(t_0)$. Пусть элементами множества A являются наборы произвольных окрестностей $\mathcal{B}_T(t_0)$ и $\mathcal{B}_X(x)$, $x \in \tilde{U}^0$. Определим на множестве A порядок, полагая для его элементов $\alpha, \alpha' \in A$,

$$\alpha = \{\mathcal{B}_T^\alpha(t_0), \mathcal{B}_X^\alpha(x) \forall x \in \tilde{U}^0\}, \quad \alpha' = \{\mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0), \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x) \forall x \in \tilde{U}^0\}$$

выполненным неравенство $\alpha \succeq \alpha'$, если $\mathcal{B}_T^\alpha(t_0) \subset \mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0)$ и $\mathcal{B}_X^\alpha(x) \subset \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x)$ при любом $x \in \tilde{U}^0$. Множество A является упорядоченным по возрастанию, так как для любых $\alpha, \alpha' \in A$ можем определить

$$\beta = \{\mathcal{B}_T^\alpha(t_0) \cap \mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0), \mathcal{B}_X^\alpha(x) \cap \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x) \mid \forall x \in \tilde{U}^0\},$$

для которого выполнено $\beta \succeq \alpha$, $\beta \succeq \alpha'$.

Определим направления $\{\tau_\alpha\} \subset T$, $\{v_\alpha\} \subset X$, $\{u_\alpha\} \subset X$ ($\alpha \in A$) следующим образом. Для произвольного $\alpha = \{\mathcal{B}_T^\alpha(t_0), \mathcal{B}_X^\alpha(x) \mid \forall x \in \tilde{U}\} \in A$ обозначим

$$V^\alpha = \left(\bigcup_{x \in \tilde{U}^0} \mathcal{B}_X^\alpha(x) \right) \cup \tilde{V}.$$

Множество V^α открыто и $U(t_0) \subset V^\alpha$. В силу полунепрерывности сверху в точке t_0 отображения U существует окрестность $\mathfrak{V}^\alpha \subset \mathcal{B}_T^\alpha(t_0)$ точки t_0 такая, что $U(t) \subset V^\alpha$ при всех $t \in \mathfrak{V}^\alpha$. Кроме того, как показано выше, существует $\tau_\alpha \in \mathfrak{V}^\alpha$ и существует $v_\alpha \in \mathfrak{R}_U(\tau_\alpha)$ такой, что $v_\alpha \notin \tilde{V}$. Но так как $v_\alpha \in V^\alpha$, для некоторого $u_\alpha \in \tilde{U}^0$ выполнено $v_\alpha \in \mathcal{B}_X^\alpha(u_\alpha)$. Итак, направления $\{\tau_\alpha\}, \{v_\alpha\}, \{u_\alpha\}$ определены.

В силу компактности множества $U(t_0)$ направление $\{u_\alpha\}$ имеет предельную точку $u \in U(t_0)$, то есть направление $\{u_\alpha\}$ часто встречается с любой окрестностью $\mathcal{B}_X(u)$ точки u :

$$\forall \alpha \in A \exists \alpha' = \{\mathcal{B}_T^{\alpha'}(t_0), \mathcal{B}_X^{\alpha'}(x) \mid \forall x \in \tilde{U}\} \in A \quad \alpha' \succeq \alpha, \quad u_{\alpha'} \in \mathcal{B}_X(u).$$

Покажем, что направление $\{v_\alpha\}$ часто встречается с любой окрестностью точки u . Для произвольной окрестности $\mathcal{B}_X(u)$ точки u определим $\alpha_0 \in A$, для которого $\mathcal{B}_X^{\alpha_0}(x) \subset \mathcal{B}_X(u)$ при всех $x \in \mathcal{B}_X(u)$. Существует $\alpha' \succeq \alpha_0$ такое, что $u_{\alpha'} \in \mathcal{B}_X(u)$. По определению направлений $\{\tau_\alpha\}, \{v_\alpha\}, \{u_\alpha\}$ имеем

$$v_{\alpha'} \in \mathfrak{R}_U(\tau_{\alpha'}), \quad v_{\alpha'} \in \mathcal{B}_X^{\alpha'}(u_{\alpha'}) \subset \mathcal{B}_X^{\alpha_0}(u_{\alpha'}) \subset \mathcal{B}_X(u).$$

Таким образом, существует поднаправление $\{\tilde{v}_\delta, \delta \in D\}$, сходящееся к u . Определим соответствующее поднаправление $\{\tilde{\tau}_\delta, \delta \in D\}$ направления $\{\tau_\alpha\}$ следующим образом. Пусть $\alpha_0 = \{\mathcal{B}_T^{\alpha_0}(t_0) = T, \mathcal{B}_X^{\alpha_0}(x) = X \mid \forall x \in \tilde{U}\} \in A$. Существует такой $\delta_0 \in D$, что для любого $\delta \succeq \delta_0$ найдется $\alpha \in A$, $\alpha \succeq \alpha_0$, удовлетворяющий соотношению $\tilde{v}_\delta = v_\alpha$. Для таких же индексов δ, α положим $\tilde{\tau}_\delta = \tau_\alpha$. Так как направление $\{\tau_\alpha\}$ сходится к t_0 , то его соответствующее поднаправление $\{\tilde{\tau}_\delta, \delta \in D\}$ сходится к t_0 . Из равенства $f(\tilde{\tau}_\delta, \tilde{v}_\delta) = y(\tilde{\tau}_\delta)$ вследствие непрерывности отображений f и y и единственности предела в хаусдорфовом пространстве Y получаем $f(t_0, u) = y(t_0)$, то есть $u \in \mathfrak{R}_U(t_0)$. Однако, так как $\tilde{v}_\delta \notin \tilde{V}$ при любом $\delta \in D$, должно выполняться соотношение $u \notin \tilde{V}$, которое противоречит включению $u \in \mathfrak{R}_U(t_0)$. Итак доказано, что многозначное отображение $\mathfrak{R}_U$ полунепрерывно сверху в точке t_0 . $\square$

Следствие 2.1. Пусть выполнены следующие условия: отображения $f : T \times X \rightarrow Y$ и $y : X \rightarrow Y$ непрерывны, многозначное отображение $U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху, при любом $t \in T$ множество $U(t) \subset X$ компактно и имеет место соотношение (1.1).

Тогда определенное формулой (1.2) многозначное отображение $\mathfrak{R}$ полунепрерывно сверху и для всех $t \in T$ имеет образами замкнутые множества $\mathfrak{R}(t)$.

Доказательство. В условиях этого утверждения выполнены предположения теоремы 2.1 для любой точки $t_0 \in T$. $\square$

Следствие 2.2. Пусть пространство X компактно и выполнены условия: отображения $f : T \times X \rightarrow Y$ и $y : X \rightarrow Y$ непрерывны и при любом $t \in T$ выполнено соотношение $f(t, X) \ni y(t)$.

Тогда многозначное отображение

$$\mathfrak{R} : T \rightrightarrows X, \quad \mathfrak{R}(t) = \{x \in X : f(t, x) = y(t)\} \quad \forall t \in T,$$

полунепрерывно сверху и для всех $t \in T$ имеет образами замкнутые множества $\mathfrak{R}(t)$.

Доказательство вытекает из следствия 2.1, если положить $U(t) = X$ при любом $t \in T$. $\square$

Следующий пример иллюстрирует существенность условия компактности множества $U(t)$ в теореме 2.1.

Пример 2.1. Пусть $T = X = Y = \mathbb{R}$ (полагаем, что в $\mathbb{R}$ задана “обычная” топология). Для любых $t, x \in \mathbb{R}$ положим $f(t, x) = (tx - 1)x$, $y(t) = 0$, $U(t) = \mathbb{R}$. Функции f, y непрерывны, многозначное отображение U непрерывно (следовательно, полунепрерывно сверху). Таким образом, справедливы все условия теоремы 2.1 кроме компактности значений $U(t)$ многозначного отображения U . Множеством решений уравнения (0.1) является

$$\mathfrak{R}(t) = \{0, t^{-1}\} \text{ при } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathfrak{R}(t) = \{0\} \text{ при } t = 0.$$

Но это многозначное отображение $\mathfrak{R} : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ не является полунепрерывным сверху в точке $t = 0$.

Аналогичное теореме 2.1 утверждение о полунепрерывности снизу многозначного отображения $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ в случае полунепрерывности снизу и даже непрерывности отображения $U : T \rightrightarrows X$ оказывается неверным. Приведем соответствующий пример.

Пример 2.2. Пусть $T = [0, 1]$, $X = Y = \mathbb{R}$ (с “обычной” топологией), функции $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, и многозначное отображение $U : [0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ заданы соотношениями: $f(t, x) = x + t$ при $x \in (-\infty, 1]$ и $f(t, x) = 2 - x + t$ при $x \in (1, \infty)$, $y(t) \equiv 0$, $U(t) \equiv [0, 3]$. Очевидно, функции f, y непрерывны, многозначное отображение U непрерывно и имеет компактные значения. В данном случае множеством решений уравнения (0.1) является

$$\mathfrak{R}_U(t) = \{2 + t\} \text{ при } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathfrak{R}_U(t) = \{0, 2 + t\} \text{ при } t = 0.$$

Это многозначное отображение не является полунепрерывным снизу в точке $t = 0$.

Если значением многозначного отображения $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ в точке t_0 является одноэлементное множество, то свойства полунепрерывности сверху и непрерывности в точке t_0 равносильны. Кроме того, если множество $\mathfrak{R}(t_0)$ состоит лишь из одного элемента, то любое сечение (то есть отображение $\kappa : T \rightarrow X$ такое, что $\kappa(t) \in \mathfrak{R}(t)$ при всех $t \in T$) полунепрерывного в точке t_0 многозначного отображения $\mathfrak{R}_U$ является отображением, непрерывным в этой точке (что прямо следует из определения полунепрерывности сверху). Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.1 и справедливо соотношение*

$$\forall x, x' \in U(t_0) \quad f(t_0, x) = y(t_0), \quad x' \neq x \Rightarrow f(t_0, x') \neq y(t_0). \quad (2.1)$$

Тогда определенное формулой (1.2) многозначное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ непрерывно в точке t_0 и множество $\mathfrak{R}_U(t_0)$ состоит ровно из одного элемента. Кроме того, любое сечение многозначного отображения $\mathfrak{R}_U$ будет отображением, непрерывным в точке t_0 .

Заметим, что условие (2.1) очевидно выполнено в случае, когда сужение отображения $f(t_0, \cdot)$ на множество $U(t_0)$ инъективно. Соответственно, если при любом $t \in T$ выполнены предположения теоремы 2.1 и, кроме того, сужение отображения $f(t, \cdot)$ на множество $U(t)$ является инъективным, то “однозначное” неявное отображение

$$t \in T \mapsto x \in U(t) : f(t, x) = y(t)$$

(как отображение $T \rightarrow X$) будет непрерывным.

3. Обратная функция

Поскольку уравнение (0.2) является частным случаем уравнения (0.1), из результатов о неявной функции можно получить соответствующие утверждения об обратной функции.

Будем предполагать, что топологическое пространство T является хаусдорфовым.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены следующие условия: многозначное отображение $U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке $t_0 \in T$, множество $U(t_0) \subset X$ компактно, отображение $g : X \rightarrow T$ непрерывно и выполнено включение (1.3).*

Тогда определенное формулой (1.4) многозначное отображение $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$ полунепрерывно сверху в точке t_0 и множество $\mathfrak{V}_U(t_0)$ замкнуто в пространстве X .

Доказательство. Это утверждение вытекает из теоремы 2.1, если положить $Y = T$, $y(t) \equiv t$ и $f(t, x) \equiv g(x)$. Как отмечено выше, уравнение (0.1) тогда принимает вид (0.2), а многозначное отображение $\mathfrak{R}_U : T \rightrightarrows X$ “превращается” в отображение $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$. $\square$

Используя приведенные выше сведения об отображениях, имеющих в заданной точке значением одноэлементное множество, сформулируем условия непрерывности обратной функции.

Следствие 3.4. Пусть выполнены предположения теоремы 3.2 и справедливо соотношение

$$\forall x, x' \in U(t_0) \quad g(x) = t_0, \quad x' \neq x \Rightarrow g(x') \neq t_0. \quad (3.1)$$

Тогда определенное формулой (1.4) многозначное отображение $\mathfrak{V}_U : T \rightrightarrows X$ непрерывно в точке t_0 и множество $\mathfrak{V}_U(t_0)$ состоит ровно из одного элемента. Кроме того, любое сечение многозначного отображения $\mathfrak{V}_U$ будет отображением, непрерывным в точке t_0 .

Условие (3.1) очевидно выполнено в случае, когда сужение отображения g на множество $U(t_0)$ инъективно. Соответственно, если при любом $t \in T$ выполнены предположения теоремы 3.2 и, кроме того, сужение отображения g на множество $U(t)$ является инъективным, то “однозначное” неявное отображение

$$t \in T \mapsto x \in U(t) : g(x) = t$$

(как отображение $T \rightarrow X$) будет непрерывным.

Список литературы

- [1] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, 2-е изд., ЛИБРОКОМ, М., 2011, 224 с. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gelman, A. D. Mishkis, V. V. Obuhovskii, *Vvedenie v Teoriyu Mnogoznachnikh Otobrazenii i Differentsialnih Vklyuchenii*, 2 ed., LIBROKOM, Moscow, 2011 (In Russian), 224 pp.]
- [2] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979. [V. M. Alekseev, V. M. Tihomirov, S. V. Fomin, *Optimal'noe Upravlenie*, Nauka, Moscow, 1979 (In Russian)].
- [3] А. В. Арутюнов, “Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:2 (2006), 205–215; англ. пер.: A. V. Arutyunov, “An implicit function theorem without a priori assumptions about normality”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:2 (2006), 195–205.
- [4] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mappings. A View from Variational Analysis*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, New York, 2009.
- [5] С. Е. Жуковский, Ч. Т. Нгок, “Существование обратной функции в окрестности нерегулярного значения”, *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **24**:126 (2019), 141–149 [crossref](#). [S. E. Zhukovskiy, T. T. Ngok, “Existence of inverse function in a neighbourhood of a critical value”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **24**:126 (2019), 141–149 (In Russian) [crossref](#)].
- [6] А. В. Арутюнов, *Лекции по выпуклому и многозначному анализу*, Физматлит, М., 2014. [A. V. Arutyunov, *Lectures on convex and multivalued analysis*, Fizmatlit, Moscow, 2014 (In Russian)].
- [7] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984, 752 с. [L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Funktsional'nyy Analiz*, Nauka, Moscow, 1984 (In Russian), 752 pp.]

Информация об авторах

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Мунембе Жоао Пауло, заместитель декана по последипломному образованию. Университет Эдуардо Мондлане, Мапуту, Мозамбик. E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0380-6734>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Жуковский Евгений Семенович
E-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила в редакцию 17 сентября 2019 г.
Поступила после рецензирования 14 ноября 2019 г.
Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

Information about the authors

Evgeny S. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4460-7608>

Joao Paulo Munembe, Deputy Deen for Postgraduate Studies. Eduardo Mondlane University, Maputo, Mozambique. E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0380-6734>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Evgeny S. Zhukovskiy
E-mail: zukovskys@mail.ru

Received 17 September 2019
Reviewed 14 November 2019
Accepted for press 29 November 2019

© Литвинов Г.Л., Родионов А.Я., Сергеев С.Н., Соболевский А.Н., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-393-431

УДК 519.6, 519.85

Универсальные алгоритмы решения дискретных стационарных уравнений Беллмана

Григорий Лазаревич ЛИТВИНОВ¹, Анатолий Яковлевич РОДИОНОВ²,
Сергей СЕРГЕЕВ³, Андрей Николаевич СОБОЛЕВСКИЙ¹

¹ ФГБУН «Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук»
127051, Российская Федерация, г. Москва, Большой Каретный переулок, 19

² Московский центр непрерывного математического образования
119002, Российская Федерация, г. Москва, Большой Власьевский переулок, 11

³ Университет Бирмингема, Школа Математики
B15 2TT Великобритания, г. Бирмингем, Здание Ватсона

Universal algorithms for solving discrete stationary Bellman equations

Grigory L. LITVINOV¹, Anatoliy Ya. RODIONOV²,
Serge SERGEEV³, Andrei N. SOBOLEVSKY¹

¹ Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences
19 Bolshoy Karetny Pereulok, Moscow 127051, Russian Federation

² Moscow Center for Continuous Mathematical Education
11 Bolshoy Vasil'evsky Pereulok, Moscow 119002, Russian Federation

³ University of Birmingham, School of Mathematics
Watson Building, Birmingham B15 2TT, United Kingdom

Аннотация. В настоящей работе исследуются алгоритмы решения дискретных стационарных (или) матричных уравнений Беллмана над полукольцами, в особенности над тропическими и идемпотентными полукольцами. Также приведены оригинальные алгоритмы, приложения и программная реализация.

Ключевые слова: тропическая линейная алгебра; идемпотентные полукольца; матричные уравнения Беллмана; универсальные алгоритмы

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 11-01-93106_a, № 12-01-00886_a), грантом EPSRC RRAH15735.

Для цитирования: Литвинов Г.Л., Родионов А.Я., Сергеев С.Н., Соболевский А.Н. Универсальные алгоритмы решения дискретных стационарных уравнений Беллмана // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 393–431. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-393-431.

Abstract. This paper investigates algorithms for solving discrete stationary (or) matrix Bellman equations over semirings, in particular over tropical and idempotent semirings. Also there are presented some original algorithms, applications and programmed realization.

Keywords: tropical linear algebra; idempotent semirings; matrix Bellman equations; universal algorithms

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Fund for Basic Research (projects no. 11-01-93106_a, 12-01-00886_a), grant EPSRC RRAH15735.

For citation: Litvinov G.L., Rodionov A.Ya., Sergeev C.N., Sobolevskiy A.N. Universal'nye algoritmy resheniya diskretnykh statsionarnykh uravnenij Bellmana [Universal algorithms for solving discrete stationary Bellman equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 393–431. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-393-431. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Вычислительные алгоритмы строятся на основе некоторых простых операций. Эти операции манипулируют данными, которые описывают «числа». Эти «числа» являются элементами «числового домена» (numerical domain), то есть такого математического объекта, как поле вещественных чисел, кольца целых чисел, различные полукольца и т. д.

В практических задачах числовые домены заменяются их компьютерными представлениями, т. е. элементами конкретных конечных моделей этих доменов. Примерами моделей, которые удобно использовать для компьютерного представления вещественных чисел, являются различные модификации арифметики с плавающей запятой, приближенная арифметика рациональных чисел [37], интервальная арифметика и другие. Отличие между математическими объектами («идеальными» числами) и их конечными моделями (машинными представлениями) выражается в вычислительных ошибках (например, при округлении).

Алгоритм называется *универсальным*, если он не зависит от конкретного числового домена и/или его компьютерного представления [32, 33, 36, 40]. Типичным примером универсального алгоритма является вычисление скалярного произведения (x, y) векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ по формуле $(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$. Этот алгоритм (формула) не зависит от конкретного домена и его машинной реализации; формула имеет смысл для любого полукольца. Очевидно, что один алгоритм может быть более универсальным, чем другой. Например, простейшая формула Ньютона–Котеса (формула прямоугольников) является самым универсальным алгоритмом численного интегрирования. В частности, эта формула верна также для идемпотентного интегрирования (т. е. над любым идемпотентным полукольцом, см., например, [6, 31]). Другие формулы интегрирования (например, формула трапеций или формула Симпсона) не зависят от машинной арифметики и могут использоваться (например, в итерационной форме) для вычислений с произвольной точностью. С другой стороны, алгоритмы, основанные на формулах Гаусса–Якоби, созданы для вычислений с заданной точностью: они содержат константы (коэффициенты этих формул), определенные с конечной точностью (конечно, алгоритмы такого типа можно сделать более универсальными, включив процедуры вычисления констант, однако, это влечет усложнение алгоритмов).

Современные достижения в математике и разработке программного обеспечения позволяют рассматривать численные алгоритмы и их классификацию с новой точки зрения. Обычные численные алгоритмы ориентированы на программную (или аппаратную) реализацию на основе арифметики с плавающей или фиксированной запятой. Тем не менее, часто желательно выполнять вычисления с изменяющейся (и произвольной)

точностью. Для этого от алгоритма требуется независимость от точности вычислений и от особенностей машинного представления чисел. На самом деле многие алгоритмы также не зависят не только от машинного представления чисел, но и от конкретных математических (алгебраических) операций над данными. В этом случае операции сами по себе могут рассматриваться как переменные. Такие алгоритмы реализуются в виде *обобщенных программ*, написанных на основе абстрактных типов данных, которые определяются пользователем в дополнение ко встроенным в язык типам данных. Соответствующие программные средства появились сначала в языке Симула-67, но современные объектно-ориентированные языки (такие как C++, см., например, [41, 47]) более удобны для обобщенного программирования. Алгоритмы компьютерной алгебры, используемые в системах Mathematica, Maple, REDUCE и других, также высоко универсальны.

Другой формой алгоритмов являются итерационные алгоритмы для решения дифференциальных уравнений (например, методы Эйлера, Эйлера–Коши, Рунге–Кутты, Адамса, несколько вариантов метода разностных приближений и подобные), методы вычисления элементарных и некоторых специальных функций, основанных на разложении в ряды Тейлора и на непрерывные дроби (приближения Паде). Эти алгоритмы не зависят от машинного представления чисел.

Понятие обобщенных программ было введено многими авторами: например, в [30] такие программы называются «программными схемами». В настоящей статье мы обсудим универсальные алгоритмы, реализованные в виде обобщенных программ, и их особые возможности. Эта статья тесно связана с работами [8, 31–33, 35, 36, 40], в которых определяется понятие универсального алгоритма, и обсуждается программная и аппаратная реализации таких алгоритмов в связи с задачами идемпотентной математики, см., например, [6, 39, 42, 53, 54].

Так называемый идемпотентный принцип соответствия (см. [32, 33]), связывающий идемпотентную математику с обычной математикой над полями, будет рассмотрен ниже. В двух словах, существует соответствие между интересными, полезными и важными конструкциями и результатами над полем вещественных (или комплексных) чисел и похожими конструкциями над идемпотентными полукольцами. Это соответствие может быть сформулировано в духе хорошо известного *принципа соответствия Н. Бора* в квантовой механике: на самом деле, оба принципа тесно связаны (см. [31–33]). В известном смысле, традиционную математику над числовыми полями можно рассматривать как «квантовую» теорию, в то время как идемпотентную математику можно рассматривать как «классическую» тень (или двойник) традиционной. Важно, что идемпотентный принцип соответствия верен для алгоритмов, компьютерных программ и их аппаратных реализаций.

В квантовой механике *принцип суперпозиции* означает, что уравнение Шрёдингера (основное уравнение теории) линейно. Подобным образом, в идемпотентной математике принцип суперпозиции, сформулированный В. П. Масловым, означает, что некоторые важные и основные задачи и уравнения, которые являются нелинейными в обычном смысле (например, уравнение Гамильтона–Якоби, одно из основных уравнений классической механики, которое также появляется во многих задачах оптимизации, или уравнение Беллмана и его разновидности и обобщения), могут рассматриваться как

линейные над подходящими идемпотентными полукольцами, см. [4, 5, 31].

Заметим, что численные алгоритмы для бесконечномерных линейных задач над идемпотентными полукольцами (например, идемпотентное интегрирование, интегральные операторы и преобразования, уравнения Гамильтона–Якоби и обобщенные уравнения Беллмана) имеют дело с соответствующими конечномерными приближениями. Следовательно, идемпотентная линейная алгебра является основой идемпотентного численного анализа и, в особенности, *теории дискретной оптимизации*.

Б. А. Карре [18, 19] (см. также [24–26]) использовал идемпотентную линейную алгебру, чтобы показать, что различные задачи оптимизации для конечных графов могут быть сформулированы единым образом и сведены к решению дискретных матричных уравнений Беллмана, то есть некоторых систем линейных алгебраических уравнений над идемпотентными полукольцами. Он также обобщил основные алгоритмы вычислительной линейной алгебры на идемпотентный случай и показал, что некоторые из них совпадают с алгоритмами, разработанными ранее для решения задач оптимизации. Например, метод Беллмана решения задачи нахождения кратчайшего пути соответствует разновидности метода Якоби решения системы линейных уравнений, тогда как алгоритм Форда соответствует методу Гаусса–Зейделя. Уравнения Беллмана являются основной темой данной статьи, а идеи Карре используются для получения новых универсальных алгоритмов. Подчеркнем, что универсальные алгоритмы, описанные в данной статье, могут быть интерпретированы как демонстрация принципа идемпотентной суперпозиции и идемпотентного принципа соответствия между алгоритмами линейной алгебры и соответствующими задачами оптимизации на графах.

Заметим, что многие алгоритмы решения матричных уравнений Беллмана можно найти в [8, 9, 13, 18, 19, 21, 24, 26, 35, 36, 48]. Другие задачи тропической линейной алгебры рассмотрены, например, в [16].

Также мы вкратце обсудим интервальный анализ над идемпотентными и положительными полукольцами. Идемпотентный интервальный анализ возник в работах [3, 10, 39], где он применялся к матричному уравнению Беллмана. Позднее различные задачи, возникающие в интервальной идемпотентной линейной алгебре, были рассмотрены, например, в работах [20, 22, 28, 44, 45]. Важно заметить, что интервалы над идемпотентными полукольцами образуют новое идемпотентное полукольцо. Следовательно, универсальные алгоритмы могут применяться к элементам этого нового полукольца и порождают интервальное расширение исходных алгоритмов.

Данная статья посвящена программным реализациям универсальных алгоритмов решения матричных уравнений Беллмана над полукольцами. Раздел 1. содержит введение в математику полуколец и, особенно, в тропическую (идемпотентную) математику. В разделе 2. мы описываем несколько хорошо известных и новых универсальных алгоритмов линейной алгебры над полукольцами, связанных с дискретным матричным уравнением Беллмана и алгебраической задачей о кратчайшем пути. Эти алгоритмы тесно связаны с их прототипами в традиционной линейной алгебре, описанными, например, в знаменитой книге Дж. Голуба и Ч. Ван Лоуна [1], которая служит основным источником таких прототипов. Следуя стилю [1], мы записываем их на языке MATLAB. Опыт программной реализации универсальных алгоритмов и дальнейшие перспективы их развития также рассматриваются.

1. Математика полуколец

1.1. Основные определения

Широкий класс универсальных алгоритмов связан с понятием полукольца. Напомним соответствующее определение (см., например, [23]). Рассмотрим множество S , снабженное двумя ассоциативными операциями: *сложением* $\oplus$ и *умножением* $\odot$, такими, что сложение коммутативно, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, $\mathbf{0}$ (соответственно $\mathbf{1}$) нейтральный элемент по сложению (соответственно, по умножению), $\mathbf{0} \odot x = x \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ для всех $x \in S$, и $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$. Пусть полукольцо S частично упорядочено таким отношением $\preceq$, что $\mathbf{0}$ — наименьший элемент, и из неравенства $x \preceq y$ следует, что $x \oplus z \preceq y \oplus z$, $x \odot z \preceq y \odot z$ и $z \odot x \preceq z \odot y$ для всех $x, y, z \in S$; в этом случае полукольцо S называется *положительным* (см., например, [23]).

Полукольцо S называется *полуполем*, если каждый его ненулевой элемент обратим.

Полукольцо S называется *идемпотентным*, если $x \oplus x = x$ для всех $x \in S$. В этом случае сложение $\oplus$ задает *канонический частичный порядок* $\preceq$ на полукольце S по правилу: $x \preceq y$ тогда и только тогда, когда $x \oplus y = y$. Любое идемпотентное кольцо положительно относительно этого порядка. Заметим также, что $x \oplus y = \sup\{x, y\}$ относительно канонического порядка. Впоследствии мы полагаем все идемпотентные кольца упорядоченными канонически.

Мы говорим, что положительное (например, идемпотентное) полукольцо S *полно*, если оно полно как упорядоченное множество. Это означает, что для каждого подмножества $T \subset S$ существуют элементы $\sup T \in S$ и $\inf T \in S$.

Самые известные и важные примеры положительных полуколец — это «числовые» полукольца, состоящие из (подмножества) вещественных чисел, упорядоченных обычным линейным порядком $\leq$ на множестве $\mathbf{R}$: полукольцо $\mathbf{R}_+$ с обычными операциями $\oplus = +$, $\odot = \cdot$ и нейтральными элементами $\mathbf{0} = 0$, $\mathbf{1} = 1$, полукольцо $\mathbf{R}_{\max} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ с операциями $\oplus = \max$, $\odot = +$ и нейтральными элементами $\mathbf{0} = -\infty$, $\mathbf{1} = 0$, полукольцо $\hat{\mathbf{R}}_{\max} = \mathbf{R}_{\max} \cup \{\infty\}$, где $x \preceq \infty$, $x \oplus \infty = \infty$ для всех x , $x \odot \infty = \infty \odot x = \infty$, если $x \neq 0$, и $\mathbf{0} \odot \infty = \infty \odot \mathbf{0}$ и полукольцо $S_{\max, \min}^{[a, b]} = [a, b]$, где $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ с операциями $\oplus = \max$, $\odot = \min$ и нейтральными элементами $\mathbf{0} = a$, $\mathbf{1} = b$. Полукольца $\mathbf{R}_{\max}$, $\hat{\mathbf{R}}_{\max}$, и $S_{\max, \min}^{[a, b]}$ идемпотентны. Полукольца $\hat{\mathbf{R}}_{\max}$, $S_{\max, \min}^{[a, b]}$, $\hat{\mathbf{R}}_+ = \mathbf{R}_+ \cup \{\infty\}$ полны как упорядоченные множества. Вспомним, что каждое частично упорядоченное множество может быть вложено в свое пополнение (минимальное полное множество, содержащее исходное). Полукольцо $\mathbf{R}_{\min} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ с операциями $\oplus = \min$ и $\odot = +$ и нейтральными элементами $\mathbf{0} = \infty$, $\mathbf{1} = 0$ изоморфно полукольцу $\mathbf{R}_{\max}$.

Полукольцо $\mathbf{R}_{\max}$ называют *алгеброй макс-плюс*. Полуполя $\mathbf{R}_{\max}$ и $\mathbf{R}_{\min}$ также называют *тропическими алгебрами*. Термин «тропический» впервые появился в [51] для целочисленной версии алгебры макс-плюс, см. также [27, 42, 54].

Обозначим $\text{Mat}_{mn}(S)$ множество всех матриц $A = (a_{ij})$ с m строками и с n столбцами, элементы которых принадлежат полукольцу S . Сумма $A \oplus B$ матриц $A, B \in \text{Mat}_{mn}(S)$ и произведение AB матриц $A \in \text{Mat}_{lm}(S)$ и $B \in \text{Mat}_{mn}(S)$ определяются в соответ-

ствии с обычными правилами линейной алгебры: $A \oplus B = (a_{ij} \oplus b_{ij}) \in \text{Mat}_{mn}(S)$ и

$$AB = \left(\bigoplus_{k=1}^m a_{ik} \odot b_{kj} \right) \in \text{Mat}_{ln}(S),$$

где $A \in \text{Mat}_{lm}(S)$ и $B \in \text{Mat}_{mn}(S)$.

Если полукольцо S положительно, то множество $\text{Mat}_{mn}(S)$ упорядочено посредством отношения $A = (a_{ij}) \preceq B = (b_{ij})$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \preceq b_{ij}$ в S для всех $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Умножение матриц согласуется с порядком $\preceq$ в следующем смысле: если $A, A' \in \text{Mat}_{lm}(S)$, $B, B' \in \text{Mat}_{mn}(S)$ и $A \preceq A'$, $B \preceq B'$, то $AB \preceq A'B'$ в $\text{Mat}_{ln}(S)$. Более того, множество $\text{Mat}_{nn}(S)$ квадратных матриц $(n \times n)$ над (положительным идемпотентным) полукольцом S образует [положительное идемпотентное] полукольцо с нулевым элементом $O = (o_{ij})$, где $o_{ij} = \mathbf{0}$, $1 \leq i, j \leq n$, и единичным элементом $I = (\delta_{ij})$, где $\delta_{ij} = \mathbf{1}$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = \mathbf{0}$ в противном случае.

Множество Mat_{nn} — типичный пример некоммутативного полукольца (при $n > 1$).

1.2. Операция замыкания

Пусть положительное полукольцо S снабжено частичной унарной операцией замыкания $*$ такой, что из $a \preceq b$ следует, что $a^* \preceq b^*$ и $a^* = \mathbf{1} \oplus (a^* \odot a) = \mathbf{1} \oplus (a \odot a^*)$ во всей ее области определения. В частности, $\mathbf{0}^* = \mathbf{1}$ по определению.

Из этих аксиом следует, что $a^* = \mathbf{1} \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus (a^* \odot a^n)$, если $n \geq 1$. Таким образом, x^* можно рассматривать как «регуляризованную сумму» ряда

$$a^* = \mathbf{1} \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$$

В положительном полукольце, при условии, что оно замкнуто относительно взятия ограниченных упорядоченных верхних граней и операций $\oplus$ и $\odot$, дистрибутивных относительно таких верхних граней, мы можем определить

$$a^* := \sup_{k \geq 0} \mathbf{1} \oplus a \oplus \dots \oplus a^k, \quad (1.1)$$

если последовательность правых частей ограничена. В этом случае a^* — **наименьшее решение** уравнений $x = ax \oplus \mathbf{1}$ и $x = xa \oplus \mathbf{1}$, и a^*b — наименьшее решение уравнений $x = ax \oplus b$ и $x = xa \oplus b$. Если S полно, то замыкание очевидным образом определено для любого элемента $x \in S$.

В случае идемпотентного сложения (1.1) становится особенно приятным:

$$a^* = \bigoplus_{i \geq 0} a^i = \sup_{i \geq 0} a^i. \quad (1.2)$$

В числовых полукольцах операция замыкания $*$ обычно реализуется очень просто: $x^* = (1 - x)^{-1}$, если $x < 1$ в $\mathbf{R}_+$, или в $\widehat{\mathbf{R}}_+$, и $x^* = \infty$, если $x \geq 1$ в $\widehat{\mathbf{R}}_+$; $x^* = 1$, если $x \preceq \mathbf{1}$ в $\mathbf{R}_{\max}$ и $\widehat{\mathbf{R}}_{\max}$, $x^* = \infty$, если $x \succ \mathbf{1}$ в $\widehat{\mathbf{R}}_{\max}$, $x^* = \mathbf{1}$ для всех x в $S_{\max, \min}^{[a, b]}$. Во всех остальных случаях x^* не определено. Операция замыкания в матричных полукольцах над положительным полукольцом S может быть определена

по индукции: во-первых, имеем $A^* = (a_{11})^* = (a_{11}^*)$ в $\text{Mat}_{11}(S)$. Во-вторых, для любого целого числа $n > 1$ и любой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} \in \text{Mat}_{kk}(S)$, $A_{12} \in \text{Mat}_{kn-k}(S)$, $A_{21} \in \text{Mat}_{n-kk}(S)$, $A_{22} \in \text{Mat}_{n-kn-k}(S)$, $1 \leq k \leq n$, определим

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11}^* \oplus A_{11}^* A_{12} D^* A_{21} A_{11}^* & A_{11}^* A_{12} D^* \\ D^* A_{21} A_{11}^* & D^* \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где $D = A_{22} \oplus A_{21} A_{11}^* A_{12}$. Можно доказать, что из определения A^* следует, что равенства $A^* = A^* A \oplus I = A A^* \oplus I$ выполняются, и, таким образом, A^* является «регуляризованной суммой» ряда $I \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots$. Более того, в случае когда A^* определено как наименьшее решение уравнения $A^* = A^* A \oplus I$ и $A^* = A A^* \oplus I$, можно показать, что оно удовлетворяет уравнению (1.3).

Заметим, что это рекуррентное соотношение совпадает с формулами эскалаторного метода обращения матриц в обычной линейной алгебре над полями вещественных и комплексных чисел с точностью до используемых алгебраических операций. Следовательно, этот алгоритм матричного замыкания требует полиномиального от n числа операций, подробнее см. ниже.

Пусть S положительное полукольцо. Матричное (дискретное, стационарное) уравнение Бельмана имеет вид

$$X = AX \oplus B, \quad (1.4)$$

где $A \in \text{Mat}_{nn}(S)$, $X, B \in \text{Mat}_{ns}(S)$, а матрица X неизвестна. Пусть A^* замыкание матрицы A . Из тождества $A^* = A^* A \oplus I$ следует, что матрица $A^* B$ удовлетворяет этому уравнению. Также как и в скалярном случае, можно показать (при некотором дополнительном предположении), что для положительных полуколец, если матрица A^* определена как в уравнении (1.1), то $A^* B$ является наименьшим во множестве решений уравнения (1.4) относительно частично порядка на множестве $\text{Mat}_{ns}(S)$. Вспомним, что в идемпотентном случае

$$A^* = \bigoplus_{i \geq 0} A^i = \sup_{i \geq 0} A^i. \quad (1.5)$$

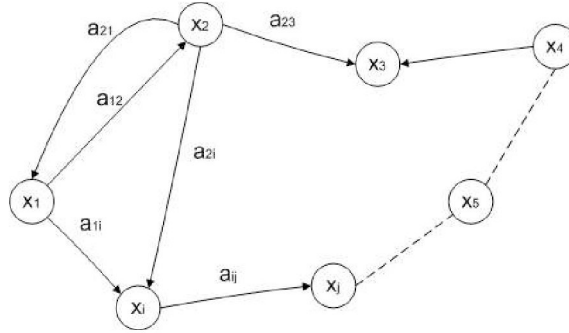
Рассмотрим также случай, когда матрица $A = (a_{ij})$ размерности $n \times n$ является строго верхнетреугольной (такой, что $a_{ij} = 0$ при $i \geq j$) или строго нижнетреугольной (такой, что $a_{ij} = 0$ при $i \leq j$). В этом случае $A^n = 0$, нулевой матрице, и можно показать с помощью итераций $X = AX \oplus I$, что это уравнение имеет единственное решение, а именно

$$A^* = I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}. \quad (1.6)$$

Интересно, что в случае алгебры макс-плюс формула (1.6) работает для более широкого класса матриц. Ряд (1.5) сходится там тогда и только тогда, когда он может быть усечен до (1.6). Это тесно связано с интерпретацией матрицы A^* как «матрицы оптимальных путей» (см. ниже).

1.3. Взвешенные ориентированные графы и матрицы над полукольцами

Пусть S — полукольцо с нулем 0 и единицей 1 . Хорошо известно, что любая квадратная матрица $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{nn}(S)$ задает *взвешенный ориентированный граф*. Эта геометрическая конструкция включает три вида объектов: множество X из n элементов $x_1, \dots, x_n$, называемых *вершинами*, множество Γ всех упорядоченных пар (x_i, x_j) таких, что $a_{ij} \neq 0$, называется *дугами*, и отображение $A: \Gamma \rightarrow S$ такое, что $A(x_i, x_j) = a_{ij}$. Элементы a_{ij} из полукольца S называются *весами* дуг. Наоборот, любой взвешенный ориентированный граф с n вершинами задает некоторую (единственную) матрицу $A \in \text{Mat}_{nn}(S)$.



Это определение допускает, что некоторые пары вершин могут быть не соединены, если соответствующий элемент матрицы A равен 0 и некоторые дуги могут быть петлями, если у матрицы A есть ненулевые элементы на главной диагонали.

Вспомним, что последовательность вершин вида:

$$p = (y_0, y_1, \dots, y_k),$$

где $k \geq 0$ и $(y_i, y_{i+1}) \in \Gamma$, $i = 0, \dots, k-1$, называется *путем* длины k , соединяющим вершину y_0 с вершиной y_k . Обозначим множество всех таких путей $P_k(y_0, y_k)$. Вес $A(p)$ пути $p \in P_k(y_0, y_k)$ определяется как произведение весов дуг, соединяющих последовательные вершины пути:

$$A(p) = A(y_0, y_1) \odot \dots \odot A(y_{k-1}, y_k).$$

По определению, вес «пути» $p \in P_0(x_i, x_j)$ длины $k = 0$ равен 1 , если $i = j$, и 0 в противном случае.

Для каждой матрицы $A \in \text{Mat}_{nn}(S)$ определим $A^0 = I = (\delta_{ij})$ (где $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$ в противном случае) и $A^k = AA^{k-1}$, $k \geq 1$. Пусть $a_{ij}^{[k]}$ — (i, j) -й элемент матрицы A^k . Легко проверяется, что

$$a_{ij}^{[k]} = \bigoplus_{\substack{i_0=i, i_k=j \\ 1 \leq i_1, \dots, i_{k-1} \leq n}} a_{i_0 i_1} \odot \dots \odot a_{i_{k-1} i_k}.$$

Таким образом, $a_{ij}^{[k]}$ — точная верхняя грань множества весов, отвечающих всем путям длины k , соединяющим вершину $x_{i_0} = x_i$ с вершиной $x_{i_k} = x_j$.

Пусть матрица A^* определена в соответствии с формулой (1.5). Обозначим элементы матрицы A^* как a_{ij}^* , $i, j = 1, \dots, n$; тогда

$$a_{ij}^* = \bigoplus_{0 \leq k < \infty} \bigoplus_{p \in P_k(x_i, x_j)} A(p).$$

Матрица A^* является решением известного алгебраического обобщения задачи нахождение оптимального пути: для каждой пары (x_i, x_j) требуется вычислить точную верхнюю грань весов всех путей (произвольной длины), соединяющих вершину x_i с вершиной x_j . Операция замыкания в полукольце матриц хорошо изучена (см., например, [2, 6, 13, 16, 18, 19, 21, 23, 25, 26, 39] и ссылки в них).

Пример 1.1 (Задача о кратчайшем пути). Пусть $S = \mathbf{R}_{\min}$, т. е. веса являются вещественными числами. В этом случае

$$A(p) = A(y_0, y_1) + A(y_1, y_2) + \dots + A(y_{k-1}, y_k).$$

Если элемент a_{ij} задает длину дуги (x_i, x_j) в некоторой метрике, тогда a_{ij}^* — длина кратчайшего пути, соединяющего x_i с x_j .

Пример 1.2 (Задача о пути максимальной ширины). Пусть $S = \mathbf{R} \cup \{0, 1\}$ с $\oplus = \max$, $\odot = \min$. Тогда

$$a_{ij}^* = \max_{p \in \bigcup_{k \geq 1} P_k(x_i, x_j)} A(p),$$

$$A(p) = \min(A(y_0, y_1), \dots, A(y_{k-1}, y_k)).$$

Если элемент a_{ij} задает «ширину» дуги (x_i, x_j) , тогда ширина пути p определяется как наименьшая ширина дуги, принадлежащей этому пути, а элемент a_{ij}^* является максимальной шириной всех путей, соединяющих x_i с x_j .

Пример 1.3 (Простая задача динамического программирования). Пусть $S = \mathbf{R}_{\max}$, и положим, что a_{ij} задает выплаты при переходе от x_i к x_j . Определим вектор $B = (b_i) \in \text{Mat}_{n1}(\mathbf{R}_{\max})$, элементы которого b_i задают терминальные выплаты, соответствующие выходу из графа в узле x_i . Конечно, отрицательные выплаты (то есть убытки) также допускаются. Пусть m — итоговая выплата, соответствующая пути $p \in P_k(x_i, x_j)$, т. е.

$$m = A(p) + b_j.$$

Тогда легко проверить, что наибольшая выплата, которая может быть достигнута на путях длины k , начинающихся в узле x_i , равна $(A^k B)_i$, и наибольшая выплата, достижимая без ограничений на длину пути, равна $(A^* B)_i$. Заметим, что если длина пути неограничена, то наибольшая выплата может быть равна бесконечности, как и соответствующее значение $(A^* B)_i$.

Пример 1.4 (Задача обращения матрицы). Заметим, что в формулах этого раздела мы используем дистрибутивность умножения $\odot$ относительно сложения $\oplus$, но не

используем аксиому идемпотентности. Таким образом, алгебраическое обобщение задачи об оптимальном пути может быть сформулировано также и для неидемпотентного полукольца S (см., например, [48]). Например, если $S = \mathbf{R}$, то

$$A^* = I + A + A^2 + \dots = (I - A)^{-1}.$$

Если $\|A\| > 1$, но матрица обратима, то это выражение определяет регуляризованную сумму расходящегося матричного степенного ряда $\sum_{i \geq 0} A^i$.

Подчеркнем, что эта связь между матричной операцией замыкания и решениями уравнения Беллмана порождает несколько различных алгоритмов для вычисления матричного замыкания. Все эти алгоритмы являются адаптациями хорошо известных алгоритмов традиционной вычислительной линейной алгебры, таких как метод исключения Гаусса–Жордана, различные итерационные и эскалаторные схемы и т. д. Это особый случай идемпотентного принципа суперпозиции (см. ниже).

На самом деле, теория дискретного стационарного уравнения Беллмана может быть развита с использованием равенства $A^* = AA^* \oplus I$ как дополнительной аксиомы без какой-либо существенной интерпретации (так называемые *замкнутые полукольца*, см., например, [23, 30, 48]). Такая теория может быть основана на следующих равенствах, которые в случае идемпотентных полуколец можно проверить, используя связь с задачей на нахождение оптимального пути. Эти равенства также хорошо известны и в случае вещественных чисел с обычной арифметикой:

$$\begin{aligned} (A \oplus B)^* &= (A^*B)^*A^*, \\ (AB)^*A &= A(BA)^*. \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.4. Интервальный анализ над положительными полукольцами

Традиционный интервальный анализ — это нетривиальная и популярная математическая область, см., например, [12, 22, 29, 43, 46]. «Идемпотентная» версия интервального анализа (и кроме того, интервального анализа над положительными полукольцами) появилась в [3, 10, 39]. Довольно много работ по этой теме появились позднее, см., например, [20, 22, 28, 44, 45]. Интервальный анализ над положительным полукольцом $\mathbf{R}_+$ обсуждается в [15].

Пусть множество S частично упорядочено отношением $\preceq$. *Замкнутый интервал* в S — это подмножество вида $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in S \mid \underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}\}$, где элементы $\underline{x} \preceq \bar{x}$ называются *нижней* и *верхней границей* интервала $\mathbf{x}$. Порядок $\preceq$ порождает частичное упорядочение на множестве всех замкнутых интервалов в S : $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\underline{x} \preceq \underline{y}$ и $\bar{x} \preceq \bar{y}$.

Слабым интервальным расширением $I(S)$ положительного полукольца S называется множество всех замкнутых интервалов в S , снабженное операциями $\oplus$ и $\odot$, определенными следующим образом: $\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$, $\mathbf{x} \odot \mathbf{y} = [\underline{x} \odot \underline{y}, \bar{x} \odot \bar{y}]$, и частичным порядком, порожденным порядком на S . Операция замыкания в $I(S)$ определяется как $\mathbf{x}^* = [\underline{x}^*, \bar{x}^*]$. Существуют другие интервальные расширения (в том числе, так называемые *сильные интервальные расширения* [39]), но слабое расширение более удобно.

Расширение $I(S)$ положительное; $I(S)$ идемпотентно, если S — идемпотентное полукольцо. Универсальный алгоритм над S может применяться к $I(S)$, и мы получим интервальную версию исходного алгоритма. Обычно обе версии имеют одинаковую сложность. Для дискретного стационарного уравнения Беллмана и соответствующей оптимизационной задачи на графах интервальный анализ подробно рассматривается в [3, 39]. Другие задачи идемпотентной линейной алгебры были рассмотрены в [20, 22, 28, 44, 45].

Идемпотентная математика оказывается проще ее традиционного аналога. Например, в традиционной интервальной арифметике перемножение интервалов не дистрибутивно относительно сложения, тогда как в идемпотентной интервальной арифметике эта дистрибутивность сохраняется. Более того, в традиционном интервальном анализе множество всех квадратных интервальных матриц заданного порядка не образует даже полугруппы по матричному умножению: эта операция не ассоциативна, поскольку дистрибутивность теряется в традиционной интервальной арифметике. Наоборот, в идемпотентном (и положительном) случае ассоциативность сохраняется. Наконец, в обычном интервальном анализе некоторые задачи линейной алгебры, такие как решение линейных систем интервальных уравнений, может быть очень сложным (точнее говоря, они NP -полные, см. [29] и ссылки там же). В [3, 39] показано, что в идемпотентном случае решение интервальных линейных систем требует полиномиального количества операций (так же как и для обычного метода исключения Гаусса). Два свойства, которые делают идемпотентную интервальную арифметику такой простой, — это монотонность арифметических операций и положительность всех элементов идемпотентного полукольца.

Отметим, что интервальные оценки в идемпотентной математике обычно являются точными. В традиционной теории такие оценки, как правило, слишком пессимистические.

1.5. Идемпотентный принцип соответствия

Существует нетривиальная аналогия между математикой полуколец и квантовой механикой. Например, поле вещественных чисел можно рассматривать как «квантовый объект» относительно идемпотентных полуколец, которые рассматриваются как «классические» и «полуклассические» объекты относительно поля вещественных чисел.

Пусть $\mathbf{R}$ — поле вещественных чисел, а $\mathbf{R}_+$ — подмножество всех неотрицательных чисел. Рассмотрим следующую замену переменных:

$$u \mapsto w = h \ln u,$$

где $u \in \mathbf{R}_+ \setminus \{0\}$, $h > 0$; таким образом, $u = e^{w/h}$, $w \in \mathbf{R}$. Обозначим через 0 дополнительный элемент $-\infty$ и через S расширенную вещественную прямую $\mathbf{R} \cup \{0\}$. Эта замена переменных имеет естественное расширение D_h на все S с $D_h(0) = 0$; также мы положим $D_h(1) = 0 = \mathbf{1}$.

Обозначим S_h множество S , снабженное двумя операциями $\oplus_h$ (обобщенное сложение) и $\odot_h$ (обобщенное умножение), такое что D_h — гомоморфизм из $\{\mathbf{R}_+, +, \cdot\}$ в

$\{S, \oplus_h, \odot_h\}$. Это означает, что

$$D_h(u_1 + u_2) = D_h(u_1) \oplus_h D_h(u_2), \quad D_h(u_1 \cdot u_2) = D_h(u_1) \odot_h D_h(u_2),$$

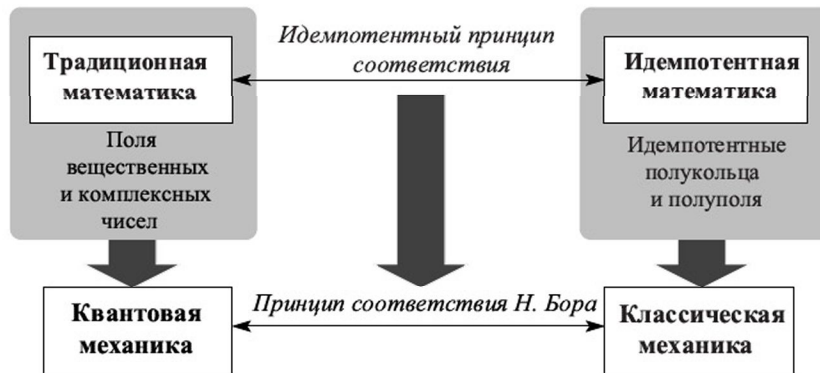
то есть $w_1 \odot_h w_2 = w_1 + w_2$ и $w_1 \oplus_h w_2 = h \ln(e^{w_1/h} + e^{w_2/h})$. Легко показать, что $w_1 \oplus_h w_2 \rightarrow \max\{w_1, w_2\}$ при $h \rightarrow 0$.

Алгебраически $\mathbf{R}_+$ и S_h изоморфны, поэтому мы получаем $\mathbf{R}_{\max}$ как результат предельной деформации $\mathbf{R}_+$. Мы подчеркиваем очевидную аналогию с процедурой деквантования, где h — аналог постоянной Планка. Таким образом, $\mathbf{R}_+$ (или $\mathbf{R}$) играет роль «квантового объекта», а $\mathbf{R}_{\max}$ — «классического» или «полуклассического» объекта, который получается как результат *деквантования* квантового объекта $\mathbf{R}_+$. В случае $\mathbf{R}_{\min}$ соответствующая процедура деквантования порождается заменой переменных $u \mapsto w = -h \ln u$.

В случае поля вещественных или комплексных чисел, идемпотентное деквантование в полукольцо $\mathbf{R}_{\max}$ (или $\mathbf{R}_{\min}$) определяется с помощью композиции отображения $x \mapsto |x|$ и деформации, описанной выше.

В то же время идемпотентное деквантование играет важную роль в методологии и в философии идемпотентной математики как обоснование возможности переноса с основного поля (как правило, вещественных или комплексных чисел) на идемпотентное полукольцо многих математических понятий, конструкций и результатов, см. [31, 33]. Идемпотентное деквантование приводит к следующей формулировке *идемпотентного принципа соответствия* [31, 33]:

Существует эвристическое соответствие между интересными, полезными и важными результатами над полем вещественных (или комплексных) чисел и похожими конструкциями и результатами над идемпотентными полукольцами в духе принципа соответствия Н. Бора в квантовой механике.



Идемпотентная математика может рассматриваться как «классическая тень (или двойник)» традиционной математики над полями. Систематическое приложение этого принципа соответствия ведет ко множеству теоретических и прикладных результатов, см., например, [31, 33, 36, 39, 42, 53, 54]. Связь с квантовой физикой подробно обсуждается, например, в [31].

Теперь мы обсудим идею о том, как идемпотентный принцип соответствия мог бы привести к унифицированному подходу к разработке аппаратного обеспечения. Подробнее об этой идее и ее осуществлении см. в [35, 40].

Наиболее важные и давно известные численные алгоритмы имеют множество аппаратных реализаций в виде технических устройств или специальных процессоров. Часто эти устройства могут использоваться как прототипы для новых аппаратных устройств, в результате простой замены обычных арифметических операций на их аналоги в полукольцах (и дополнительные средства для порождения нейтральных элементов 0 и 1). Разумеется, случай числовых полукольцев, состоящих из вещественных чисел (возможно, кроме нейтральных элементов) и полукольцев числовых интервалов, является самым простым и естественным. Заметим, что для полукольцев (включая $\mathbf{R}_{\max}$ и $\mathbf{R}_{\min}$) операция деления также определена.

Эффективные технические идеи и решения могут быть заимствованы из прототипов и реализованы в новых аппаратных устройствах. Таким образом, принцип соответствия порождает эвристический метод для разработки аппаратных средств. Заметим, что для получения патента необходимо представить так называемую «формулу изобретения», где требуется указать прототип предлагаемого устройства и разницу между устройством и его прототипом.

Рассмотрим (как типичный пример) самый важный и давно известный алгоритм вычисления скалярного произведения двух векторов:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \quad (1.1)$$

Универсальная версия формулы (1.1) для любого полукольца A очевидна:

$$(x, y) = (x_1 \odot y_1) \oplus (x_2 \odot y_2) \oplus \cdots \oplus (x_n \odot y_n). \quad (1.2)$$

В случае $A = \mathbf{R}_{\max}$ эта формула принимает следующий вид:

$$(x, y) = \max\{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n\}. \quad (1.3)$$

Это вычисление стандартно для многих алгоритмов оптимизации, поэтому полезно создать аппаратное средство для вычисления (1.3). Существует множество различных устройств и патентов для вычисления (1.1), и каждое такое устройство можно использовать в качестве прототипа для создания нового устройства для вычисления (1.3) и даже (1.2). Многие процессоры для перемножения матриц и других алгоритмов линейной алгебры основаны на вычислении скалярного произведения и на соответствующих «элементарных» устройствах. Используя современные технологии, можно создать дешевые специализированные многопроцессорные чипы и систолические массивы элементарных процессоров, реализующих универсальные алгоритмы. См., например, [35, 40, 48], где обсуждаются систолические массивы и вопросы параллельного вычисления в рамках задачи алгебраического пути. В частности, существует систолический массив из $n(n+1)$ элементарных процессоров, которые выполняют алгоритм исключения Гаусса–Жордана и могут решать задачу алгебраического пути за $5n - 2$ временных шагов.

2. Некоторые универсальные алгоритмы линейной алгебры

В этом разделе мы рассмотрим универсальные алгоритмы вычисления A^* и A^*B . Мы начнем с простых методов: эскалаторного метода и метода исключения Гаусса–Жордана в подразделе 2.1., а потом рассмотрим модификацию этих методов для случая систем Тёплица (подраздел 2.2.). Универсальное LDM-разложение для уравнения Беллмана описано в подразделе 2.3., а потом приводится адаптация этого метода для случаев симметричной и ленточной матрицы (подраздел 2.4.). Далее обсуждаются две итерационные схемы, а также реализация универсальных алгоритмов (подраздел 2.7.).

Сами алгоритмы будут записаны на языке MATLAB, следуя книге Голуба и ван Лоуна. Это сделано по следующим причинам: 1) желание упростить сравнение алгоритмов с их аналогами, взятых преимущественно из [1]; 2) поскольку язык MATLAB разработан для матричных вычислений и удобен для их записи. Мы не будем формально описывать правила нашего MATLAB-образного языка, предпочитая только выделить следующие важные особенности:

1. Основные арифметические операции: $a \oplus b$, $a \odot b$ и a^* .
2. Эти же операции для векторов следуют правилам MATLAB.
3. Мы используем основные ключевые слова MATLAB: «for», «if» и «end», похожие на ключевые слова других языков программирования (C++, Java, ...).

Дадим несколько примеров универсальных матричных вычислений на нашем языке.

Пример 2.1. $v(1:j) = \alpha^* \odot a(1:j, k)$ означает, что результат умножения (скалярного) первых j компонент k -й колонки матрицы A на замыкание α присваивается первым j компонентам вектора v .

Пример 2.2. $a(i, j) = a(i, j) \oplus a(i, 1:n) \odot a(1:n, j)$ означает, что мы добавляем ($\oplus$) к элементу a_{ij} матрицы A результат скалярного умножения (универсального) i -й строки и j -го столбца матрицы A (предполагается, что A – матрица $n \times n$).

Пример 2.3. $a(1:n, k) \odot b(l, 1:m)$ означает внешнее произведение k -го столбца матрицы A и l -й строки матрицы B . Элементы матрицы-результата $C = (c_{ij})$ равны $c_{ij} = a_{ik} \odot b_{lj}$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $j = 1, \dots, m$.

Пример 2.4. $x(1:n) \odot y(n:-1:1)$ – скалярное произведение вектора x и вектора y , чьи компоненты берутся в обратном порядке: правильное алгебраическое выражение $\bigoplus_{i=1}^n x_i \odot y_{n+1-i}$.

Пример 2.5. Следующий цикл вычисляет тот же результат, что и предыдущий пример:

```
s = 0
for i = 1 : n
s = s  $\oplus$  x(i)  $\odot$  x(n + 1 - i)
end
```

2.1. Эскалаторная схема и исключение Гаусса-Жордана

Сначала мы проанализируем базовый эскалаторный метод, основанный на определении замыкания матрицы (1.3). Пусть A — квадратная матрица. Замыкания ее главных подматриц A_k могут быть найдены по индукции, начиная с $A_1^* = (a_{11})^*$, замыкания первого диагонального элемента. В общем случае мы выражаем A_{k+1} как

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & g_k \\ h_k^T & a_{k+1} \end{pmatrix},$$

предполагая, что мы уже нашли замыкание для A_k . В этой формуле g_k и h_k — столбцы с k элементами и a_{k+1} — скаляр. Мы также выражаем A_{k+1}^* как

$$A_{k+1}^* = \begin{pmatrix} U_k & v_k \\ w_k^T & u_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Используя (1.3), мы получаем, что

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= (h_k^T A_k^* g_k \oplus a_{k+1})^*, \\ v_k &= A_k^* g_k u_{k+1}, \\ w_k^T &= u_{k+1} h_k^T A_k^*, \\ U_k &= A_k^* g_k u_{k+1} h_k^T A_k^* \oplus A_k^*. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Алгоритм, основанный на (2.1), записывается следующим образом.

Алгоритм 1. Эскалаторный метод вычисления для A^*

Вход: матрица A размером $n \times n$ с элементами $a(i, j)$, также используется для хранения результата вычисления и промежуточных результатов вычисления.

```

 $a(1, 1) = (a(1, 1))^*$ 
for  $i = 1 : n - 1$ 
   $Ag = a(1 : i, 1 : i) \odot a(1 : i, i + 1)$ 
   $hA = a(i + 1, 1 : i) \odot a(1 : i, 1 : i)$ 
   $a(i + 1, i + 1) = a(i + 1, i + 1) \oplus a(i + 1, 1 : i) \odot Ag(1 : i, 1)$ 
   $a(i + 1, i + 1) = (a(i + 1, i + 1))^*$ 
   $a(1 : i, i + 1) = a(i + 1, i + 1) \odot Ag$ 
   $a(i + 1, 1 : i) = a(i + 1, i + 1) \odot hA$ 
   $a(1 : i, 1 : i) = a(1 : i, 1 : i) \oplus Ag \odot a(i + 1, i + 1) \odot hA$ 
end
```

В полной аналогии со своим прототипом из линейной алгебры алгоритм требует $n^3 + O(n^2)$ операций сложения $\oplus$, $n^3 + O(n^2)$ операций умножения $\odot$ и n операций взятия алгебраического замыкания. Линейно-алгебраический прототип метода, записанного выше, также называется в литературе [11, 18] *методом окаймления*.

В качестве альтернативы, мы можем получить решение $X = AX \oplus B$ в результате процесса исключения, формальное объяснение которого дано ниже. Если A^* определяется как $\bigoplus_{i \geq 0} A^i$ (включая скалярный случай), тогда A^*B наименьшее решение

$X = AX \oplus B$ для всех A и B подходящих размеров. В этом случае, решение, найденное с помощью процесса исключения, совпадает с A^*B .

Для матрицы $A = (a_{ij})$ и вектор-столбцов $x = (x_i)$ и $b = (b_i)$ (ограничимся без потери общности случаем, когда x и b — вектор-столбцы) уравнение Беллмана $x = Ax \oplus b$ может быть записано как

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

После выражения x_1 через $x_2, \dots, x_n$ из первого уравнения и подстановки этого выражения для x_1 во все другие уравнения от второго до n -го мы получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (a_{11})^* a_{12} & \dots & (a_{11})^* a_{1n} \\ 0 & a_{22} \oplus (a_{21}(a_{11})^* a_{12}) & \dots & a_{2n} \oplus (a_{21}(a_{11})^* a_{1n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} \oplus (a_{n1}(a_{11})^* a_{12}) & \dots & a_{nn} \oplus (a_{n1}(a_{11})^* a_{1n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} (a_{11})^* & 0 & \dots & 0 \\ a_{21}(a_{11})^* & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(a_{11})^* & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Заметим, что нетривиальные элементы в обеих матрицах занимают дополнительные по отношению друг к другу позиции, поэтому во время вычислений обе матрицы могут храниться в одной квадратной матрице $C^{(k)}$. Обозначим ее элементы через $c_{ij}^{(k)}$, где k — число исключенных переменных. После $l-1$ исключения мы имеем

$$\begin{aligned} x_l &= (c_{ll}^{(l-1)})^* b_l, \\ c_{il}^{(l)} &= c_{il}^{(l-1)} (c_{ll}^{(l-1)})^*, \quad i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n \\ c_{ij}^{(l)} &= c_{ij}^{(l-1)} \oplus c_{il}^{(l-1)} (c_{ll}^{(l-1)})^* c_{lj}^{(l-1)}, \\ i, j &= 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n \\ c_{li}^{(l)} &= (c_{ll}^{(l-1)})^* c_{li}^{(l-1)}, \quad i = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.4)$$

После n исключений имеем $x = C^{(n)}b$. Выбирая в качестве b любой вектор с одной координатой, равной 1 , а остальными, равными 0 , получим $C^{(n)} = A^*$. Запишем следующий алгоритм, основанный на рекурсии (2.4).

Алгоритм 2. Метод исключения Гаусса–Жордана для вычисления A^* .

Вход: матрица A размеров $n \times n$ с элементами $a(i, j)$, также используется для хранения окончательного результата и промежуточные результаты вычислений.

for $i = 1 : n$

$a(i, i) = (a(i, i))^*$


```

for  $k = 1 : n$ 
if  $k \neq i$ 
 $a(k, i) = a(k, i) \odot a(i, i)$ 
end end
for  $k = 1 : n$ 
for  $j = 1 : n$ 
if  $k \neq i \ \& \ j \neq i$ 
 $a(k, j) = a(k, j) \oplus a(k, i) \odot a(i, j)$ 
end end for  $j = 1 : n$ 
if  $j \neq i$ 
 $a(i, j) = a(i, i) \odot a(i, j)$ 
end end end

```

Замечание. Алгоритм 2 может рассматриваться как «универсальный алгоритм Флойда-Уоршалла», обобщающий хорошо известные алгоритмы Уоршалла и Флойда для вычисления транзитивного замыкания графа и всех оптимальных путей на графе, см., например, [7]. В свою очередь, эти методы могут рассматриваться как частные случаи алгоритма 2 для тропических и булевых полуколец. Алгоритм 2 также близок к методу «пополнения» Ершова для обращения матриц и решения систем вида $Ax = b$ в классической линейной алгебре, подробности см. [11, глава 2].

2.2. Системы Тёплица

Запишем эскалаторный метод для нахождения решения $x = A^*b$ уравнения $x = Ax \oplus b$, где x и b — вектор-столбцы, аналогичный описанному в предыдущем разделе эскалаторному методу для нахождения A^* . Начнем с $x^{(1)} = A_1^*b_1$. Пусть $x^{(k)}$ — вектор, найденный после $(k - 1)$ шага. Представим его в виде

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} z \\ x_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Используя (2.1), мы получаем

$$x_{k+1} = u_{k+1}(h_k^T x^{(k)} \oplus b_{k+1}), \quad z = x^{(k)} \oplus A_k^* g_k x_{k+1}. \quad (2.1)$$

Требуется вычислить $A_k^* g_k$. Далее мы покажем, что это вычисление может быть проведено гораздо эффективнее, когда A — симметричная тёплицева матрица.

Матрица $A \in \text{Mat}_{nn}(\mathcal{S})$ называется *тёплицевой* (или *матрицей Тёплица*), если существуют скаляры $r_{-n+1}, \dots, r_0, \dots, r_{n-1}$, такие, что $A_{ij} = r_{j-i}$ для всех i и j . Другими словами, тёплицевы матрицы обладают тем свойством, что их элементы постоянны вдоль любой линии, параллельной главной диагонали (и вдоль самой главной диагонали). Например, матрица

$$A = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_{-1} & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_{-2} & r_{-1} & r_0 & r_1 \\ r_{-3} & r_{-2} & r_{-1} & r_0 \end{pmatrix}$$

тёплицева. Такие матрицы не обязательно симметричные, однако они всегда *персимметричные*, то есть симметричные относительно побочной диагонали. Это свойство алгебраически выражается как $A = E_n A^T E_n$, где $E_n = [e_n, \dots, e_1]$. Через e_i мы обозначаем столбец, чей i -й элемент равен 1, а другие элементы равны 0. Из свойства $E_n^2 = I_n$ (где I_n — единичная матрица $n \times n$) следует, что произведение двух персимметричных матриц является персимметричным. Следовательно, любая степень персимметричной матрицы персимметрична, как и замыкание персимметричной матрицы. Таким образом, если A персимметрична, то

$$E_n A^* = (A^*)^T E_n. \quad (2.2)$$

Далее мы рассматриваем только симметричные тёплицевы матрицы. Рассмотрим уравнение $y = T_n y \oplus r^{(n)}$, где $r^{(n)} = (r_1, \dots, r_n)^T$ и T_n определяется скалярами $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ так, что $T_{ij} = r_{|j-i|}$ для всех i и j . Это обобщение задачи Юла–Уокера [1]. Предположим, что мы получили наименьшее решение $y^{(k)}$ системы $y = T_k y \oplus r^{(k)}$ для некоторого k такого, что $1 \leq k \leq n-1$, где T_k — главная $k \times k$ подматрица матрицы T_n . Тогда T_{k+1} можно записать в следующем виде:

$$T_{k+1} = \begin{pmatrix} T_k & E_k r^{(k)} \\ r^{(k)T} E_k & r_0 \end{pmatrix},$$

а $y^{(k+1)}$ и $r^{(k+1)}$ — как

$$y^{(k+1)} = \begin{pmatrix} z \\ \alpha_k \end{pmatrix}, \quad r^{(k+1)} = \begin{pmatrix} r^{(k)} \\ r_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Используя (2.1), (2.2) и тождество $T_k^* r^{(k)} = y^{(k)}$, мы получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha_k &= (r_0 \oplus r^{(k)T} y^{(k)})^* (r^{(k)T} E_k y^{(k)} \oplus r_{k+1}), \\ z &= E_k y^{(k)} \alpha_k \oplus y^{(k)}. \end{aligned}$$

Обозначим $\beta_k = r_0 \oplus r^{(k)T} y^{(k)}$. Следующая выкладка показывает, что β_k может быть найден рекурсивно, если $(\beta_{k-1}^*)^{-1}$ существует:

$$\begin{aligned} \beta_k &= r_0 \oplus [r^{(k-1)T} \ r_k] \begin{pmatrix} E_{k-1} y^{(k-1)} \alpha_{k-1} \oplus y^{(k-1)} \\ \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= r_0 \oplus r^{(k-1)T} y^{(k-1)} \oplus (r^{(k-1)T} E_{k-1} y^{(k-1)} \oplus r_k) \alpha_{k-1} \\ &= \beta_{k-1} \oplus (\beta_{k-1}^*)^{-1} \odot \alpha_{k-1}^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Существование $(\beta_{k-1}^*)^{-1}$ не гарантировано, и поэтому мы записываем две версии нашего алгоритма, первая включает (2.3), а вторая не включает. Мы запишем обе эти версии в одной программе и выделим выражения, которые относятся только к первой или только к второй, с помощью комментариев языка MATLAB %1 и %2 соответственно. Собирая выражения для β_k , α_k и z , мы получим следующее рекурсивное

выражение:

$$\begin{aligned}
 \beta_k &= r_0 \oplus r^{(k)T} y^{(k)}, & \%2 \\
 \beta_k &= \beta_{k-1} \oplus (\beta_{k-1}^*)^{-1} \odot \alpha_{k-1}^2, & \%1 \\
 \alpha_k &= (\beta_k)^* \odot (r^{(k)T} E_k y^{(k)} \oplus r_{k+1}), \\
 y^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} E_k y^{(k)} \alpha_k \oplus y^{(k)} \\ \alpha_k \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Рекурсия (2.4) — это обобщенная версия метода Дурбина для задачи Юла-Уокера, прототип алгоритма см. в [1, алгоритм 4.7.1].

Алгоритм 3. Метод Дурбина для задачи Юла-Уокера для уравнений Беллмана с симметричной матрицей Тёплица.

Вход: r_0 : скаляр,

r : $n - 1 \times 1$ вектор;

$y(1) = r_0^* \odot r(1)$

$\beta = r_0$ %1

$\alpha = r_0^* \odot r(1)$

for $k = 1 : n - 1$

$\beta = r_0 \oplus r(1 : k) \odot y(1 : k)$ %2

$\beta = \beta \oplus (\beta^*)^{-1} \odot \alpha^2$ %1

$\alpha = \beta^* \odot (r(k : -1 : 1) \odot y(1 : k) \oplus r(k + 1))$

$z(1 : k) = y(1 : k) \oplus y(k : -1 : 1) \odot \alpha$

$y(1 : k) = z(1 : k)$

$y(k + 1) = \alpha$

end

Выход: вектор y .

В общем случае алгоритм требует $3/2n^2 + O(n)$ операций $\oplus$ и $\odot$ каждой и только $n^2 + O(n)$ операций $\oplus$ и $\odot$, если допускаются инверсии алгебраических замыканий (как обычно, требуется только n таких замыканий в обоих случаях).

Рассмотрим задачу нахождения $x^{(n)} = T_n^* b^{(n)}$, где T_n заданы как выше, а вектор $b^{(n)} = (b_1, \dots, b_n)$ произволен. Также мы введем вектор-столбец $y^{(k)}$, являющийся решением задачи Юла-Уокера: $y^{(k)} = T_k^* r^{(k)}$. Основная идея состоит в нахождении выражения для $x^{(k+1)} = T_{k+1}^* b^{(k+1)}$, включающих $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$. Запишем $x^{(k+1)}$ и $b^{(k+1)}$ следующим образом:

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} v \\ \mu_k \end{pmatrix}, \quad b^{(k+1)} = \begin{pmatrix} b^{(k)} \\ b_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Используя персимметрию T_k^* и тождества $T_k^* b_k = x^{(k)}$ и $T_k^* r_k = y^{(k)}$, преобразуем выражения (2.1) и получим, что

$$\begin{aligned}
 \mu_k &= (r_0 \oplus r^{(k)T} y^{(k)})^* \odot (r^{(k)T} E_k x^{(k)} \oplus b_{k+1}), \\
 v &= E_k y^{(k)} \mu_k \oplus x^{(k)}.
 \end{aligned}$$

Коэффициент $r_0 \oplus r^{(k)T} y^{(k)} = \beta_k$ может быть выражен рекурсивно:

$$\beta_k = \beta_{k-1} \oplus (\beta_{k-1}^*)^{-1} \odot (\alpha_{k-1})^2,$$

если замыкание $(\beta_{k-1})^*$ обратимо. Учитывая эту возможность, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \beta_k &= r_0 \oplus r^{(k)T} y^{(k)}, & \%2 \\ \beta_k &= \beta_{k-1} \oplus (\beta_{k-1}^*)^{-1} \odot \alpha_{k-1}^2, & \%1 \\ \mu_k &= \beta_k^* \odot (r^{(k)T} E_k x^{(k)} \oplus b_{k+1}), \\ x^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} E_k y^{(k)} \mu_k \oplus x^{(k)} \\ \mu_k \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Выражения (2.4) и (2.5) дают следующее обобщение алгоритма Левинсона решения линейных симметричных систем Тёплица, см. прототип в [1, алгоритм 4.7.2].

Алгоритм 4. Метод Левинсона для систем Беллмана с симметричной матрицей Тёплица

Вход: r_0 : скаляр,

r : $1 \times n - 1$ вектор-строка;

b : $n \times 1$ вектор-столбец.

$y(1) = r_0^* \odot r(1)$; $x(1) = r_0^* \odot b(1)$;

$\beta = r_0$ %1

$\alpha = r_0^* \odot r(1)$

for $k = 1 : n - 1$

$\beta = r_0 \oplus r(1 : k) \odot y(1 : k)$ %2

$\beta = \beta \oplus (\beta^*)^{-1} \odot \alpha^2$ %1

$\mu = \beta^* \odot (r(k : -1 : 1) \odot x(1 : k) \oplus b(k + 1))$

$v(1 : k) = x(1 : k) \oplus y(k : -1 : 1) \odot \mu$

$x(1 : k) = v(1 : k)$

$x(k + 1) = \mu$

if $k < n - 1$

$\alpha = \beta^* \odot (r(k : -1 : 1) \odot y(1 : k) \oplus r(k + 1))$

$z(1 : k) = y(1 : k) \oplus y(k : -1 : 1) \odot \alpha$

$y(1 : k) = z(1 : k)$

$y(k + 1) = \alpha$

end end

Выход: вектор x .

В общем случае алгоритм требует $(5/2)n^2 + O(n)$ операций $\oplus$ и $\odot$ каждая, и только $2n^2 + O(n)$ операций $\oplus$ и $\odot$, если алгебраические замыкания обратимы (как обычно, требуется только n замыканий в обоих случаях).

2.3. Разложение LDM

Над классическими числовыми полями матричные уравнения вида $AX = B$ можно решать с помощью разложения матрицы A в произведение $A = LDM$, где L и M — нижняя и верхняя треугольные матрицы с единичной диагональю соответственно, а D — диагональная матрица. Мы построим похожее разложение для решения уравнения Беллмана $X = AX \oplus B$ над полукольцами.

В случае системы $AX = B$ над классическими числовыми полями, разложение $A = LDM$ приводит к следующему разложению $AX = B$:

$$LZ = B, \quad DY = Z, \quad MX = Y. \quad (2.1)$$

Следовательно,

$$A^{-1} = M^{-1}D^{-1}L^{-1}, \quad (2.2)$$

если матрица A обратима. По существу, достаточно найти матрицы L , D и M , так как после этого линейная система $AX = B$ решается путем комбинации прямой подстановки Z (решение системы уравнений с ниже-треугольной матрицей), тривиальной инверсии диагональной матрицы Y и обратной подстановки X (решение системы уравнений с выше-треугольной матрицей).

Используя разложение LDM для $AX = B$ как прототип, мы можем записать аналогичное разложение для $X = AX \oplus B$:

$$Z = LZ \oplus B, \quad Y = DY \oplus Z, \quad X = MX \oplus Y. \quad (2.3)$$

Тогда

$$A^* = M^*D^*L^*. \quad (2.4)$$

Тройка (L, D, M) , состоящая из нижней треугольной, диагональной и верхней треугольной матриц, называется LDM -разложением матрицы A , если выполнены соотношения (2.3) и (2.4). Заметим, что в этом случае главные диагонали матриц L и M — нулевые. Другими словами, матрица L является строго ниже-треугольной, а M является строго выше-треугольной.

Наша универсальная модификация LDM -разложения схожа с универсальной модификацией LU -разложения, предложенной Карре в [18, 19], см. также ниже. Универсальные алгоритмы LDM и LU -разложения можно применять и в случае обычных числовых полей, однако лишь в том случае, если не требуется операция «выбора ведущего элемента» (pivoting). В этом случае они вычисляют классические LDM и LU разложения для обращения матрицы $I - A$.

Если A — симметричная матрица над полукольцом с коммутативным умножением, то количество вычислений может быть уменьшено вдвое, так как M и L переходят друг в друга при транспозиции. Соответствующие алгоритмы будут подробно рассмотрены ниже.

Мы начнем со случая треугольной матрицы $A = L$ (или $A = M$). Тогда нахождение X сводится к прямой (или обратной) замене. В этих случаях уравнение $X = AX \oplus B$ имеет единственное решение, которое может быть найдено с помощью простых алгоритмов, приведенных ниже. В этих алгоритмах B — вектор (обозначенный через b),

однако их (после соответствующей модификации) можно применять и в случае, когда B — матрица любого подходящего размера. Нас интересует случай строго нижнетреугольной матрицы, соответственно строго верхнетреугольной, когда $a_{ij} = 0$ для $i \leq j$, соответственно $a_{ij} = 0$ для $i \geq j$.

Алгоритм 5. *Прямая подстановка.*

Вход: Строго нижнетреугольная $n \times n$ -матрица l ;
 $n \times 1$ вектор b .

```

 $y = b$ 
for  $k = 2 : n$ 
 $y(k) = l(k, 1 : k - 1) \odot y(1 : k - 1)$ 
end

```

Выход: вектор y .

Алгоритм 6. *Обратная подстановка.*

Вход: Строго верхнетреугольная $n \times n$ -матрица m ;
 $n \times 1$ вектор b .

```

 $y = b$ 
for  $k = n - 1 : -1 : 1$ 
 $y(k) = m(k, k + 1 : n) \odot y(k + 1 : n)$ 
end

```

Выход: вектор y .

Оба алгоритма требуют $n^2/2 + O(n)$ операций $\oplus$ и $\odot$ и никаких алгебраических замыканий.

После LDM -разложения нам нужно вычислить замыкание диагональной матрицы. Это делается поэлементно.

Сформулируем алгоритм LDM -разложения, т. е. вычисление матриц L , D и M , удовлетворяющих (2.3) и (2.4). Доказательство будет приведено ниже.

Алгоритм 7. *LDM -разложение (версия 1).*

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$,
также используется для хранения результата вычислений
и промежуточных результатов вычислений.

```

for  $j = 1 : n - 1$ 
 $v(j) = (a(j, j))^*$ 
 $a(j + 1 : n, j) = a(j + 1 : n, j) \odot v(j)$ 
 $a(j + 1 : n, j + 1 : n) = a(j + 1 : n, j + 1 : n) \oplus a(j + 1 : n, j) \odot a(j, j + 1 : n)$ 
 $a(j, j + 1 : n) = v(j) \odot a(j, j + 1 : n)$ 
end

```

Алгоритм требует $n^3/3 + O(n^2)$ операций $\oplus$ и $\odot$ и $n - 1$ операций алгебраического замыкания.

Строго треугольная матрица L записывается в нижнем треугольнике, строго верхнетреугольная матрица M в верхнем треугольнике, и диагональная матрица D на диагонали матрицы, вычисленной алгоритмом 7.

Теперь покажем, что $A^* = M^* D^* L^*$. Заметим, что приведенное ниже доказательство является модификацией доказательства [14], данного для универсального LU -разложения. Идея заключается в том, чтобы определить универсальный аналог «матриц Гаусса» ниже-треугольных или выше-треугольных, состоящих из одного столбца или одной строки, соответственно).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & h^{(1)} \\ g^{(1)} & B^{(1)} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Можно проверить, что

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & h^{(1)} a_{11}^* \\ O_{n-1 \times 1} & I_{n-1} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} a_{11}^* & O_{1 \times n-1} \\ O_{n-1 \times 1} & (h^{(1)} a_{11}^* g^{(1)} \oplus B^{(1)})^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O_{1 \times n-1} \\ a_{11}^* g^{(1)} & I_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где умножение в правой части ведет к выражению, полностью аналогичному (2.1), где $(h^{(1)} a_{11}^* g^{(1)} \oplus B^{(1)})^*$ играет роль u_{k+1} . Здесь и далее $O_{k \times l}$ означает $k \times l$ -матрицы, состоящие только из нулей, а I_l означает единичную матрицу размера l . Это также можно переписать как

$$A^* = M_1^* D_1^* (A^{(2)})^* L_1^*, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{pmatrix} O & h^{(1)} a_{11}^* \\ O_{(n-1) \times 1} & O_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \\ D_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & O_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \\ A^{(2)} &= \begin{pmatrix} O_{1 \times 1} & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & R^{(2)} \end{pmatrix}, \\ L_1 &= \begin{pmatrix} O_{1 \times 1} & O_{1 \times (n-1)} \\ a_{11}^* g^{(1)} & O_{(n-1) \times (n-1)} \end{pmatrix}, \\ R^{(2)} &= h^{(1)} a_{11}^* g^{(1)} \oplus B^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь мы используем, в частности, что $L_1^2 = 0$ и $M_1^2 = 0$, и, следовательно, $L_1^* = I \oplus L_1$ и $M_1^* = I \oplus M_1$.

Первый шаг алгоритма 7 ($k = 1$) вычисляет

$$\begin{pmatrix} a_{11} & h^{(1)} a_{11}^* \\ a_{11}^* g^{(1)} & R^{(2)} \end{pmatrix} = A^{(2)} \oplus L_1 \oplus M_1 \oplus D_1, \quad (2.9)$$

что содержит всю нужную информацию.

Теперь мы продолжим с подматрицы $R^{(2)}$ матрицы $A^{(2)}$, раскладывая ее на множители по аналогии с (2.7), и т. д. Опишем формально k -й шаг этой конструкции, отвечающий k -му шагу алгоритма 7. На этом общем шаге мы работаем с

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} O_{(k-1) \times (k-1)} & O_{(k-1) \times (n-k+1)} \\ O_{(n-k+1) \times (k-1)} & R^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где

$$R^{(k)} = h^{(k-1)}(a_{k-1, k-1}^{(k-1)})^* g^{(k-1)} \oplus B^{(k-1)} = \begin{pmatrix} a_{kk}^{(k)} & h^{(k)} \\ g^{(k)} & B^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Как и на первом шаге, мы представляем

$$(A^{(k)})^* = M_k^* D_k^* (A^{(k+1)})^* L_k^*, \quad (2.12)$$

где

$$\begin{aligned} M_k &= \begin{pmatrix} O_{(k-1) \times (k-1)} & O_{(k-1) \times 1} & O_{(k-1) \times (n-k)} \\ O_{1 \times (k-1)} & O_{1 \times 1} & h^{(k)}(a_{kk}^{(k)})^* \\ O_{(n-k) \times (k-1)} & O_{(n-k) \times 1} & O_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}, \\ D_k &= \begin{pmatrix} O_{(k-1) \times (k-1)} & O_{(k-1) \times 1} & O_{(k-1) \times (n-k)} \\ O_{1 \times (k-1)} & a_{kk}^{(k)} & O_{1 \times (n-k)} \\ O_{(n-k) \times (k-1)} & O_{(n-k) \times 1} & O_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}, \\ L_k &= \begin{pmatrix} O_{(k-1) \times (k-1)} & O_{(k-1) \times 1} & O_{(k-1) \times (n-k)} \\ O_{1 \times (k-1)} & O_{1 \times 1} & O_{1 \times (n-k)} \\ O_{(n-k) \times (k-1)} & (a_{kk}^{(k)})^* g^{(k)} & O_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}, \\ A^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} O_{k \times k} & O_{k \times (n-k)} \\ O_{(n-k) \times k} & R^{(k+1)} \end{pmatrix}, \\ R^{(k+1)} &= h^{(k)}(a_{kk}^{(k)})^* g^{(k)} \oplus B^{(k)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Заметим, что имеется следующее рекуррентное соотношение на элементы $A^{(k)}$:

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \leq k \text{ или } j \leq k, \\ a_{ij}^{(k)} \oplus a_{ik}^{(k)}(a_{kk}^{(k)})^* a_{kj}^{(k)}, & \text{если } i > k \text{ и } j > k. \end{cases} \quad (2.14)$$

Эта рекурсия сразу видна в алгоритме 7. Более того, можно показать по индукции, что матрица, вычисленная на k -м шаге алгоритма, равна

$$A^{(k+1)} \oplus \bigoplus_{i=1}^k L_i \oplus \bigoplus_{i=1}^k M_i \oplus \bigoplus_{i=1}^k D_i. \quad (2.15)$$

Иначе говоря, эта матрица составлена из $h^{(1)}a_{11}^*$, ..., $h^{(k)}(a_{kk}^{(k)})^*$ (в верхнем треугольнике), $a_{11}^*g^{(1)}$, ..., $(a_{kk}^{(k)})^*g^{(k)}$ (в нижнем треугольнике), $a_{11}, \dots, a_{kk}^{(k)}$ (на диагонали) и $R^{(k+1)}$ (в юго-восточном углу).

После раскрытия всех выражений (2.12) для $A^{(k)}$, где $k = 1, \dots, n$, мы получаем

$$A^* = M_1^* D_1^* \cdots M_n^* D_n^* L_n^* \cdots L_1^* \quad (2.16)$$

(на самом деле, $M_n = L_n = \mathbf{0}$ и, следовательно, $M_n^* = L_n^* = I$). Заметив, что D_i^* и M_j^* коммутируют при $i < j$, мы можем переписать

$$A^* = M_1^* \cdots M_n^* D_1^* \cdots D_n^* L_n^* \cdots L_1^*. \quad (2.17)$$

Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} (D_1 \oplus \dots \oplus D_n)^* &= D_1^* \cdots D_n^*, \\ (L_1 \oplus \dots \oplus L_n)^* &= L_n^* \cdots L_1^*, \\ (M_1 \oplus \dots \oplus M_n)^* &= M_1^* \cdots M_n^*. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Первое из этих равенств очевидно. По поводу остальных двух заметим, что $M_k^2 = L_k^2 = \mathbf{0}$ для всех k , следовательно, $M_k^* = I \oplus M_k$ и $L_k^* = I \oplus L_k$. Далее, $L_i L_j = \mathbf{0}$ при $i < j$ и $M_i M_j = \mathbf{0}$ при $i > j$. Используя эти равенства, можно показать, что

$$\begin{aligned} (L_1 \oplus \dots \oplus L_n)^* &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} (L_1 \oplus \dots \oplus L_n)^i = \\ &= (I \oplus L_n) \cdots (I \oplus L_1) = L_n^* \cdots L_1^*, \\ (M_1 \oplus \dots \oplus M_n)^* &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} (M_1 \oplus \dots \oplus M_n)^i = \\ &= (I \oplus M_1) \cdots (I \oplus M_n) = M_1^* \cdots M_n^*, \end{aligned} \quad (2.19)$$

что дает два последних равенства из (2.18). Заметим, что в (2.19) мы использовали нильпотентность $L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ и $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$, что позволяет применить (1.6).

Можно проверить, что матрицы $M := M_1 \oplus \dots \oplus M_n$, $L := L_1 \oplus \dots \oplus L_n$ и $D := D_1 \oplus \dots \oplus D_n$ содержатся в верхнем треугольнике, в нижнем треугольнике и, соответственно, на диагонали матрицы, вычисленной алгоритмом 7. Эти матрицы удовлетворяют LDM -разложению $A^* = M^* D^* L^*$. Этим завершается объяснение алгоритма 7.

В терминах матричных вычислений алгоритм 7 есть версия LDM -разложения с внешним произведением. Этот алгоритм может быть переделан в форму, почти идентичную с [1, алгоритм 4.1.1]:

Алгоритм 8. LDM -разложение (версия 2).

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$,
также используется для хранения результата вычислений
и промежуточных результатов вычислений.

```

for  $j = 1 : n$ 
 $v(1 : j) = a(1 : j, j)$ 
for  $k = 1 : j - 1$ 
```

```

 $v(k+1:j) = v(k+1:j) \oplus a(k+1:j, k) \odot v(k)$ 
end
for  $i = 1:j-1$ 
 $a(i, j) = (a(i, i))^* \odot v(i)$ 
end
 $a(j, j) = v(j)$ 
for  $k = 1:j-1$ 
 $a(j+1:n, j) = a(j+1:n, j) \oplus a(j+1:n, k) \odot v(k)$ 
end
 $d = (v(j))^*$ 
 $a(j+1:n, j) = a(j+1:n, j) \odot d$ 
end

```

Этот алгоритм выполняет в точности те же операции, что и алгоритм 7, вычисляя последовательно один за другим столбцы результата. А именно, в первой части основного цикла он вычисляет элементы $a_{ij}^{(i)}$ для $i = 1, \dots, j$, сначала под видом элементов v и окончательно в присваивании « $a(i, j) = (a(i, i))^* \odot v(i)$ ». Сложность этого алгоритма такая же, как у алгоритма 7.

2.4. LDM -разложение с симметрией и ленточной структурой

Когда матрица A симметрична, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i, j , естественно ожидать, что LDM -разложение тоже должно быть симметрично, т. е. $M = L^T$. Действительно, повторяя рассуждения предыдущего раздела, можно показать, что все промежуточные матрицы $A^{(k)}$ симметричны, следовательно, $M_k = L_k^T$ для всех k и $M = L^T$. Теперь мы представим две версии симметричного LDM -разложения, отвечающие двум версиям LDM -разложения, данным в предыдущем разделе. Заметим, что объем вычислений в этих алгоритмах примерно вдвое меньше, чем в их полных версиях. В обоих случаях они требуют $n^3/6 + O(n^2)$ операций $\oplus$ и $\odot$ (каждый) и $n-1$ операций взятия алгебраического замыкания.

Алгоритм 9. *Симметричное LDM -разложение (версия 1).*

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$,
также используется для хранения результата вычислений
и промежуточных результатов вычислений.

```

for  $j = 1:n-1$ 
 $v(j) = (a(j, j))^*$ 
for  $k = j+1:n$ 
for  $l = j+1:k$ 
 $a(k, l) = a(k, l) \oplus a(k, j) \odot v(j) \odot a(l, j)$ 
end
end
 $a(j+1:n, j) = a(j+1:n, j) \odot v(j)$ 
end

```

Строго треугольная матрица L содержит нижний треугольник результата, а матрица D — на диагонали. Следующая версия обобщает [1, алгоритм 4.1.2].

Алгоритм 10. *Симметричное LDM-разложение (версия 2).*

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$,
также используется для хранения результата вычислений
и промежуточных результатов вычислений.

```

for  $j = 1 : n$ 
for  $i = 1 : j - 1$ 
 $v(i) = (a(i, i)^*)^{-1} a(i, j)$ 
end
 $v(j) = v(j) \oplus a(j, 1 : j - 1) \odot v(1 : j - 1)$ 
 $a(j, j) = v(j)$ 
for  $k = 1 : j - 1$ 
 $a(j + 1 : n, j) = a(j + 1 : n, j) \oplus a(j + 1 : n, k) \odot v(k)$ 
end
 $d = (v(j))^*$ 
 $a(j + 1 : n, j) = a(j + 1 : n, j) \odot d$  end

```

Заметим, что эта версия требует обратимости замыканий $a(i, i)^*$, вычисленных алгоритмом.

Замечание. В случае идемпотентного полукольца мы имеем $(D^*)^2 = D^*$, следовательно, $A^* = (M^* D^*)(D^* L^*)$. Когда A симметрична, мы можем записать $A^* = (G^*)^T G^*$, где $G = D^* L$. Очевидно, это **идемпотентное разложение Холецкого** приводит лишь к небольшой модификации алгоритма 9 (или 10). См. также классическое разложение Холецкого в [1, алгоритм 4.2.2].

$A = (a_{ij})$ называется **ленточной матрицей** с верхней шириной полосы q и нижней шириной полосы p , если $a_{ij} = 0$ для всех $j > i + p$ и всех $i > j + q$. Ленточная матрица с $p = q = 1$ называется **тридиагональной**. Для обоснования универсальной версии LDM-разложения ленточных матриц нам нужно показать, что параметры лент матриц $A = A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$, вычисленных в процессе LDM-разложения, не больше параметров матрицы $A^{(1)} = A$. Положим по индукции, что $A = A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ имеют требуемые параметры ленты и рассмотрим элементы $a_{ij}^{(k+1)}$ для $i > j + p$. Если $i \leq k$ или $j \leq k$, то $a_{ij}^{(k+1)} = 0$, поэтому мы можем предположить, что $i > k$ и $j > k$. В этом случае $i > k + p$, следовательно, $a_{ik}^{(k)} = 0$ и

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} \oplus a_{ik}^{(k)} (a_{kk}^{(k)})^* a_{kj}^{(k)} = 0.$$

Таким образом, мы показали, что нижняя полоса $A^{(k)}$ не больше p . Таким же образом можно показать, что ее верхняя полоса не превышает q . Мы используем это для построения ленточной версии LDM-разложения, её прототип см. в [1, алгоритм 4.3.1].

Алгоритм 11. *LDM-разложение ленточной матрицы.*

A — ленточная $n \times n$ -матрица с элементами $a(i, j)$, нижняя ширина ленты p и верхняя ширина ленты q также используется для хранения окончательного результата и промежуточных результатов вычислений.

```

for  $j = 1 : n - 1$ 
 $v(j) = (a(j, j))^*$ 
for  $i = j + 1 : \min(j + p, n)$ 
 $a(i, j) = a(i, j) \odot v(j)$ 
end
for  $k = j + 1 : \min(j + q, n)$ 
for  $i = j + 1 : \min(j + p, n)$ 
 $a(k, j) = a(k, j) \oplus a(k, i) \odot a(i, j)$ 
end end
for  $k = j + 1 : \min(j + q, n)$ 
 $a(j, k) = v(j) \odot a(j, k)$ 
end end

```

Когда p и q фиксированы и $n \gg p, q$ переменная, легко видеть, что алгоритм выполняет примерно npq каждой из операций $\odot$ и $\oplus$.

Замечание. *Есть некоторые еще более специальные виды ленточных матриц, например, матрицы Хессенберга и трёхдиагональные матрицы. Матрицы Хессенберга определяются как ленточные матрицы с $p = 1$ и $q = n$, а в случае трёхдиагональных матриц $p = q = 1$. Несложно записать дальнейшие адаптации алгоритма 11 для этих случаев.*

2.5. Итерационные схемы

По настоящему универсальную итерационную схему трудно найти, так как условия, при которых такие схемы работают, а также условия останова для таких схем зависят от полукольца и от представления данных. Тем не менее, основные операции таких схем бывают универсальны и очень просты.

Рассмотрим следующий итерационный процесс решения уравнения Беллмана $X = AX \oplus B$:

$$X^{(k+1)} = AX^{(k)} \oplus B. \quad (2.1)$$

Итерируя выражения (2.1) для всех k от 0 до $m - 1$, мы получаем

$$X^{(m)} = A^m X^{(0)} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} A^i B. \quad (2.2)$$

Таким образом, результат зависит от поведения $A^m X^{(0)}$. Алгоритм может быть переписан следующим образом (для случая, когда B — вектор-столбец).

Алгоритм 12. *Итерации Якоби*

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$;
 $n \times 1$ вектор-столбцы b и x

```

situation = 'вычисление'
while situation == 'вычисление'
   $x = A \odot x \oplus b$ 
  situation = newsituation(...)
  if situation == 'расходимость'
    disp('Итерации Якоби расходятся.')
    exit
  end
  if situation == 'сходимость'
    disp('Решение найдено:')
    exit
  end end
Выход: ситуация,  $x$ .

```

Далее мы кратко обсудим поведение итераций Якоби над обычной арифметикой с неотрицательными вещественными числами и над полукольцом $\mathbf{R}_{\max}$. Для простоты в обоих случаях мы ограничимся случаем *неприводимой* матрицы A , то есть когда ассоциированный граф сильно связан.

Хорошо известно, что над обычной арифметикой (в неприводимом неотрицательном случае) итерации Якоби сходятся тогда и только тогда, когда наибольшее собственное значение $r(A)$ матрицы A строго меньше 1. Это связано, в частности, с тем, как ведет себя последовательность $\{A^m x^{(0)}\}_{m \geq 0}$. Заметим, что итерации Якоби, даже в случае сходимости, как правило, дают лишь приближённое решение уравнения $x = Ax + b$.

В случае $\mathbf{R}_{\max}$ поведение последовательности $\{A^m x^{(0)}\}_{m \geq 0}$ отличается от случая обычной неотрицательной алгебры. Однако, как и в случае неотрицательной алгебры, это поведение зависит от $r(A)$, наибольшего собственного значения A в алгебре макс-плюс (то есть относительно собственной задачи $A \odot x = \lambda \odot x$ в этой алгебре). А именно $A^m x^{(0)} \rightarrow \mathbf{0}$ и, следовательно, итерации сходятся если $r(A) < 1$. Более того, в этом случае $A^* = (I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1})$ и, следовательно, итерации доставляют **точное** решение уравнения Беллмана после **конечного** числа шагов. Наоборот, $A^m x^{(0)} \rightarrow +\infty$ и, следовательно, итерации расходятся при $r(A) > 1$. Подробности см., например, [18].

На границе $r(A) = 1$ степени A^m достигают периодического режима после конечного числа шагов. Следовательно, последовательность $\{A^*b \oplus A^m x^{(0)}\}_{m \geq 0}$ также становится периодической после конечного числа шагов. Если период равен единице, то есть если эта последовательность стабилизируется, то метод сходится к некоторому общему решению уравнения $x = Ax \oplus b$, которое описывается как суперпозиция A^*b и некоторого собственного вектора матрицы A [2, 17]. Вектор A^*b может доминировать, в этом случае метод сходится к A^*b как «ожидалось». Однако, период последовательности (после выхода на периодический режим) может быть и больше единицы, в этом случае итерации Якоби не доставляют никакого решения уравнения $x = Ax \oplus b$ непосредственно, однако такое решение может быть найдено с помощью суммирования по периоду. Степени матриц и теория собственных векторов и собственных значений над алгеброй макс-плюс подробно описаны в монографии Бутковича [16], см. также [49, 50].

В более сложной схеме итераций Гаусса–Зейделя мы также можем использовать предварительно найденные координаты $X^{(k)}$. В этом случае матрица A записывается в виде $L \oplus U$, где L — строго нижнетреугольная часть A , а U — верхнетреугольная часть с диагональю. Итерации записываются как

$$X^{(k)} = LX^{(k)} \oplus UX^{(k-1)} \oplus B = L^*UX^{(k-1)} \oplus L^*B. \quad (2.3)$$

Заметим, что преобразования правой части однозначны, так как L — строго нижнетреугольная матрица, и L^* однозначно определяется как $I \oplus L \oplus \dots \oplus L^{n-1}$ (где n — размерность A). Другими словами, мы только применяем формальную подстановку. Итерируя выражения (2.3) для всех k вплоть до m , мы получим

$$X^{(m)} = (L^*U)^m X^{(0)} \oplus \bigoplus_{i=0}^{m-1} (L^*U)^i L^*B. \quad (2.4)$$

Правая часть напоминает формулу $(L \oplus U)^* = (L^*U)^*L^*$, см. (1.1), поэтому естественно ожидать, что эти итерации сходятся к A^*B при хорошем выборе $X^{(0)}$. Результат зависит от поведения $(L^*U)^m X^{(0)}$. Алгоритм может быть записан следующим образом (мы снова полагаем, что B — вектор-столбец).

Алгоритм 13. Итерации Гаусса–Зейделя

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$;

$n \times 1$ -вектор-столбцы b и x

situation = 'вычисление'

while situation == 'вычисление'

for $i = 1 : n$

$y(i) = a(i, i : n) \odot x(i : n) \oplus b(i)$

end

for $i = 2 : n$

$x(i) = a(i, 1 : i - 1) \odot x(1 : i - 1)$

end

situation = newsituation(...)

if situation == 'расходимость'

disp('Итерации Гаусса–Зейделя расходятся.')

exit

end

if situation == 'сходимость'

disp('Решение найдено:')

exit

end end

Выход: ситуация, x .

Анализ работы схемы Гаусса–Зейделя в случаях тропической (макс-плюс) алгебры и неотрицательной линейной алгебры мы здесь не приводим, однако ясно, что его можно провести по аналогии с итерациями Якоби.

2.6. LU -разложение

Обсудим более кратко универсальную версию разложения $A = LU$, которая была описана в работах Б. А. Карре [18]. Этот раздел содержит лишь формулировки соответствующих алгоритмов, так как доказательства были даны в работах Карре и Бекхауса [14, 18, 19] и могут быть получены (как и сами алгоритмы) путем небольшой модификации соответствующих рассуждений в разделе про LDM -разложение (см. выше).

Напомним, что в случае классической системы $AX = B$ над числовыми полями разложение $A = LU$, где L — нижняя унитреугольная (с диагональными элементами равными 1), а U — верхняя треугольная матрица, приводит к следующему разложению исходного уравнения:

$$LZ = B, \quad UX = Z.$$

Таким образом, мы получаем

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}$$

при условии, что матрица A обратима. Достаточно найти L и U , так как после этого линейная система (2.6.) может быть решена комбинацией прямой подстановки для Z и обратной подстановки для X .

В случае системы $X = AX \oplus B$ над полукольцами, следуя [18], мы можем записать

$$Z = LZ \oplus B, \quad X = UX \oplus Z.$$

Таким образом,

$$A^* = U^*L^*,$$

где U — верхне-треугольная, а L — строго нижне-треугольная матрица.

Далее мы приводим алгоритмы прямой и обратной подстановки, а также две версии универсального LU -разложения (то есть одновременного вычисления матриц L и U).

Алгоритм 14. *Прямая подстановка.*

Вход: Строго нижнетреугольная $n \times n$ -матрица l ;

$n \times 1$ вектор b .

$y = b$

for $k = 2 : n$

$y(k) = l(k, 1 : k - 1) \odot y(1 : k - 1)$

end

Выход: вектор y .

Алгоритм 15. *Обратная подстановка.*

Вход: Верхнетреугольная $n \times n$ -матрица u ;

$n \times 1$ вектор b .

$y = b$

$y(n) = (u(n, n))^* \odot y(n)$

for $k = n - 1 : -1 : 1$

```

 $y(k) = u(k, k+1 : n) \odot y(k+1 : n)$ 
 $y(k) = (u(k, k))^* \odot y(k)$ 
end

```

Выход: вектор y .

Отметим, что обратная подстановка отличается от случая LDM -разложения, так как матрица U (в отличие от M) является лишь треугольной, а не строго треугольной. Прямые подстановки для обеих схем, разумеется, идентичны.

Алгоритм 16. LU -разложение (версия 1).

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$, также используется для хранения результата вычислений и промежуточных результатов вычислений.

```

for  $j = 1 : n - 1$ 
 $v(j) = (a(j, j))^*$ 
 $a(j+1 : n, j) = a(j+1 : n, j) \odot v(j)$ 
 $a(j+1 : n, j+1 : n) = a(j+1 : n, j+1 : n) \oplus a(j+1 : n, j) \odot a(j, j+1 : n)$ 
end

```

Алгоритм 17. LU -разложение (версия 2).

Вход: $n \times n$ -матрица A с элементами $a(i, j)$, также используется для хранения результата вычислений и промежуточных результатов вычислений.

```

for  $j = 1 : n$ 
 $v(1 : j) = a(1 : j, j)$ 
for  $k = 1 : j - 1$ 
 $v(k+1 : j) = v(k+1 : j) \oplus a(k+1 : j, k) \odot v(k)$ 
end
 $a(1 : j, j) = v(1 : j)$ 
for  $k = 1 : j - 1$ 
 $a(j+1 : n, j) = a(j+1 : n, j) \oplus a(j+1 : n, k) \odot v(k)$ 
end
 $d = (v(j))^*$ 
 $a(j+1 : n, j) = a(j+1 : n, j) \odot d$ 
end

```

Эти алгоритмы основаны на следующих определениях, аналогичных (2.12) и (2.13). Полагая

$$A^{(1)} := A = \begin{pmatrix} a_{11} & h^{(1)} \\ g^{(1)} & B^{(1)} \end{pmatrix},$$

для любого $k = 1, \dots, n$ получаем

$$(A^{(k)})^* = U_k^* (A^{(k+1)})^* L_k^*, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned}
 U_k &= \begin{pmatrix} O_{(k-1) \times (k-1)} & O_{(k-1) \times 1} & O_{(k-1) \times (n-k)} \\ O_{1 \times (k-1)} & a_{kk}^{(k)} & h^{(k)} \\ O_{(n-k) \times (k-1)} & O_{(n-k) \times 1} & O_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}, \\
 L_k &= \begin{pmatrix} O_{(k-1) \times (k-1)} & O_{(k-1) \times 1} & O_{(k-1) \times (n-k)} \\ O_{1 \times (k-1)} & O_{1 \times 1} & O_{1 \times (n-k)} \\ O_{(n-k) \times (k-1)} & (a_{kk}^{(k)})^* g^{(k)} & O_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}, \\
 A^{(k+1)} &= \begin{pmatrix} O_{k \times k} & O_{k \times (n-k)} \\ O_{(n-k) \times k} & R^{(k+1)} \end{pmatrix}, \\
 R^{(k+1)} &= h^{(k)} (a_{kk}^{(k)})^* g^{(k)} \oplus B^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{k+1,k+1}^{(k+1)} & h^{(k+1)} \\ g^{(k+1)} & B^{(k+1)} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.7. Программная реализация универсальных алгоритмов

Программные реализации универсальных алгоритмов на полукольцах не могут быть такими же эффективными, как и стандартные программные реализации (относительно скорости вычислений), но они намного более гибкие. Программные модули могут иметь дело с абстрактными (и переменными) операциями и типами данных. Конкретные значения этих операций и типов данных могут быть заданы соответствующими входными данными. В этом случае конкретные операции и типы данных порождаются дополнительными программными модулями. В программах, написанных в таком духе, удобно использовать специальные методы так называемого объектно-ориентированного (и функционального) дизайна, см., например, [41, 47, 52]. К счастью, недавно появились мощные инструменты, поддерживающие объектно-ориентированный дизайн программ, включающие компиляторы для реальных и удобных языков программирования (например, C++ и Java) и современные системы компьютерной алгебры. С недавних пор, этот тип программных методов был назван обобщенным программированием (см., например, [47]).

Реализация на C++. Используя шаблоны и объектно-ориентированное программирование, А. В. Чуркин и С. Н. Сергеев [9] создали программу (на Visual C++), которая демонстрирует, как некоторые универсальные алгоритмы вычисляют замыкания матриц A^* и решают уравнения Беллмана $x = Ax \oplus b$ в различных полукольцах. Программа также может решать обычную систему $Ax = b$ в обычной арифметике, преобразовывая ее в форму «Беллмана». Перед нажатием кнопки «Solve» пользователь должен выбрать полукольцо, задачу и алгоритм. После этого начальные данные записываются в матрице (для удобства отображения размерность матрицы ограничена 10×10). Результат может быть и вектором, и матрицей в зависимости от решаемой задачи. Объектно-ориентированный подход позволяет реализовать различные полукольца как объекты с различными определениями основных операций, тогда как сама программа алгоритма записана компактно и в единственном «экземпляре» (шаблоне).

Примеры полукольца. Полукольцо соответствует объекту, используемому универсальным алгоритмом, и определяет конкретную реализацию этого алгоритма. Пользователь может выбрать одно из следующих полукольц:

- 1) $\oplus = +$ и $\otimes = \times$: обычная арифметика над действительными числами;
- 2) $\oplus = \max$ и $\otimes = +$: арифметика макс-плюс над $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$;
- 3) $\oplus = \min$ и $\otimes = +$: арифметика мин-плюс над $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$;
- 4) $\oplus = \max$ и $\otimes = \times$: арифметика макс-умножить над неотрицательными числами;
- 5) $\oplus = \max$ и $\otimes = \min$: арифметика макс-мин над вещественным отрезком $[a, b]$ (концы a и b может выбирать пользователь);
- 6) $\oplus = \text{OR}$ и $\otimes = \text{AND}$: булева логика над двухэлементном множеством $\{0, 1\}$.

Алгоритмы. Пользователь может выбрать один из следующих методов:

- 1) **Метод исключения Гаусса**, включающий универсальные реализации эскалаторного метода (алгоритм 1), Флойда-Уоршалла (алгоритм 2, алгоритм Ершова (основанный на прототипе из [11, гл. 2]) и универсальный алгоритм Ротэ [48];
- 2) **Методы для систем Тёплица**, включающие универсальные реализации схем Дурбина и Левинсона (алгоритмы 3 и 4);
- 3) **LDM-разложение** (алгоритм 7) и его адаптации к симметрическим (алгоритм 9), ленточным (алгоритм 11), трёхдиагональным матрицам и матрицам Хессенберга.
- 4) **Итерационные схемы** Якоби и Гаусса-Зейделя. Как было упомянуто выше, эти схемы не универсальны, т. к. критерии останова и условия, при которых они сходятся и дают правильный ответ, различны для обычной арифметики и идемпотентных полуколец (в частности, макс-плюс).

Типы матриц. Пользователь может выбрать работу с общими матрицами или с матрицами специального вида, например, симметричные, симметричные тёплицевы, ленточные, Хессенберга и тридиагональные.

Отображение. В случае идемпотентных полуколец матрица может быть отображена как взвешенный направленный граф. После выполнения вычислений пользователь может захотеть найти оптимальный путь между данной парой вершин или отобразить дерево оптимальных путей. Эти задачи могут быть решены, используя родительские ссылки, как в случае с классическим методом Флойда-Уоршалла, вычисляющим все оптимальные пути. См., например, [7]. В нашем случае механизм родительских ссылок может быть реализован прямо в классе, описывающем идемпотентную арифметику.

Другие арифметики и интервальные расширения. Возможна также реализация различных типов арифметики как типов данных и их сочетание с выбором полуколец. Более того, все реализованные полукольца могут быть расширены до их интервальных версий. Такие возможности не были реализованы в программе А. В. Чуркина и С. Н. Сергеева [9], они отложены до следующей версии. Список этих арифметик включает целые числа, дробную арифметику с цепными дробями и управляемой точностью.

Реализации в MATLAB. Вся работа (кроме инструментов отображения) была повторена в MATLAB [9], который также обладает возможностями объектно-ориентированного программирования. Разумеется, универсальные алгоритмы, записанные в MATLAB, очень близки к описанным в настоящей статье.

Перспективы на будущее. По-видимому, основная задача заключается в том, чтобы, используя идемпотентный принцип соответствия и вычисления над полукольцами, разработать программную систему широкого назначения, основанную на коллекции универсальных алгоритмов. Разработка такой системы на основе универсальных алгоритмов может гарантировать сокращение рабочего времени для программистов и пользователей благодаря унификации программного обеспечения. Также может быть гарантирована произвольная точность и безопасность численных вычислений. При этом надо учесть, что высокоуровневые инструменты, такие как STL [47, 52], обладают и очевидными преимуществами, и некоторыми недостатками, поэтому должны использоваться с осторожностью.

Система должна содержать несколько уровней (включая уровни пользователя и программиста) и большое количество модулей. Грубо говоря, она должна быть разделена на три части. Первая часть должна содержать модули, которые реализуют модули доменов (конечные представления основных математических объектов). Вторая часть должна реализовывать универсальные (инвариантные) методы вычисления. Третья часть должна содержать модули, реализующие алгоритмы, которые зависят от модели. Эти модули могут быть использованы в пользовательских программах на C++, Java, Maple, MATLAB и др.

В частности, система должна содержать следующие модули:

— Доменные модули:

- целые числа произвольной длины;
- рациональные числа;
- рациональные числа конечной точности (см. [8]);
- комплексные рациональные числа конечной точности;
- рациональные числа с фиксированной и плавающей запятой;
- комплексные рациональные числа;
- вещественные числа с плавающей запятой произвольной точности;
- комплексные числа произвольной точности;
- p -адические числа;
- интервальные числа;
- кольца многочленов над различными кольцами;
- идемпотентные полукольца;
- интервальные идемпотентные полукольца;
- и другие.

— Алгоритмы:

- линейная алгебра;
- численное интегрирование;
- корни многочленов;
- интерполяция сплайнами и аппроксимации;
- рациональные и полиномиальные интерполяции и аппроксимации;
- вычисление специальных функций;
- дифференциальные уравнения;
- оптимизации и оптимальное управление;

- идемпотентный функциональный анализ;
- и другие.

Эта программная система может быть особенно полезна разработчикам алгоритмов, программистам, студентам и математикам.

References

- [1] Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун, *Матричные вычисления*, Мир, М., 2000; англ. пер.: G. H. Golub and C. van Loan, *Matrix Computations*, John Hopkins Univ. Press, London, 1989.
- [2] Н. К. Кривулин, *Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем*, Изд-во СПбГУ, Санкт-Петербург, 2009. [N. K. Krivulin, *Methods of Idempotent Algebra in Problems of Modeling and Analysis of Complex Systems*, Publishing House of St. Petersburg university, St. Petersburg, 2009 (In Russian)].
- [3] Г. Л. Литвинов, А. Н. Соболевский, “Точные интервальные решения дискретного уравнения Беллмана и полиномиальная сложность задач идемпотентной линейной алгебры”, *Доклады РАН*, **374**:3 (2000), 304–306, arXiv: [org/abs/math.LA/0101041](https://arxiv.org/abs/math.LA/0101041). [G. L. Litvinov, A. N. Sobolevsky, “Exact interval solutions of the discrete Bellman equation and polynomial complexity of idempotent linear algebra problems”, *Doklady Mathematics*, **374**:3 (2000), 304–306 (In Russian), arXiv: [org/abs/math.LA/0101041](https://arxiv.org/abs/math.LA/0101041)].
- [4] В. П. Маслов, “Новый подход к обобщённым решениям нелинейных систем”, *Доклады АН СССР*, **292**:1 (1987), 29–33. [V. P. Maslov, “A new approach to generalized solutions of nonlinear systems”, *Doklady Mathematics*, **292**:1 (1987), 29–33 (In Russian)].
- [5] В. П. Маслов, “О новом принципе суперпозиции для задач оптимизации”, *УМН*, **42**:3(255) (1987), 39–48; англ. пер.: V. P. Maslov, “On a new principle of superposition for optimization problems”, *Russian Mathematical Surveys*, **42**:3 (1987), 43–54.
- [6] В. П. Маслов, В. Н. Колокольцов, *Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении*, Наука, М., 1994; англ. пер.: V. P. Maslov, V. N. Kolokoltsov, *Idempotent Analysis and Its Applications*, Springer Science+Business Media Dordrecht, Dordrecht, 1997.
- [7] Р. Седжвик, *Алгоритмы на C++*, часть 5: *Алгоритмы на графах*, Диасофт, Киев, 2002; англ. пер.: R. Sedgewick, *Algorithms in C++*, part 5: *Graph Algorithms*, 3rd, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., California, New York, Amsterdam, 2002.
- [8] S. Sergeev, “Universal algorithms for generalized discrete matrix Bellman equations with symmetric Toeplitz matrix”, *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **16**:6–2 (2011), 1751–1758, arXiv: [org/abs/math/0612309](https://arxiv.org/abs/math/0612309).
- [9] С. Н. Сергеев, А. В. Чуркин, “Программа для демонстрации универсальных алгоритмов решения дискретного уравнения Беллмана в различных полукольцах”, *Idempotent and tropical mathematics and problems of mathematical physics. II*, Международный семинар «Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics» (Независимый московский университет, российско-французская лаборатория «J.-V. Poncelet», Россия, 25–30 августа), Независимый московский университет, М., 2007, 107–109, arXiv: [org/abs/0709.4119](https://arxiv.org/abs/0709.4119). [S. N. Sergeev, A. V. Chourkin, “Universal algorithms solving discrete Bellman systems of equations over semirings”, *Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics. II*, International Workshop “Idempotent and Tropical Mathematics and Problems of Mathematical Physics” (Independent University of Moscow, French–Russian Laboratory “J.-V. Poncelet”, Russia, August 25–30), Independent University of Moscow, Moscow, 2007, 107–109 (In Russian), arXiv: [org/abs/0709.4119](https://arxiv.org/abs/0709.4119)].
- [10] А. Н. Соболевский, “Интервальная арифметика и линейная алгебра над идемпотентными полукольцами”, *Доклады РАН*, **369**:6 (1999), 747–749. [A. N. Sobolevsky, “Interval arithmetic and linear algebra over idempotent semirings”, *Doklady Mathematics*, **369**:6 (1999), 747–749 (In Russian)].
- [11] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, 3-е изд., Изд-во «Лань», Санкт-Петербург, 2002. [D. K. Faddeev, V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*, 3rd ed., Publishing house “Doe”, St. Petersburg, 2002 (In Russian)].

- [12] G. Alefeld and J. Herzberger, *Introduction to interval computations*, Academic Press, New York, 1983.
- [13] F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat, *Synchronization and Linearity: an Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley and Sons, 1992.
- [14] R. C. Backhouse, B. A. Carré, “Regular algebra applied to path-finding problems”, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, **15** (1975), 161–186.
- [15] W. Barth, E. Nuding, “Optimale Lösung von Intervallgleichungssystemen”, *Computing*, **12** (1974), 117–125.
- [16] P. Butkovič, *Max-linear Systems: Theory and Algorithms*, Springer, London, 2010.
- [17] P. Butkovič, H. Schneider and S. Sergeev, “Z-matrix equations in max algebra, nonnegative linear algebra and other semirings”, 2011, arXiv: [org/abs/1110.4564](https://arxiv.org/abs/1110.4564).
- [18] B. A. Carré, “An algebra for network routing problems”, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, **7** (1971), 273–294.
- [19] B. A. Carré, *Graphs and Networks*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.
- [20] K. Cechlárová and R. A. Cuninghame-Green, “Interval systems of max-separable linear equations”, *Linear Algebra and its Applications*, **340**:1–3 (2002), 215–224.
- [21] R. A. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, **166**, Springer, Berlin, 1979.
- [22] M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramík, J. Rohn and K. Zimmermann, *Linear optimization problems with inexact data*, Springer, New York, 2006.
- [23] J. Golan, *Semirings and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [24] M. Gondran, “Path algebra and algorithms”, *Combinatorial Programming: Methods and Applications*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the Palais des Congrès (Versailles, France, 2–13 September, 1974), Reidel, Dordrecht, 1975, 137–148.
- [25] M. Gondran and M. Minoux, *Graphs et Algorithmes*, Éditions Eyrolles, Paris, 1979.
- [26] M. Gondran and M. Minoux, *Graphs, Dioids and Semirings*, Springer, New York, 2010.
- [27] J. Gunawardena, *Idempotency*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [28] L. Hardouin, B. Cottenceau, M. Lhommeau, and E. Le Corronc, “Interval systems over idempotent semiring”, *Linear Algebra and its Applications*, **431** (2009), 855–862.
- [29] V. Kreinovich, A. Lakeev, J. Rohn, and P. Kahl, *Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations*, Applied Optimization, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [30] D. J. Lehmann, “Algebraic structures for transitive closure”, *Theoretical Computer Science*, **4** (1977), 59–76.
- [31] G. L. Litvinov, “The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a brief introduction”, *Journal of Mathematical Sciences*, **141**:4 (2007), 1417–1428, arXiv: [org/abs/math.GM/0507014](https://arxiv.org/abs/math.GM/0507014).
- [32] G. L. Litvinov and V. P. Maslov, “1210–1211”, *Russian Mathematical Surveys*, **51** (1996).
- [33] G. L. Litvinov and V. P. Maslov, “The correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications”, *Idempotency*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, 420–443, arXiv: [org/abs/math.GM/0101021](https://arxiv.org/abs/math.GM/0101021).
- [34] G. L. Litvinov and V. P. Maslov, *Idempotent mathematics and mathematical physics*, **307**, AMS Contemporary Mathematics, Providence, 2005.
- [35] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, A. Ya. Rodionov, and A. N. Sobolevskii, *Universal algorithms, mathematics of semirings and parallel computations*, Lecture Notes in Computational Science and Engineering, **75**, 2011, arXiv: [org/abs/1005.1252](https://arxiv.org/abs/org/abs/1005.1252).
- [36] G. L. Litvinov and E. V. Maslova, “Universal numerical algorithms and their software implementation”, *Programming and Computer Software*, **26**:5 (2000), 275–280, arXiv: [org/abs/math.SC/0102114](https://arxiv.org/abs/math.SC/0102114).

- [37] G. L. Litvinov, A. Ya. Rodionov and A. V. Tchourkin, “Approximate rational arithmetic and arbitrary precision computations for universal algorithms”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **45:2** (2008), 193–204, arXiv: org/abs/math.NA/0101152.
- [38] G. L. Litvinov and S. N. Sergeev, *Tropical and Idempotent Mathematics*, **495**, AMS Contemporary Mathematics, Providence, 2009.
- [39] G. L. Litvinov and A. N. Sobolevskii, “Idempotent interval analysis and optimization problems”, *Reliable Computing*, **7:5** (2001), 353–377, arXiv: org/abs/math.SC/0101080.
- [40] G. L. Litvinov, V. P. Maslov and A. Ya. Rodionov, “A unifying approach to software and hardware design for scientific calculations and idempotent mathematics”, 2000, arXiv: org/abs/math.SC/0101069.
- [41] M. Lorenz, *Object oriented software: a practical guide*, Prentice Hall Books, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [42] G. Mikhalkin, “Tropical geometry and its applications”, *Proceedings of the Madrid ICM. V. 2*, 2006, 827–852, arXiv: org/abs/math.AG/0601041.
- [43] R. E. Moore, *Methods and applications of interval analysis*, SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1979.
- [44] H. Myškova, “Interval systems of max-separable linear equations”, *Linear Algebra and its Applications*, **403** (2005), 263–272.
- [45] H. Myškova, “Control solvability of interval systems of max-separable linear equations”, *Linear Algebra And Its Applications*, **416:2–3** (2006), 215–223.
- [46] A. Neumaier, *Interval methods for systems of equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [47] I. Pohl, *Object-Oriented Programming Using C++*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, 1997.
- [48] G. Rote, “A systolic array algorithm for the algebraic path problem”, *Computing*, **34** (1985), 191–219.
- [49] S. Sergeev, “Max-algebraic attraction cones of nonnegative irreducible matrices”, *Linear Algebra And Its Applications*, **435:7** (2011), 1736–1757, arXiv: org/abs/math.AG/0903.3960.
- [50] S. Sergeev and H. Schneider, “CSR expansions of matrix powers in max algebra”, *Transactions of Amer. Math. Soc.*, **364** (2012), 5969–5994, arXiv: org/abs/math.AG/0912.2534.
- [51] I. Simon, “Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring”, *Lecture Notes in Computer Science*, **324** (1988), 107–120.
- [52] A. Stepanov and M. Lee, *The Standard Template Library*, Hewlett-Packard Company, Palo Alto, 1994.
- [53] O. Viro, “Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper”, *European Congress of Mathematics*, European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000, July 10–14), Progress in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 135–146, arXiv: org/abs/math/0005163.
- [54] O. Viro, “From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry”, *Japanese Journal of Mathematics*, **3:2** (2008), 185–214.
- [55] V. V. Voevodin, *Mathematical Foundations of Parallel Computings*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1992.

Информация об авторах

Литвинов Григорий Лазаревич, доктор физико-математических наук, профессор. Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: glitvinov@gmail.com

Information about the authors

Grigory L. Litvinov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor. Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation. E-mail: glitvinov@gmail.com

Родионов Анатолий Яковлевич, преподаватель. Московский центр непрерывного математического образования, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: ayarodionov@yahoo.com

Сергеев Сергей, доцент Школы математики. Университет Бирмингема, г. Бирмингем, Великобритания. E-mail: sergeevs@maths.bham.ac.uk

Соболевский Андрей Николаевич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, директор Института проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН. Институт проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: sobolevski@iitp.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3082-5113>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Литвинов Григорий Лазаревич
E-mail: glitvinov@gmail.com

Поступила в редакцию 14 августа 2019 г.
Поступила после рецензирования 24 октября 2019 г.
Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

Anatoliy Ya. Rodionov, Teacher. Moscow Center for Continuous Mathematical Education, Moscow, the Russian Federation. E-mail: ayarodionov@yahoo.com

Sergei Sergeev, Associate Professor of the Mathematics School. University of Birmingham, Birmingham, United Kingdom. E-mail: sergeevs@maths.bham.ac.uk

Andrei N. Sobolevsky, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of RAS, Director of the Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute). Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation. E-mail: sobolevski@iitp.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3082-5113>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Grigory L. Litvinov
E-mail: glitvinov@gmail.com

Received 14 August 2019
Reviewed 24 October 2019
Accepted for press 29 November 2019

© Molchanov V.F., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-432-449

УДК 517.98

Radon problems for hyperboloids

Vladimir F. MOLCHANOV

Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Задачи Радона для гиперboloидов

Владимир Федорович МОЛЧАНОВ

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Abstract. We offer a variant of Radon transforms for a pair $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ of hyperboloids in $\mathbb{R}^3$ defined by $[x, x] = 1$ and $[y, y] = -1, y_1 \geq 1$, respectively, here $[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. For a kernel of these transforms we take $\delta([x, y])$, $\delta(t)$ being the Dirac delta function. We obtain two Radon transforms $\mathcal{D}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{Y})$ and $\mathcal{D}(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$. We describe kernels and images of these transforms. For that we decompose a sesqui-linear form with the kernel $\delta([x, y])$ into inner products of Fourier components.

Keywords: hyperboloids; Radon transform; distributions; representations; Poisson and Fourier transforms

Acknowledgements: The work is partially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (project no. 3.8515.2017/8.9).

For citation: Molchanov V.F. Zadachi Radona dlya giperboloidov [Radon problems for hyperboloids]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 432–449. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-432-449.

Аннотация. Мы предлагаем некоторый вариант преобразований Радона для пары $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ гиперboloидов в $\mathbb{R}^3$, определенных уравнениями $[x, x] = 1$ and $[y, y] = -1, y_1 \geq 1$, соответственно, здесь $[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. В качестве ядра этих преобразований мы берем $\delta([x, y])$, где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Мы получаем два преобразования Радона $\mathcal{D}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{Y})$ и $\mathcal{D}(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$. Мы описываем ядра и образы этих преобразований. Для этого мы разлагаем полуторалинейную форму с ядром $\delta([x, y])$ по скалярным произведениям компонент Фурье.

Ключевые слова: гиперboloиды; преобразование Радона; обобщенные функции; представления; преобразования Пуассона и Фурье

Благодарности: Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 3.8515.2017/8.9).

Для цитирования: Молчанов В.Ф. Задачи Радона для гиперboloидов // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 432–449. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-432-449. (In Engl., Abstr. in Russian)

In this paper we offer a variant of Radon transforms for a pair of dual hyperboloids in $\mathbb{R}^3$: the one-sheeted hyperboloid $\mathcal{X}: [x, x] = 1$ ($[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$) and the upper sheet of the two-sheeted hyperboloid $\mathcal{Y}: [y, y] = -1, y_1 \geq 1$ (the Lobachevsky plane). For a kernel of these transforms we take $\delta([x, y])$, $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$, $\delta(t)$ being the Dirac delta function. This kernel gives two Radon transforms $R: \mathcal{D}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{Y})$ and $R^*: \mathcal{D}(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{X})$. We describe kernels and images of these transforms. For that we consider a sesqui-linear form with the kernel $\delta([x, y])$ and write the decomposition of this form into inner products of Fourier components. Results of this paper were announced in [4].

1. Hyperboloids

Let G be the group $\mathrm{SO}_0(1, 2)$, it is a connected group of linear transformations of $\mathbb{R}^3$, preserving the form

$$[x, y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

We consider that G acts on $\mathbb{R}^3$ from the right. In accordance with this we write vectors in the row form.

Let us take the following basis of the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the group G :

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

The Casimir element in the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$ is $(1/2)\Delta_{\mathfrak{g}}$, where

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = -L_0^2 + L_1^2 + L_2^2. \quad (1.2)$$

Consider subgroups K , H , A of the group G generating by elements L_0 , L_1 , L_2 , respectively. The subgroup K is a maximal compact subgroup of G .

Denote by $\mathcal{X}$ the one-sheeted hyperboloid $[x, x] = 1$, and by $\mathcal{Y}$ the upper sheet of the two-sheeted hyperboloid $[y, y] = -1$, $y_1 \geq 1$ (we consider that the x_1 -axis goes up). These hyperboloids $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ are homogeneous spaces of the group G with respect to translations $x \mapsto xg$, namely, $\mathcal{X} = G/H$ and $\mathcal{Y} = G/K$. The subgroups H and K are stabilizers of points $x^0 = (0, 0, 1) \in \mathcal{X}$ and $y^0 = (1, 0, 0) \in \mathcal{Y}$ respectively.

These hyperboloids have a G -invariant metric. It gives rise to the measures dx and dy and the Laplace–Beltrami operators $\Delta_{\mathcal{X}}$ and $\Delta_{\mathcal{Y}}$ respectively (all are G -invariant).

As local coordinates on the hyperboloids we can take any two variables from x_1, x_2, x_3 . For $\mathcal{Y}$ it is natural to take y_2, y_3 . Then we have

$$\begin{aligned} dx &= |x_1|^{-1} dx_2 dx_3, \quad dy = y_1^{-1} dy_2 dy_3, \\ \Delta_{\mathcal{X}} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + D_1^2 + D_1, \quad D_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ \Delta_{\mathcal{Y}} &= \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} + D_1^2 + D_1, \quad D_1 = y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_3}. \end{aligned}$$

If M is a manifold, then $\mathcal{D}(M)$ denotes the space of compactly supported infinitely differentiable $\mathbb{C}$ -valued functions on M , with the usual topology, and $\mathcal{D}'(M)$ denotes

the space of distributions on M — of antilinear continuous functionals on $\mathcal{D}(M)$. For a differentiable representation of a Lie group, we retain the same symbol for the corresponding representations of its Lie algebra and of the universal enveloping algebra.

Let us denote by $U_{\mathcal{X}}$ and $U_{\mathcal{Y}}$ representations of our group G by translations on functions on $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ respectively (quasiregular representations):

$$(U_{\mathcal{X}}(g)f)(x) = f(xg), \quad (U_{\mathcal{X}}(g)f)(y) = f(yg).$$

The representations $U_{\mathcal{X}}$ and $U_{\mathcal{Y}}$ on the spaces $L^2(\mathcal{X}, dx)$ and $L^2(\mathcal{Y}, dy)$ are unitary with respect to the inner products

$$\langle F, f \rangle_{\mathcal{X}} = \int_{\mathcal{X}} F(x) \overline{f(x)} dx, \quad \langle F, f \rangle_{\mathcal{Y}} = \int_{\mathcal{Y}} F(y) \overline{f(y)} dy. \quad (1.3)$$

We have

$$U_{\mathcal{X}}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \Delta_{\mathcal{X}}, \quad U_{\mathcal{Y}}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \Delta_{\mathcal{Y}}. \quad (1.4)$$

2. Representations of the group $\mathrm{SO}_0(1, 2)$

Recall some material about the principal non-unitary series of representations of the group $G = \mathrm{SO}_0(1, 2)$, see, for example, [5]. Let $\mathcal{C}^+$ be the cone $[x, x] = 0$, $x_1 > 0$. The group G acts transitively on it. For $\sigma \in \mathbb{C}$, let $\mathcal{D}_{\sigma}(\mathcal{C}^+)$ be the space of C^{∞} functions φ on $\mathcal{C}^+$ homogeneous of degree σ :

$$\varphi(tx) = t^{\sigma} \varphi(x), \quad t > 0.$$

Let T_{σ} be the representation of G acting on this space by translations:

$$(T_{\sigma}(g)\varphi)(x) = \varphi(xg).$$

Take the section S of the cone $\mathcal{C}^+$ by the plane $x_1 = 1$, it is a circle consisting of points $s = (1, \sin \alpha, \cos \alpha)$. The Euclidean measure on S is $ds = d\alpha$. For a function φ on S , sometimes we write $\varphi(\alpha)$ instead of $\varphi(s)$. The representation T_{σ} can be realized on the space $\mathcal{D}(S)$ as follows (index 1 indicates the first coordinate of a vector):

$$(T_{\sigma}(g)\varphi)(s) = \varphi\left(\frac{sg}{(sg)_1}\right) (sg)_1^{\sigma}.$$

The element $\Delta_{\mathfrak{g}}$, see (1.2), goes to a scalar operator:

$$T_{\sigma}(\Delta_{\mathfrak{g}}) = \sigma(\sigma + 1)E. \quad (2.1)$$

The Hermitian form

$$\langle \psi, \varphi \rangle_S = \int_S \psi(s) \overline{\varphi(s)} ds \quad (2.2)$$

is invariant with respect to the pair $(T_{\sigma}, T_{-\bar{\sigma}-1})$, i. e.

$$\langle T_{\sigma}(g)\psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, T_{-\bar{\sigma}-1}(g^{-1})\varphi \rangle_S. \quad (2.3)$$

This formula follows from $d\tilde{s} = (sg)_1^{-1} ds$, where $\tilde{s} = (sg)/(sg)_1$.

Define an operator A_σ in $\mathcal{D}(S)$:

$$(A_\sigma \varphi)(s) = \int_S (-[s, u])^{-\sigma-1} \varphi(u) du.$$

The integral converges absolutely for $\operatorname{Re} \sigma < -1/2$ and can be continued as a meromorphic function to the whole σ -plane. It has simple poles at $\sigma \in -1/2 + \mathbb{N}$. Here and further $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. For A_σ we have

$$\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S = \langle \psi, A_{\bar{\sigma}} \varphi \rangle_S. \quad (2.4)$$

The operator A_σ intertwines T_σ and $T_{-\sigma-1}$, i. e.

$$T_{-\sigma-1}(g)A_\sigma = A_\sigma T_\sigma(g), \quad g \in G.$$

A sesqui-linear form $\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S$ is invariant with respect to the pair $(T_\sigma, T_{\bar{\sigma}})$. In particular, for $\sigma \in \mathbb{R}$, this form is an invariant Hermitian form for T_σ .

Take a basis $\psi_m(\alpha) = e^{im\alpha}$, $m \in \mathbb{Z}$, in $\mathcal{D}(S)$. It consists of eigenfunctions of A_σ :

$$A_\sigma \psi_m = a(\sigma, m) \psi_m, \quad (2.5)$$

where

$$a(\sigma, m) = 2^{\sigma+2} \pi (-1)^m \frac{\Gamma(-2\sigma-1)}{\Gamma(-\sigma+m)\Gamma(-\sigma-m)}. \quad (2.6)$$

The composition $A_\sigma A_{-\sigma-1}$ is a scalar operator:

$$A_\sigma A_{-\sigma-1} = \frac{1}{8\pi\omega(\sigma)} \cdot E$$

where $\omega(\sigma)$ is a “Plancherel measure” (see (5.2)):

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{32\pi^2} (2\sigma+1) \cot \sigma\pi. \quad (2.7)$$

The representation T_σ can be extended to the space $\mathcal{D}'(S)$ of distributions on S by formula (2.3) where ψ is a distribution and $\langle \psi, \varphi \rangle_S$ is the value of the distribution ψ at a test function φ . It is an extension in fact, since $\mathcal{D}(S)$ can be embedded into $\mathcal{D}'(S)$ by means of the form (2.2), namely, we assign to a function $\psi \in \mathcal{D}(S)$ the functional $\varphi \mapsto \langle \psi, \varphi \rangle_S$ in $\mathcal{D}'(S)$.

Similarly the operator A_σ can be extended to the space $\mathcal{D}'(S)$ by means of formula (2.4).

If σ is not integer, then T_σ is irreducible and T_σ is equivalent to $T_{-\sigma-1}$ (by A_σ or $\hat{A}_\sigma$).

Let $\sigma \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Subspaces $V_{\sigma,+}$ and $V_{\sigma,-}$ spanned by ψ_m for which $m \geq -\sigma$ and $m \leq \sigma$ respectively are invariant. For $\sigma < 0$ they are irreducible and orthogonal to each other. For $\sigma \geq 0$ their intersection E_σ is irreducible and has dimension $2\sigma+1$.

Let $V_n^d = \mathcal{D}(S)/E_n$ and $V_{-n-1}^d = V_{-n-1,+} + V_{-n-1,-}$. Let us denote by T_σ^d , $\sigma \in \mathbb{Z}$, the representation on V_σ^d generated by T_σ . The operator A_n vanishes on E_n and gives rise to the equivalence $T_n^d \sim T_{-n-1}^d$.

There are four series of unitarizable irreducible representations: the *continuous series* consisting of representations T_σ with $\sigma = -1/2 + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, the inner product is (2.2); the *complementary series* consisting of T_σ with $-1 < \sigma < 1$, the inner product is $\langle A_\sigma \psi, \varphi \rangle_S$ with a factor; the *holomorphic* and *antiholomorphic* series. We need only their sum T_σ^d . We shall call T_σ^d the representations of *discrete series*. For $\varphi \in \mathcal{D}(S)$, denote by $\tilde{\varphi}$ the coset of φ modulo E_n . Then the invariant inner product $(\cdot, \cdot)_n$ for T_n^d is

$$(\tilde{\psi}, \tilde{\varphi})_n = c_n \langle A_n \psi, \varphi \rangle_S, \quad c_n = a(n, n+1)^{-1}. \quad (2.8)$$

3. Poisson and Fourier transforms

First we determine distributions θ in $\mathcal{D}'(S)$ invariant with respect to the subgroup H under the representations T_σ . We shall use the following notation for a character of the group $\mathbb{R}^*$:

$$t^{\lambda, m} = |t|^\lambda (\operatorname{sgn} t)^m,$$

where $t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$. In fact this character depends only on m modulo 2. Here and further the sign “ $\equiv$ ” means the congruence modulo 2.

It is easy to check that the distribution

$$\theta_{\sigma, \varepsilon} = s_3^{\sigma, \varepsilon} = [x^0, s]^{\sigma, \varepsilon},$$

where $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, is H -invariant. Sometimes we write an integer instead of ε with the same parity as ε . As a function of σ , $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ is a meromorphic function — with simple poles at points $\sigma \in -1 - \varepsilon - 2\mathbb{N}$. Its residue at $\sigma = -n - 1$, $n \equiv \varepsilon$, is the distribution $\operatorname{const} \cdot \delta^{(n)}(s_3)$ concentrated at two points $s = (1, \pm 1, 0)$. Here $\delta(t)$ is the Dirac delta function on the real line (a linear continuous functional on $\mathcal{D}(\mathbb{R})$). The space of H -invariants has dimension 2 for $\sigma \neq -n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, and dimension 3 for $\sigma = -n - 1$. Every irreducible subfactor for T_σ , $\sigma \in \mathbb{Z}$, contains, up to a factor, precisely one H -invariant. In particular, $\theta_{-n-1, n+1}$ and $\theta_{n, n+1}$ have non-zero projections into $V'_{-n-1, \pm}$ and $\mathcal{D}'(S)/V'_{n, \mp}$ respectively.

The operator A_σ carries $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ to $\theta_{-\sigma-1, \varepsilon}$ with a factor:

$$A_\sigma \theta_{\sigma, \varepsilon} = j(\sigma, \varepsilon) \theta_{-\sigma-1, \varepsilon}, \quad (3.1)$$

where

$$j(\sigma, \varepsilon) = 2^{-\sigma} \pi^{-1/2} \Gamma\left(-\sigma - \frac{1}{2}\right) \Gamma(\sigma + 1) [1 - (-1)^\varepsilon \cos \sigma \pi]. \quad (3.2)$$

It is easy to check that

$$j(\sigma, \varepsilon) j(-\sigma - 1, \varepsilon) = (8\pi \omega(\sigma))^{-1},$$

where $\omega(\sigma)$ is given by (2.7) or (5.2). The factor $j(\sigma, \varepsilon)$ has simple poles at $\sigma \in -1/2 + \mathbb{N}$.

By a general scheme [3], the H -invariant $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ gives rise to the Poisson kernel $P_{\sigma, \varepsilon}(x, s) = [x, s]^{\sigma, \varepsilon}$, $x \in \mathcal{X}$, $s \in S$. This kernel gives rise to two transforms. The first of them, the *Poisson transform* $P_{\sigma, \varepsilon} : \mathcal{D}(S) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X})$ is a linear continuous operator defined as follows:

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(x) = \int_S [x, s]^{\sigma, \varepsilon} \varphi(s) ds.$$

It intertwines $T_{-\sigma-1}$ with $U_{\mathcal{X}}$, therefore, its image consists of eigenfunctions of the Laplace–Beltrami operator:

$$\Delta_{\mathcal{X}} \circ P_{\sigma,\varepsilon} = \sigma(\sigma+1)P_{\sigma,\varepsilon}$$

of parity ε (see (2.1) and (1.4)). As a function in σ , the Poisson transform behaves like $\theta_{\sigma,\varepsilon}$: it depends on σ meromorphically and has simple poles at $\sigma \in -1 - \varepsilon - 2\mathbb{N}$.

Formula (3.1) gives

$$P_{\sigma,\varepsilon}A_{\sigma} = j(\sigma,\varepsilon)P_{-\sigma-1,\varepsilon}. \quad (3.3)$$

Consider $\sigma \in \mathbb{Z}$. The transform $P_{-n-1,n+1}$ vanishes on E_n , it generates an operator on $\mathcal{D}(S)/E_n$ which intertwines T_n^d with $U_{\mathcal{X}}$. The Poisson transform $P_{n,n+1}$ considered on V_{-n-1}^d intertwines T_{-n-1}^d with $U_{\mathcal{X}}$. By (3.3), $P_{n,n+1}$ has the same image as $P_{-n-1,n+1}$.

The second transform generated by the Poisson kernel is the *Fourier transform* $F_{\sigma,\varepsilon} : \mathcal{D}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{D}(S)$ defined by

$$(F_{\sigma,\varepsilon}f)(s) = \int_{\mathcal{X}} [x, s]^{\sigma,\varepsilon} f(x) dx.$$

It is meromorphic in σ with simple poles at points $\sigma \in -1 - \varepsilon - 2\mathbb{N}$. It intertwines $U_{\mathcal{X}}$ with T_{σ} . It follows from (3.1) that

$$A_{\sigma}F_{\sigma,\varepsilon} = j(\sigma,\varepsilon)F_{-\sigma-1,\varepsilon}. \quad (3.4)$$

For a function $f \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$, let us call two functions $F_{\sigma,\varepsilon}f$, $\varepsilon = 0, 1$, the *Fourier components* of f corresponding to the representation T_{σ} .

The Fourier and Poisson transforms are conjugate to each other with respect to forms (1.3) and (2.2):

$$\langle P_{\sigma,\varepsilon}\varphi, f \rangle_{\mathcal{X}} = \langle \varphi, F_{\sigma,\varepsilon}f \rangle_S.$$

This relation allows to extend the Poisson transform to distributions on S .

Consider the reducible case. The *Fourier transform* F_n corresponding to T_n^d is defined as the map of $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ to $\mathcal{D}(S)/E_n$ which assigns to $f \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$ the corresponding coset of the function $F_{n,n+1}f$. By (2.8) and (3.4) we have

$$(F_n f, F_n h)_n = d_n \langle F_{-n-1,n+1}f, F_{n,n+1}h \rangle_S, \quad d_n = 2n!^2 / \pi(2n+1)!.$$

The *Fourier transform* corresponding to T_{-n-1}^d is $F_{-n-1,n+1}$.

The representation T_{σ} has one up to a factor K -invariant, it is the function τ_{σ} equal to 1 identically on S :

$$\tau_{\sigma}(s) = [y^0, s]^{\sigma} = 1.$$

The representations of the discrete series have no K -invariants.

The corresponding Poisson transform $Q_{\sigma} : \mathcal{D}(S) \rightarrow C^{\infty}(\mathcal{Y})$ and Fourier transform $\mathcal{D}(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{D}(S)$ are defined by

$$\begin{aligned} (Q_{\sigma}\varphi)(y) &= \int_S [-y, s]^{\sigma} \varphi(s) ds, \\ (G_{\sigma}h)(s) &= \int_{\mathcal{Y}} [-y, s]^{\sigma} h(y) dy. \end{aligned}$$

Notice that $[-y, s] > 0$ for all $y \in \mathcal{Y}$ and $s \in S$.

The Poisson transform Q_σ intertwines $T_{-\sigma-1}$ with $U_{\mathcal{Y}}$, therefore, its image consists of eigenfunctions of the Laplace–Beltrami operator:

$$\Delta_{\mathcal{Y}} \circ Q_{\sigma, \varepsilon} = \sigma(\sigma + 1)Q_{\sigma, \varepsilon}. \quad (3.5)$$

4. Spherical functions

Let $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$. Let us define a spherical function $\Psi_{\sigma, \varepsilon}$ on the hyperboloid $\mathcal{Y}$ as follows

$$\Psi_{\sigma, \varepsilon}(y) = \langle T_\sigma(g)\theta_{\sigma, \varepsilon}, \tau_{-\bar{\sigma}-1} \rangle_S \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \theta_{\sigma, \varepsilon}, T_{-\bar{\sigma}-1}(g^{-1})\tau_{-\bar{\sigma}-1} \rangle_S \\ &= \int_S \theta_{\sigma, \varepsilon}[-y, s]^{-\sigma-1} ds, \end{aligned} \quad (4.2)$$

where $g \in G$ is such that $y^0 g = y$. As the distribution $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ does, the spherical function $\Psi_{\sigma, \varepsilon}$ is given by an integral absolutely convergent for $\operatorname{Re} \sigma > -1$ and can be continued analytically in σ to a meromorphic function. It has poles where $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ has and of the same (the first) order.

The function $\Psi_{\sigma, \varepsilon}(y)$ is a function of class C^∞ on $\mathcal{Y}$ invariant with respect to H :

$$\Psi_{\sigma, \varepsilon}(yh) = \Psi_{\sigma, \varepsilon}(y), \quad h \in H.$$

Therefore, it depends on $y_3 = [x^0, y]$ only:

$$\Psi_{\sigma, \varepsilon}(y) = \Phi_{\sigma, \varepsilon}(y_3), \quad (4.3)$$

where $\Phi_{\sigma, \varepsilon}(c)$ is a function in $C^\infty(\mathbb{R})$.

Lemma 4.1. *The function $\Phi_{\sigma, \varepsilon}$ has the following integral representation:*

$$\Phi_{\sigma, \varepsilon}(c) = \int_0^{2\pi} \left(c + \sqrt{c^2 + 1} \cdot \cos \alpha \right)^{\sigma, \varepsilon} d\alpha. \quad (4.4)$$

P r o o f. Let us take in (4.1) as g the matrix $a = \exp t L_2$, see (1.1), in A :

$$a = \begin{pmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{pmatrix}.$$

We have

$$(T_\sigma(a)\theta_{\sigma, \varepsilon})(s) = [x^0, sa]^{\sigma, \varepsilon} = (\sinh t + s_3 \cosh t)^{\sigma, \varepsilon}.$$

By (4.1), the value of $\Psi_{\sigma, \varepsilon}$ at the point $y^0 a = (\cosh t, 0, \sinh t)$ is just (4.4) with $c = \sinh t$. $\square$

It follows from (4.4) that the function $\Phi_{\sigma, \varepsilon}$ has parity ε :

$$\Phi_{\sigma, \varepsilon}(-c) = (-1)^\varepsilon \Phi_{\sigma, \varepsilon}(c).$$

Equality (4.2) shows that the spherical function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ is the Poisson transform of the H -invariant:

$$\Psi_{\sigma,\varepsilon} = Q_{-\sigma-1}\theta_{\sigma,\varepsilon}. \quad (4.5)$$

Consider $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ as a distribution on $\mathcal{Y}$:

$$\langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}} = \int_{\mathcal{Y}} \Psi_{\sigma,\varepsilon}(y) \overline{f(y)} dy, \quad (4.6)$$

where $f \in \mathcal{D}(\mathcal{Y})$. The right hand side in (4.6) can be rewritten as an iterated integral, then we obtain:

$$\langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\sigma,\varepsilon}(c) \overline{(Mf)(c)} dc, \quad (4.7)$$

where

$$(Mf)(c) = \int_{\mathcal{Y}} \delta(y_3 - c) f(y) dy,$$

The map M assigns to a function f its integrals over H -orbits. It is a continuous operator from $\mathcal{D}(\mathcal{Y})$ onto $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Lemma 4.2. *The value (4.6) is expressed in terms of Fourier components:*

$$\langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}} = \langle \theta_{\sigma,\varepsilon}, G_{-\sigma-1}f \rangle_s. \quad (4.8)$$

P r o o f. Let $h(y)$ be a majorant of the function $f(y)$, depending on y_1 only. Then for $\operatorname{Re}\sigma > -1$ the right hand side in (4.8) is majorized by the integral

$$\int_0^{2\pi} |\cos \alpha|^\tau d\alpha \int_{\mathcal{Y}} |[y, s]|^{-\tau-1} h(y) dy, \quad (4.9)$$

where $\tau = \operatorname{Re}\sigma$. In fact, the integral over $\mathcal{Y}$ here does not depend on s . Therefore, integral (4.9) converges absolutely and the order of integration can be inverted. So we get equality (4.8) for $\operatorname{Re}\sigma > -1$. To other σ this equality is extended by analyticity. $\square$

Let Φ be a distribution on $\mathcal{Y}$ invariant with respect to H . Assign to it two things: a *convolution* with Φ of functions f in $\mathcal{D}(\mathcal{Y})$ and a sesqui-linear functional K on the pair $(\mathcal{D}(\mathcal{X}), \mathcal{D}(\mathcal{Y}))$. The convolution $\Phi \star f$ is the following function on $\mathcal{X}$:

$$\begin{aligned} (\Phi \star f)(x) &= \langle \Phi, U_{\mathcal{Y}}(g) \overline{f} \rangle_{\mathcal{Y}} \\ &= \int_{\mathcal{Y}} \Phi(y) f(yg) dy, \end{aligned}$$

the functional is:

$$\begin{aligned} K(\Phi|h, f) &= \langle h, \overline{\Phi \star f} \rangle_{\mathcal{X}} \\ &= \int_{\mathcal{X}} h(x) \langle \Phi, U_{\mathcal{Y}}(g) f \rangle_{\mathcal{Y}} dx \\ &= \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \Phi(yg^{-1}) h(x) \overline{f(y)} dx dy, \end{aligned}$$

where $h \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$, $f \in \mathcal{D}(\mathcal{Y})$ and g is an arbitrary element in G carrying x^0 to x . Since Φ is H -invariant, these formulae do not depend on the choice of g for given x . The convolution is a linear map $\mathcal{D}(\mathcal{Y}) \rightarrow C^\infty(\mathcal{X})$, intertwining $U_{\mathcal{Y}}$ and $U_{\mathcal{X}}$:

$$\Phi \star (U_{\mathcal{Y}}(g)f) = U_{\mathcal{X}}(g) (\Phi \star f).$$

For the spherical function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$, the convolution and the functional are expressed in terms of the Poisson and Fourier transforms:

$$\begin{aligned} (\Psi_{\sigma,\varepsilon} \star f)(x) &= (P_{\sigma,\varepsilon} G_{-\sigma-1} f)(x), \\ K(\Psi_{\sigma,\varepsilon} | h, f) &= \langle F_{\sigma,\varepsilon} h, G_{-\bar{\sigma}-1} f \rangle_S. \end{aligned} \quad (4.10)$$

The kernel $K_{\sigma,\varepsilon}(x, y)$ of the functional (4.10) is

$$K_{\sigma,\varepsilon}(x, y) = \int_S [x, s]^{\sigma,\varepsilon} [-y, s]^{-\sigma-1} ds.$$

Lemma 4.3. *The function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ has the following property of symmetry in σ :*

$$\Psi_{-\sigma-1,\varepsilon} = -\frac{1 + (-1)^\varepsilon \cos \sigma\pi}{\sin \sigma\pi} \cdot \Psi_{\sigma,\varepsilon}. \quad (4.11)$$

P r o o f. By Lemma 4.2, (3.1), (2.4), (2.5) and Lemma 4.2 again we have:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{-\sigma-1,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}} &= \langle \theta_{-\sigma-1,\varepsilon}, G_{\bar{\sigma}} f \rangle_S \\ &= j(\sigma, \varepsilon)^{-1} \langle A_{\sigma} \theta_{\sigma,\varepsilon}, G_{\bar{\sigma}} f \rangle_S \\ &= j(\sigma, \varepsilon)^{-1} \langle \theta_{\sigma,\varepsilon}, A_{\bar{\sigma}} G_{\bar{\sigma}} f \rangle_S \\ &= a(\sigma, 0) j(\sigma, \varepsilon)^{-1} \langle \theta_{\sigma,\varepsilon}, G_{-\bar{\sigma}-1} f \rangle_S \\ &= a(\sigma, 0) j(\sigma, \varepsilon)^{-1} \langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}}. \end{aligned}$$

Substituting here values of $a(\sigma, 0)$ and $j(\sigma, \varepsilon)$ from (2.6) and (3.2), we get (4.11). $\square$

Lemma 4.4. *The spherical function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ is an eigenfunction of the Laplace–Beltrami operator:*

$$\Delta_{\mathcal{Y}} \Psi_{\sigma,\varepsilon} = \sigma(\sigma + 1) \Psi_{\sigma,\varepsilon}. \quad (4.12)$$

P r o o f. The function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ is the Poisson transform of the function $\theta_{\sigma,\varepsilon}$, see (4.5). It remains to remember (3.5). $\square$

On functions depending on $y_3 = c$ only, the operator $\Delta_{\mathcal{Y}}$ becomes to the following differential operator (the H -radial part of $\Delta_{\mathcal{Y}}$):

$$L = (c^2 + 1) \frac{\partial^2}{\partial c^2} + 2c \frac{\partial}{\partial c}. \quad (4.13)$$

Lemma 4.5. *The function $\Phi_{\sigma,\varepsilon}$, see (4.3) and (4.4), is an eigenfunction of L :*

$$L \Phi_{\sigma,\varepsilon} = \sigma(\sigma + 1) \Phi_{\sigma,\varepsilon}.$$

The lemma follows immediately from Lemma 4.4.

Theorem 4.1. *The spherical function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}(y)$ is expressed in terms of the Legendre functions P_σ (see [2, Ch. III]) of the imaginary argument:*

$$\Psi_{\sigma,\varepsilon}(y) = \frac{2\pi}{e^{i\sigma\pi/2} + (-1)^\varepsilon e^{-i\sigma\pi/2}} \left\{ P_\sigma(iy_3) + (-1)^\varepsilon P_\sigma(-iy_3) \right\}. \quad (4.14)$$

P r o o f. Denote for brevity:

$$P_\sigma(it) = B_\sigma(t), \quad (4.15)$$

also for a function $\varphi(t)$ on $\mathbb{R}$ we shall denote

$$\widehat{\varphi}(t) = \varphi(-t).$$

Equality (4.14) is equivalent to the following expression of the function $\Phi_{\sigma,\varepsilon}$:

$$\Phi_{\sigma,\varepsilon}(c) = \frac{2\pi}{e^{i\sigma\pi/2} + (-1)^\varepsilon e^{-i\sigma\pi/2}} \left\{ B_\sigma(c) + (-1)^\varepsilon \widehat{B}_\sigma(c) \right\}. \quad (4.16)$$

So we have to prove (4.16).

The Legendre function $P_\sigma(z)$ is analytic in the z -plane with the cut $(-\infty, -1]$, satisfies the equation:

$$\left((z^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial}{\partial z} \right) w = \sigma(\sigma + 1)w \quad (4.17)$$

and has the integral representation

$$P_\sigma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \cos \alpha \right)^\sigma d\alpha. \quad (4.18)$$

Let σ be not integer. Then the functions $P_\sigma(z)$ and $\widehat{P}_\sigma(z)$ form a basis of solutions of equation (4.17). For $z = ic$ equation (4.17) becomes the equation:

$$Lw = \sigma(\sigma + 1)w.$$

In virtue of Lemma 4.5 the function $\Phi_{\sigma,\varepsilon}$ is a linear combination of functions B_σ and $\widehat{B}_\sigma$. Coefficients of this linear combination could be found out by computing values of functions $\Phi_{\sigma,\varepsilon}$, B_σ and $\widehat{B}_\sigma$ and their derivatives at the point $c = 0$, using (4.6) and explicit expressions [2, 3.4(20),(23)]. But it is more convenient for us to find them in another way.

Let z tend to ic , $c \in \mathbb{R}$, in (4.18) such that $\operatorname{Re} z > 0$. We get:

$$B_\sigma(c) = \frac{1}{2\pi} e^{i\sigma\pi/2} \int_0^{2\pi} \left(c + \sqrt{c^2 + 1} \cos \alpha - i0 \right)^\sigma d\alpha. \quad (4.19)$$

Denote

$$Z_\sigma(c) = \int_0^{2\pi} \left(c + \sqrt{c^2 + 1} \cos \alpha - i0 \right)_+^\sigma d\alpha.$$

Then

$$\widehat{Z}_\sigma(c) = \int_0^{2\pi} \left(c + \sqrt{c^2 + 1} \cos \alpha - i0 \right)_-^\sigma d\alpha.$$

Applying to (4.19) the formula:

$$(t - i0)^\sigma = t_+^\sigma + e^{-i\sigma\pi} t_-^\sigma,$$

we obtain

$$B_\sigma = \frac{1}{2\pi} \left[e^{i\sigma\pi/2} Z_\sigma + e^{-i\sigma\pi/2} \widehat{Z}_\sigma \right], \quad (4.20)$$

whence

$$\widehat{B}_\sigma = \frac{1}{2\pi} \left[e^{-i\sigma\pi/2} Z_\sigma + e^{i\sigma\pi/2} \widehat{Z}_\sigma \right]. \quad (4.21)$$

From (4.20) and (4.21) we have

$$Z_\sigma = \frac{\pi}{i \sin \sigma\pi} \left[e^{i\sigma\pi/2} B_\sigma - e^{-i\sigma\pi/2} \widehat{B}_\sigma \right], \quad (4.22)$$

$$\widehat{Z}_\sigma = \frac{\pi}{i \sin \sigma\pi} \left[-e^{-i\sigma\pi/2} B_\sigma + e^{i\sigma\pi/2} \widehat{B}_\sigma \right]. \quad (4.23)$$

Since

$$\Phi_{\sigma,\varepsilon} = Z_\sigma + (-1)^\varepsilon \widehat{Z}_\sigma.$$

we obtain (4.16) by (4.22) and (4.23). $\square$

Let us establish some estimates for spherical functions of the continuous series ($\sigma = -1/2 + i\rho$). They show that values of these spherical functions at f decrease rapidly when their parameter ρ tends to infinity.

Theorem 4.2. *Let $\sigma = -1/2 + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$. For any compact set $W \subset \mathcal{Y}$, there exists a number $C > 0$ such that for any $f \in \mathcal{D}(\mathcal{Y})$ with the support in W the following estimate holds:*

$$|\langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}}| \leq C \cdot \max_y |(\Delta_{\mathcal{Y}}^m f)(y)| (\rho^2 + 1/4)^{-m}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

P r o o f. Take $h \in \mathcal{D}(\mathcal{Y})$ depending on y_1 only, such that $h(y) \geq 0$, $h(y) = 1$ on W . Then μh , where $\mu = \max |f(y)|$, is a majorant for f depending on y_1 only. Arguing as in the proof of Lemma 4.2, we obtain

$$|\langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}}| \leq C\mu, \quad (4.25)$$

where C is the number

$$C = \int_0^{2\pi} |\cos \alpha|^{-1/2} d\alpha \int_{\mathcal{Y}} [-y, s]^{-1/2} h(y) dy.$$

Now apply the estimate (4.25) to the function $\Delta_{\mathcal{Y}}^m f$, $m \in \mathbb{N}$, transfer the operator $\Delta_{\mathcal{Y}}$ to the function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$, since it is self-adjoint, and use (4.12). Since $|\sigma(\sigma + 1)| = \rho^2 + 1/4$ for $\sigma = -1/2 + i\rho$, we get (4.24). $\square$

Let us write expressions of $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ for σ integer. In the notation $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ sometimes it is convenient to write an integer instead of ε with the same parity as ε .

Let $n \in \mathbb{N}$. Let first $\sigma = n$. For $\Psi_{n,n+1}$ we have to evaluate an indeterminacy in (4.14). We have

$$\begin{aligned}\Psi_{n,n}(y) &= 2\pi i^{-n} P_n(iy_3), \\ \Psi_{n,n+1} &= -4i^{1-n} Q_n^*(iy_3),\end{aligned}$$

where $P_n(z)$ is the Legendre polynomial and $Q_n^*(z)$ is the Legendre function which differs from the Legendre function of the second kind $Q_n(z)$ by the cut on the z -plane: for $Q_n(z)$ one takes the cut $[-1, 1]$, but for $Q_n^*(z)$ one has to take the cut $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; therefore, we have:

$$Q_n^*(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{1+z}{1-z} - W_{n-1}(z),$$

cf. [2, 3.6(24)], where the principal branch of the logarithm is taken and $W_{n-1}(z)$ is a polynomial of degree $n-1$ indicated in [2, 3.6.2].

For $\sigma = -n-1$ we use the relation (4.11). For $\varepsilon \equiv n$ the function $\Psi_{\sigma,\varepsilon}$ has a pole at $\sigma = -n-1$ because of $\theta_{\sigma,\varepsilon}$. We have

$$\begin{aligned}\Psi_{-n-1,n+1} &= 0, \\ \text{Res}_{\sigma=-n-1} \Psi_{\sigma,n} &= (-1)^{n+1} (2/\pi) \Psi_{n,n}.\end{aligned}$$

5. Eigenfunction decomposition of the radial part of the Laplace-Beltrami operator

In this Section we obtain the eigenfunction decomposition of the operator (see (4.13))

$$L = (c^2 + 1) \frac{\partial^2}{\partial c^2} + 2c \frac{\partial}{\partial c}$$

defined on the real line $\mathbb{R}$. We use the function $\Phi_{\sigma,\varepsilon}(c)$, see (4.3) and (4.4). Recall that it has parity ε and satisfies the equation:

$$Lw = \sigma(\sigma + 1)w.$$

Let us denote by (φ, ψ) the $L^2(\mathbb{R})$ inner product of functions φ, ψ :

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(c) \overline{\psi(c)} dc.$$

Theorem 5.1. *There is the following eigenfunction decomposition of the operator L :*

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \sum_{\varepsilon} (\varphi, \Phi_{\sigma,\varepsilon}) (\Phi_{\sigma,\varepsilon}, \psi) \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho, \quad (5.1)$$

where

$$\omega(\sigma) = \frac{1}{32\pi^2} (2\sigma + 1) \cot \sigma \pi \quad (5.2)$$

so that

$$\omega\left(-\frac{1}{2} + i\rho\right) = \frac{1}{16\pi^2} \rho \tanh \rho \pi.$$

P r o o f. Let us write the resolvent $R_\lambda = (\lambda E - L)^{-1}$ of the operator L . Let $h \in L^2(\mathbb{R})$ and $R_\lambda h = f$, then $h = (\lambda E - L)f$, so that

$$Lf - \lambda f = -h. \quad (5.3)$$

Let us take λ in the form $\lambda = \sigma(\sigma + 1)$. The correspondence $\sigma \mapsto \lambda$ maps the half plane $\operatorname{Re} \sigma > -1/2$ onto the λ -plane with the cut $(-\infty, -1/4]$ one-to-one.

Let f_1, f_2 be eigenfunctions of the operator L with the eigenvalue $\lambda = \sigma(\sigma + 1)$ with $\operatorname{Re} \sigma > -1/2$. They behave at infinity $(\pm\infty)$ as $A|c|^\sigma + B|c|^{-\sigma-1}$. Let us take them such that they are square integrable at $+\infty$ and $-\infty$ respectively. Then for $c \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} f_1(c) &\sim B_1 c^{-\sigma-1}, \\ f_2(c) &\sim A_2 c^\sigma + B_2 c^{-\sigma-1}, \end{aligned}$$

and for $c \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} f_1(c) &\sim C_1 |c|^\sigma + D_1 |c|^{-\sigma-1}, \\ f_2(c) &\sim D_2 |c|^{-\sigma-1}. \end{aligned}$$

The wronskian W of these functions is

$$W = \frac{W_0}{c^2 + 1}, \quad W_0 = (2c + 1)B_1 A_2.$$

We have already several eigenfunctions: $P_\sigma(ic)$, $P_\sigma(-ic)$, $Z_\sigma(c)$, $\widehat{Z}_\sigma(c)$, $\Phi_{\sigma,\varepsilon}(c)$, $\varepsilon = 0, 1$. By [2, 3.2(18)] the Legendre functions behave when $c \rightarrow +\infty$ as follows:

$$\begin{aligned} P_\sigma(ic) &\sim p(\sigma) \cdot e^{i\sigma\pi/2} \cdot c^\sigma + p(-\sigma - 1) \cdot e^{i(-\sigma-1)\pi/2} \cdot c^{-\sigma-1}, \\ P_\sigma(-ic) &\sim p(\sigma) \cdot e^{-i\sigma\pi/2} \cdot c^\sigma + p(-\sigma - 1) \cdot e^{i(\sigma+1)\pi/2} \cdot c^{-\sigma-1}, \end{aligned}$$

where

$$p(\sigma) = 2^\sigma \pi^{-1} B\left(\sigma + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$B(a, b)$ being the Euler beta function.

By (4.22), (4.22) it gives that when $c \rightarrow +\infty$ we have

$$\begin{aligned} Z_\sigma(c) &\sim 2\pi \cdot p(\sigma) \cdot c^\sigma - \frac{2\pi}{\sin \sigma\pi} \cdot p(-\sigma - 1) \cdot c^{-\sigma-1}, \\ \widehat{Z}_\sigma(c) &\sim 2\pi \cdot \cot \sigma\pi \cdot p(-\sigma - 1) \cdot c^{-\sigma-1}. \end{aligned}$$

Therefore, as a mentioned-above basis f_1, f_2 of solutions of the equation $Lw = \lambda w$, $\lambda = \sigma(\sigma + 1)$, we can take the pair $\widehat{Z}_\sigma, Z_\sigma$. Then

$$\begin{aligned} W_0 &= (2\sigma + 1) \cdot 2\pi p(\sigma) \cdot 2\pi \cot \sigma\pi \cdot p(-\sigma - 1) \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

Therefore, the solution f of equation (5.3) is

$$f(c) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \widehat{Z}_\sigma(c) \int_{-\infty}^c Z_\sigma(t) h(t) dt + Z_\sigma(c) \int_c^\infty \widehat{Z}_\sigma(t) h(t) dt \right\}.$$

Thus, for $\text{Im}\lambda \neq 0$, the resolvent R_λ is an integral operator with the kernel

$$K_\lambda(c, t) = \begin{cases} (1/4\pi)\widehat{Z}_\sigma(c)Z_\sigma(t), & c > t, \\ (1/4\pi)Z_\sigma(c)\widehat{Z}_\sigma(t), & c < t, \end{cases} \quad (5.4)$$

here $\lambda = \sigma(\sigma + 1)$ and σ belongs to the half plane $\text{Re}\sigma > -1/2$ with the cut along the real axis.

Let $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$. By the Titchmarsh–Kodaira theorem [1, XIII] we have

$$(\varphi, \psi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (R_{\lambda - i\varepsilon} \varphi, \psi) d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} (R_{\lambda + i\varepsilon} \varphi, \psi) d\lambda \right].$$

Let us pass to σ . Then $d\lambda = (2\sigma + 1)d\sigma$ and we denote $S_\sigma = R_\lambda$. The operator function S_σ is analytic in the half plane $\text{Re}\sigma > -1/2$. Therefore,

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\sigma + 1)(S_\sigma \varphi, \psi) \Big|_{\sigma = -1/2 + i\rho} d\rho.$$

We can keep here only the even part in ρ of the integrand:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (2\sigma + 1) ((S_\sigma - S_{-\sigma-1})\varphi, \psi) \Big|_{\sigma = -1/2 + i\rho} d\rho.$$

Let us compute the kernel $M_\sigma(c, t)$ of the operator $S_\sigma - S_{-\sigma-1}$. Let $c > t$. By (5.4) we have

$$M_\sigma(c, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \widehat{Z}_\sigma(c)Z_\sigma(t) - \widehat{Z}_{-\sigma-1}(c)Z_{-\sigma-1}(t) \right\}$$

Let us insert here (4.22) and (4.22) and use that the Legendre function P_σ is unchanged under $\sigma \mapsto -\sigma - 1$. We obtain (recall notation (4.15)):

$$M_\sigma(c, t) = -\frac{\pi \cos \sigma\pi}{2 \sin^2 \sigma\pi} \left\{ B_\sigma(c)\widehat{B}_\sigma(t) + \widehat{B}_\sigma(c)B_\sigma(t) \right\}. \quad (5.5)$$

For $c < t$, we obtain the same expression.

Further, if $\sigma = -1/2 + i\rho$, then for the Legendre function P_σ on the imaginary axis we have

$$\overline{P_\sigma(ic)} = P_{\overline{\sigma}}(-ic) = P_{-\sigma-1}(-ic) = P_\sigma(-ic),$$

or, in terms of B_σ :

$$\overline{B_\sigma(c)} = \widehat{B}_{\overline{\sigma}}(c) = \widehat{B}_{-\sigma-1}(c) = \widehat{B}_\sigma(c).$$

Therefore, equality (5.5) gives

$$\begin{aligned} (\varphi, \psi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(2\sigma + 1) \cos \sigma\pi}{8 \sin^2 \sigma\pi} \left\{ (\varphi, B_\sigma)(B_\sigma, \psi) \right. \\ &\quad \left. + (\varphi, \widehat{B}_\sigma)(\widehat{B}_\sigma, \psi) \right\} \Big|_{\sigma = -1/2 + i\rho} d\rho. \end{aligned} \quad (5.6)$$

This formula is the desired eigenfunction decomposition – in the basis $B_\sigma, \widehat{B}_\sigma$.

Now let us pass in (5.6) from $B_\sigma, \widehat{B}_\sigma$ to $\Phi_{\sigma, \varepsilon}$, $\varepsilon = 0, 1$, by

$$\begin{aligned} B_\sigma &= \frac{1}{2\pi} \left(\cos \frac{\sigma\pi}{2} \cdot \Phi_{\sigma, 0} + i \sin \frac{\sigma\pi}{2} \cdot \Phi_{\sigma, 1} \right), \\ \widehat{B}_\sigma &= \frac{1}{2\pi} \left(\cos \frac{\sigma\pi}{2} \cdot \Phi_{\sigma, 0} + i \sin \frac{\sigma\pi}{2} \cdot \Phi_{\sigma, 1} \right), \end{aligned}$$

then we obtain (5.1). □

6. Decomposition of a sesqui-linear form on the pair of hyperboloids

Let us consider the following sesqui-linear form $\mathcal{A}(h, f)$ defined on the pair $(\mathcal{D}(\mathcal{X}), \mathcal{D}(\mathcal{Y}))$:

$$\mathcal{A}(h, f) = \int_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} \delta([x, y]) h(x) \overline{f(y)} dx dy.$$

The main result of our work consists of Theorem 6.1, which gives the decomposition of this form in terms of Fourier components of functions h and f . The decomposition contains Fourier components of the continuous series $(\sigma = -1/2 + i\rho)$.

Theorem 6.1. *The sesqui-linear form $\mathcal{A}(h, f)$ decomposes into Fourier components of the continuous series $F_{\sigma,0}f$ and $G_{\sigma}h$, $\sigma = -1/2 + i\rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, as follows:*

$$\mathcal{A}(h, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\sigma) \langle F_{\sigma,0}h, G_{\sigma}f \rangle_S \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho, \quad (6.1)$$

where

$$\mu(\sigma) = 2\omega(\sigma) B\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (6.2)$$

$$= \frac{1}{16\pi^2} (2\sigma + 1) \cot \sigma\pi \cdot B\left(-\frac{\sigma}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad (6.3)$$

the factor $\omega(\sigma)$ is given by (5.2), so that

$$\mu\left(-\frac{1}{2} + i\rho\right) = \frac{1}{8} \pi^{-5/2} \rho \tanh \rho\pi \cdot \sin\left(\frac{1}{4} + \frac{i\rho}{2}\right) \pi \cdot \left| \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{i\rho}{2}\right) \right|^2$$

Proof. Let us take in (5.1) as φ the characteristic function of the interval $[0, a]$ divided by a and as ψ the function Mf , $f \in \mathcal{D}(\mathcal{Y})$. We can consider that $a \in [0, 1]$. We obtain

$$\frac{1}{a} \int_0^a \overline{Mf(c)} dc = \sum_{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\varepsilon}(\rho) \left[\frac{1}{a} \int_0^a \overline{\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(c)} dc \right] d\rho, \quad (6.4)$$

where we denoted

$$\begin{aligned} \Omega_{\varepsilon}(\rho) &= \omega(\sigma) (\Phi_{\sigma,\varepsilon}, Mf) \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} \\ &= \langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}} \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho}, \end{aligned}$$

see (4.7). Let a tend to 0. Then the left hand side of (6.4) goes to $\overline{Mf(0)}$. Let us prove that we can pass to the limit under the integral over ρ in the right hand side of (6.4). By the mean value theorem, the integral in the right hand side of (6.4) is equal to

$$F_{\varepsilon}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_{\varepsilon}(\rho) \overline{\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(\eta)} d\rho, \quad (6.5)$$

where η is a number in $[0, a]$ (depending on a , ρ and ε). We have to prove that

$$F_{\varepsilon}(a) \rightarrow F_{\varepsilon}(0) \quad (6.6)$$

when $a \rightarrow 0$, where

$$F_\varepsilon(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\varepsilon(\rho) \overline{\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(0)} d\rho. \quad (6.7)$$

Let us take an arbitrary number $\gamma > 0$. In virtue of Theorem 4.2 both functions $\Omega_\varepsilon(\rho)$, $\varepsilon = 0, 1$, decrease rapidly when $|\rho| \rightarrow 0$. Therefore, there exists a number A such that

$$\int_{|\rho| \geq A} |\Omega_\varepsilon(\rho)| d\rho < \gamma. \quad (6.8)$$

It follows from formula (4.4) that the function $\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(c)$ is bounded, i. e.

$$|\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(c)| \leq N, \quad (6.9)$$

N being some number, for all $\rho \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = 0, 1$, and all c from some finite interval, for example, $[0, 1]$. Indeed, formula (4.4) implies the inequality

$$|\Phi_{\sigma,\varepsilon}(c)| \leq \int_0^{2\pi} |c + \sqrt{c^2 + 1} \cdot \cos \alpha|^{-1/2} d\alpha \quad (6.10)$$

since the function of c in the right hand side of (6.10) (it is the function $\Phi_{-1/2,0}$) is continuous with respect to c .

On the other hand, since the function $\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(c)$ is continuous with respect to ρ and c , there exists a number $\delta > 0$ such that

$$|\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(\eta) - \Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(0)| < \gamma \quad (6.11)$$

for $|\rho| \leq A$ and $0 \leq \eta < \delta$. Then for $0 < a < \delta$ we have

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(a) - F_\varepsilon(0)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_\varepsilon(\rho)| \cdot |\Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(\eta) - \Phi_{-1/2+i\rho,\varepsilon}(0)| d\rho \\ &= \int_{-A}^A + \int_{|\rho| \geq A} \\ &\leq \gamma \int_{-A}^A |\Omega_\varepsilon(\rho)| d\rho + 2N \int_{|\rho| \geq A} |\Omega_\varepsilon(\rho)| d\rho \\ &\leq (C_\varepsilon + 2N)\gamma, \end{aligned} \quad (6.12)$$

where

$$C_\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega_\varepsilon(\rho)| d\rho,$$

here we used (6.5), (6.7)–(6.9), (6.11). Inequality (6.12) proves (6.6).

Now we may pass to the limit in (6.4) when $a \rightarrow 0$. We obtain

$$\overline{Mf(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\sigma) \sum_{\varepsilon} \overline{\Phi_{\sigma,\varepsilon}(0)} \langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, f \rangle_{\mathcal{Y}} \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho. \quad (6.13)$$

By (4.4) we have

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma,\varepsilon}(0) &= \int_0^{2\pi} (\cos \varphi)^{\sigma,\varepsilon} d\varphi \\ &= [1 + (-1)^\varepsilon] B\left(\frac{\sigma+1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

We see that $\Phi_{\sigma,\varepsilon}(0)$ is equal to zero for $\varepsilon = 1$, so that only one summand in (6.13) remains – with $\varepsilon = 0$. Since

$$\bar{\sigma} = -\sigma - 1 \quad \text{for} \quad \sigma = -1/2 + i\rho, \quad (6.14)$$

equality (6.13) is

$$\overline{Mf(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\sigma) \langle \Psi_{\sigma,0}, f \rangle_{\mathcal{Y}} \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho, \quad (6.15)$$

where $\mu(\sigma)$ is given by (6.3), (6.4).

The left hand side in (6.15) is

$$\overline{Mf(0)} = \int_{\mathcal{Y}} \delta([x^0, y]) \overline{f(y)} dy. \quad (6.16)$$

Taking into account (6.16) let us apply (6.15) to a shifted function $(U_{\mathcal{Y}}(g)f)(y) = f(yg)$, $g \in G$. We get

$$\int_{\mathcal{Y}} \delta([x, y]) \overline{f(y)} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\sigma) \langle \Psi_{\sigma,0}, U_{\mathcal{Y}}(g)f \rangle_{\mathcal{Y}} \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho, \quad (6.17)$$

where $x = x^0g$.

Now multiply both sides of (6.17) by a function $h(x)$ in $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ and integrate over $x \in \mathcal{X}$. In the right hand side we may invert the order of integrations – in virtue of Lemma 6.1, see below. We obtain:

$$\mathcal{A}(h, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\sigma) \int_{\mathcal{X}} \langle \Psi_{\sigma,0}, U_{\mathcal{Y}}(g)f \rangle_{\mathcal{Y}} h(x) dx \Big|_{\sigma=-1/2+i\rho} d\rho.$$

The integral over $\mathcal{X}$ is nothing but the functional $K(\Psi_{\sigma,0}|h, f)$. Substituting its expression (4.10) in terms of Fourier components and taking into account (6.14), we get (6.1). $\square$

Lemma 6.1. *For any function $f(y)$ in $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}}$ the integral in the right hand side of (6.17) converges absolutely and uniformly with respect to $x = x^0g$ on any compact $V \subset \mathcal{X}$.*

P r o o f. The hyperboloid $\mathcal{X}$ can be embedded into the group G as the product AK of subgroups A and K . By continuity of $U_{\mathcal{Y}}$, the union of supports of all functions $U_{\mathcal{Y}}(g)f$, where $g = ak$ is such that $x^0g \in V$ is some compact W in $\mathcal{Y}$. By Theorem 4.1 there exists $C > 0$ such that for any $g = ak$, $x^0g \in V$, the following inequality holds

$$\left| \langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, U_{\mathcal{Y}}(g)f \rangle_{\mathcal{Y}} \right| \leq C \cdot \max_y \left| \left(\Delta_{\mathcal{Y}}^m U_{\mathcal{Y}}(g)f \right)(y) \right| \cdot (\rho^2 + 1/4)^{-m}.$$

Since $\Delta_{\mathcal{Y}}$ commutes with translations, we have

$$\max_y \left| \left(\Delta_{\mathcal{Y}}^m U_{\mathcal{Y}}(g)f \right)(y) \right| = \max_y \left| \left(U_{\mathcal{Y}}(g) \Delta_{\mathcal{Y}}^m f \right)(y) \right| = \max_y \left| \Delta_{\mathcal{Y}}^m f(y) \right|,$$

so that there exist numbers C_m , $m \in \mathbb{N}$, such that

$$\left| \langle \Psi_{\sigma,\varepsilon}, U_{\mathcal{Y}}(g)f \rangle_{\mathcal{Y}} \right| \leq C_m \cdot (\rho^2 + 1/4)^{-m},$$

for all $x = x^0g \in V$ and all $m \in \mathbb{N}$, whence the lemma. $\square$

The quasiregular representation of $G = \mathrm{SO}_0(1, 2)$ on $\mathcal{X}$ contains representations of the continuous series with multiplicity two and the analytic and antianalytic series with multiplicity one, and the quasiregular representation of G on $\mathcal{Y}$ contains representations of the continuous series with multiplicity one. Theorem 6.1 gives

Theorem 6.2. *The kernel of the Radon transform R consists of functions belonging to the discrete spectrum and to the odd part of the continuous spectrum on $\mathcal{X}$, its image goes in $C^\infty(\mathcal{Y})$. The kernel of the Radon transform R^* is $\{0\}$, its image consists of functions belonging to the even part of the continuous spectrum $\mathcal{X}$.*

References

- [1] Н. Данфорд, J. Т. Шварц, *Линейные операторы*. Т. II: *Спектральная теория*, Мир, М., 1966; англ. пер.: N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators*. V. II: *Spectral Theory*, Wiley-Interscience, New York, 1988.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, М., Наука, 1965; англ. пер.: A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi, *Higher Transcendental Functions I*, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [3] В. Ф. Молчанов, “Гармонический анализ на однородных пространствах”, *Некоммутативный гармонический анализ – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **59**, ВИНТИ, М., 1990, 5–144; англ. пер.: V. F. Molchanov, “Harmonic analysis on homogeneous spaces”, *Representation Theory and Noncommutative Harmonic Analysis II*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **59**, ed. A. A. Kirillov, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1995, 1–135 pp.
- [4] V. F. Molchanov, “Harmonic analysis on a pair of hyperboloids”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **8**:1 (2003), 149–150.
- [5] Н. Я. Виленкин, *Спектральные функции и теория представлений групп*, Наука, М., 1965; англ. пер.: N. J. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations*, Translations Mathematical Monographs, **22**, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

Information about the author

Vladimir F. Molchanov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis Department. Derzhavin Tambov State University, Tambov, the Russian Federation. E-mail: v.molchanov@bk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4065-2649>

Received 19 September 2019
 Reviewed 14 November 2019
 Accepted for press 29 November 2019

Информация об авторе

Молчанов Владимир Федорович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа. Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: v.molchanov@bk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4065-2649>

Поступила в редакцию 19 сентября 2019 г.
 Поступила после рецензирования 14 ноября 2019 г.
 Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

© Platonov S.S., 2019

DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-450-456

УДК 517.986.62

Spectral synthesis on zero-dimensional locally compact Abelian groups

Sergey S. PLATONOV

Petrozavodsk State University

33 Lenin Ave., Petrozavodsk 185910, Russian Federation

Спектральный синтез на нульмерных локально компактных абелевых группах

Сергей Сергеевич ПЛАТОНОВ

ФГБОУ ВО «Петрозаводский государственный университет»

185910, Российская Федерация, г. Петрозаводск, просп. Ленина, 33

Abstract. Let G be a zero-dimensional locally compact Abelian group whose elements are compact, $C(G)$ the space of continuous complex-valued functions on the group G . A closed linear subspace $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ is called invariant subspace, if it is invariant with respect to translations $\tau_y : f(x) \mapsto f(x + y)$, $y \in G$. We prove that any invariant subspace $\mathcal{H}$ admits spectral synthesis, which means that $\mathcal{H}$ coincides with the closure of the linear span of all characters of the group G contained in $\mathcal{H}$.

Keywords: zero-dimensional groups; characters; harmonic analysis; spectral synthesis; invariant subspaces

For citation: Platonov S.S. Spektral'nyj sintez na nul'mernyh lokal'no kompaktnyh abelevykh gruppah [Spectral synthesis on zero-dimensional locally compact Abelian groups]. *Vestnik Rossijskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2019, vol. 24, no. 128, pp. 450–456. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-450-456.

Аннотация. Пусть G — нульмерная локально компактная абелева группа, все элементы которой компактны, $C(G)$ — пространство всех непрерывных комплекснозначных функций на группе G . Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{H} \subseteq C(G)$ называется инвариантным подпространством, если оно инвариантно относительно сдвигов $\tau_y : f(x) \mapsto f(x + y)$, $y \in G$. В работе доказывается, что любое инвариантное подпространство $\mathcal{H}$ допускает спектральный синтез, то есть $\mathcal{H}$ совпадает с замыканием линейной оболочки всех содержащихся в $\mathcal{H}$ характеров группы G .

Ключевые слова: нульмерные группы; характеры; гармонический анализ; спектральный синтез; инвариантные подпространства

Для цитирования: Платонов С.С. Спектральный синтез на нульмерных локально компактных абелевых группах // Вестник российских университетов. Математика. 2019. Т. 24. № 128. С. 450–456. DOI 10.20310/2686-9667-2019-24-128-450-456. (In Engl., Abstr. in Russian)

1. General definitions

Let G be a locally compact Abelian group (LCA-group), $\mathcal{F}$ be a locally convex topological vector space that consists of complex-valued functions on the group G . This space is called a translation invariant space if it is invariant under translations (shifts)

$$\tau_y : f(x) \mapsto f(x + y), \quad f \in \mathcal{F}, \quad y \in G,$$

and all operators τ_y on the space $\mathcal{F}$ are continuous. A closed linear subspace $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ is called an invariant subspace if $\tau_y(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}$ for any $y \in G$.

A continuous homomorphism of G into the multiplicative group $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ of nonzero complex numbers is called an *exponential functions* or *generalized character* on G . A continuous homomorphism of G into the group $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ is called a character of G .

Continuous homomorphisms of G into the additive group of complex numbers are called *additive functions*. A function $x \mapsto P(a_1(x), \dots, a_m(x))$ on G is called a *polynomial* if P is a complex polynomial in m variables and $a_1, \dots, a_m$ are additive functions. A product of a polynomial and an exponential function is called an *exponential monomial*, and linear combinations of exponential monomials are called *exponential polynomials*.

Let $\mathcal{F}$ be a translation invariant space on G and $\mathcal{H}$ be an invariant subspace in $\mathcal{F}$.

Definition 1.1. An invariant subspace $\mathcal{H}$ *admits spectral synthesis* if $\mathcal{H}$ coincides with the closed linear span in $\mathcal{F}$ of all exponential monomials that belong to $\mathcal{H}$. We say that a translation invariant space $\mathcal{F}$ has the spectral synthesis property if any invariant subspace $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ admits spectral synthesis.

2. Examples of spectral synthesis

In this section we give some examples of spectral synthesis.

1. $G = (\mathbb{R}, +)$

Any exponential monomial on $\mathbb{R}$ has the form $f(x) = P(x) e^{\lambda x}$, where $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $P(x)$ is a polynomial. The function spaces $C(\mathbb{R})$ of all continuous functions and $\mathcal{E}(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ of all infinitely differentiable functions (all classical function spaces are equipped with their usual topologies) have the spectral synthesis property. This is result of L. Schwartz [1]. Some other examples of functions spaces on $\mathbb{R}$ with spectral synthesis property were studied in the papers of J. E. Gilbert [2] and S. S. Platonov [3].

2. $G = (\mathbb{R}^n, +)$, $n \geq 2$

Any exponential monomial on $\mathbb{R}^n$ has the form $f(x) = P(x) e^{\lambda x}$, where $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\lambda x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$, $P(x)$ is a polynomial in x . In [1] L. Schwartz conjectured that the spaces $C(\mathbb{R}^n)$ and $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ have the spectral synthesis property. This conjecture turned out to be false. In 1975, D. I. Gurevich [4] constructed an example of an invariant subspace $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ containing no exponential monomials. Nevertheless, L. Schwartz [5] proved that the space $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ of all tempered distributions on $\mathbb{R}^n$ has the spectral synthesis property.

3. G is a discrete group

For the case when G is a discrete group, the most natural function space is the space $C(G)$ consisting of all complex-valued functions on G with the topology of pointwise

convergence. The case $G = \mathbb{Z}^n$ was studied by M. Lefranc [6]. He proved that the space $C(\mathbb{Z}^n)$ has the spectral synthesis property. Some results about the spectral synthesis on the discrete groups were considered in [7]. In particular, the space $C(G)$ has the spectral synthesis property if G is a finitely generated Abelian group [8] or a torsion Abelian group [9]. In [10] M. Laczkovich and L. Székelyhidi proved that the spectral synthesis in the space $C(G)$ holds on a discrete Abelian group G if and only if the torsion free rank of G is finite. For the case when G is a finitely generated discrete Abelian group and $\mathcal{F}$ is the space of all exponential growth functions on G the spectral synthesis property was proved in [11].

3. Main results

Let G be a LCA-group. An element $x \in G$ is called a compact element if the smallest closed subgroup of G , which contains x , is compact.

Let G be a LCA-group, such that all elements of G are compact. Any generalized character of G is a usual character and any additive function on G is zero. Any exponential monomial on G has the form $\lambda\chi(x)$, where $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi(x)$ is a character of G .

Proposition 3.1. *Let $\mathcal{F}$ be a translation invariant space on G , $\mathcal{H}$ be an invariant subspace in $\mathcal{F}$. If G is a LCA-group, such that all elements of G are compact, then $\mathcal{H}$ admits spectral synthesis if and only if $\mathcal{H}$ coincides with the closed linear span in $\mathcal{F}$ of all characters of G that belong to $\mathcal{H}$.*

For any LCA-group G let $\widehat{G}$ be the set of all characters of G . The set $\widehat{G}$ is a LCA-group (dual group of G) with compact-open topology and multiplication being defined as the pointwise multiplication of functions.

For any invariant subspace $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, the set $\sigma(\mathcal{H}) := \{\chi \in \widehat{G} : \chi \in \mathcal{H}\}$ is called the *spectrum* of $\mathcal{H}$.

If G is a LCA-group, such that all elements of G are compact, and invariant subspace $\mathcal{H}$ admits spectral synthesis, then $\mathcal{H}$ can be recovered uniquely by its spectrum $\sigma(\mathcal{H})$.

A locally compact topological space X is called zero-dimensional if compact open subsets of X form a basis of topology. A locally compact Hausdorff topological space X is zero-dimensional if and only if X is totally disconnected, that is any subset of X , which contains more than one point, is disconnected.

Theorem 3.1. *Let G be a locally compact zero-dimensional Abelian group, such that all elements of G are compact. Then: 1) the space $C(G)$ of all continuous functions on G has the spectral synthesis property; 2) a subset $\sigma \subseteq \widehat{G}$ is the spectrum of some invariant subspace of $C(G)$ if and only if σ is closed subset of $\widehat{G}$.*

4. Some examples of zero-dimensional LCA-groups, all elements of which are compact

1. Let $\{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ be a two-side sequence, $n_k \in \mathbb{N}$, $n_k \geq 2$. Let

$$\widetilde{G} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{n_k},$$

where $\mathbb{Z}_n$ is the cyclic group of order n . Every $\mathbb{Z}_{n_k}$ is a discrete group and $\tilde{G}$ is a compact group. Any element of $\tilde{G}$ has the form

$$x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad x_k \in \mathbb{Z}_{n_k}.$$

Let G be a subgroup of $\tilde{G}$ that consist of all elements

$$x = \{x_k\} \in \tilde{G} : \exists N(x) \in \mathbb{Z} \quad \forall k < N(x) \quad x_k = 0.$$

The group G is locally compact, zero-dimensional and all elements of G are compact.

If $n_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, then we have the locally compact Cantor dyadic group. The harmonic analysis on this group closely connected with Fourier–Walch harmonic analysis (see [12]).

2. Let $\mathbb{Q}_p$ be the group of p -adic numbers. Any element $x \in \mathbb{Q}_p$ can be identified with a formal series

$$x = \sum_{k \geq N(x)} x_k p^k, \quad x_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad N(x) \in \mathbb{Z}.$$

The group $\mathbb{Q}_p$ is locally compact, zero-dimensional and all elements of G are compact.

Also, for any two-side sequence $\mathbf{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $a_k \in \mathbb{N}$, $a_k \geq 2$, there exist the group $\mathbb{Q}_{\mathbf{a}}$ of generalized $\mathbf{a}$ -adic numbers (see [13]). The group $\mathbb{Q}_{\mathbf{a}}$ is locally compact, zero-dimensional and all elements of G are compact. A zero-dimensional LCA-group G with countable base of topology, such that all elements of G are compact, is called a Vilenkin group. Harmonic analysis on such groups was studied in [14].

5. On the ideal structure of algebras of locally constant functions

Let X be a zero-dimensional Hausdorff locally compact topological space. Let $\tau_{co}(X)$ be the set of all compact open subsets of X . The set $\tau_{co}(X)$ forms a basis of topology of X . Any finite set $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\}$ of mutually disjoint subsets $U_i \in \tau_{co}(X)$ is called a discrete system of subsets of X . Let $\mathfrak{M}(X)$ be the set of all discrete systems of subsets of X . For $\alpha = \{U_1, \dots, U_n\} \in \mathfrak{M}(X)$, the support of α is the set

$$\text{supp } \alpha := \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

A function f on X is called locally constant if for any $x \in X$ there exist neighbourhood $U = U(x)$ of x on which f is constant. Denote by $\mathcal{D}(X)$ the set of all locally constant complex-valued functions on X with compact support. The set $\mathcal{D}(X)$ is a linear space. Now we define a topology on $\mathcal{D}(X)$.

For any $\alpha \in \{U_1, \dots, U_n\} \in \mathfrak{M}(X)$ let $\mathcal{D}_{\alpha}(X)$ be the set of functions of the form $f = \sum_{i=1}^n c_i I_{U_i}$, where $c_i \in \mathbb{C}$, I_U is the characteristic function of U . The set $\mathcal{D}_{\alpha}(X)$ is n -dimensional vector space. With respect to the uniform norm

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

the set $\mathcal{D}_{\alpha}(X)$ is a Banach space. We equip the space

$$\mathcal{D}(X) = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{M}(X)} \mathcal{D}_{\alpha}(X)$$

with the topology of inductive limits of the Banach spaces $\mathcal{D}_\alpha(X)$, that is a topology of $\mathcal{D}(X)$ is the weakest locally convex topology for which all inclusions $\mathcal{D}_\alpha(X) \subseteq \mathcal{D}(X)$ are continuous. Then $\mathcal{D}(X)$ is locally convex space. With respect to the pointwise multiplication of functions, $\mathcal{D}(X)$ is a topological algebra.

Let $\mathcal{I}$ be an ideal of the algebra $\mathcal{D}(X)$. Denote by $N(\mathcal{I})$ the set of zeros of all functions from $\mathcal{I}$, that is

$$N(\mathcal{I}) := \{x \in X : f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}\}.$$

The set $N(\mathcal{I})$ is called zero set of $\mathcal{I}$.

For any closed subset $A \subseteq X$ denote by $\mathcal{I}_A$ the set of all functions $f \in \mathcal{D}(X)$, such that $f(x) = 0$ for any $x \in A$. The set $\mathcal{I}_A$ is a closed ideal of $\mathcal{D}(X)$.

Theorem 5.1. *Let $\mathcal{I}$ be an ideal of the algebra $\mathcal{D}(X)$ then $\mathcal{I}_{N(\mathcal{I})} = \mathcal{I}$.*

Corollary 5.1. *Any ideal of the topological algebra $\mathcal{D}(X)$ is closed.*

6. The proof of Theorem 3.1

Let G be a zero-dimensional LCA-group, $C(G)$ be the set of all continuous functions on G , $\mathcal{D}(G)$ be the set of locally constant functions with compact support on G . By $\mathcal{M}_c(G)$ we denote the set of complex-valued Radon measures with compact support on G . The space $\mathcal{M}_c(G)$ can be identified with the dual space of $C(G)$ with respect to the duality

$$\langle \mu, f \rangle := \int_G f(x) d\mu(x), \quad f \in C(G), \quad \mu \in \mathcal{M}_c(G).$$

The space $\mathcal{M}_c(G)$ is a locally convex space with respect to the weak topology $\sigma(\mathcal{M}_c(G), C(G))$.

Let $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_c(G)$. A convolution $\mu_1 * \mu_2$ is defined by formula

$$\langle \mu_1 * \mu_2, \varphi \rangle := \int_G \int_G \varphi(x + y) d\mu_1(x) d\mu_2(y),$$

where $\varphi \in C(G)$.

The set $\mathcal{M}_c(G)$ is a commutative topological algebra with convolution as multiplication. For any closed linear subspace $\mathcal{H} \subseteq C(G)$, let $\mathcal{H}^\perp$ be its annihilator in $\mathcal{M}_c(G)$ that is

$$\mathcal{H}^\perp := \{\mu \in \mathcal{M}_c(G) : \langle \mu, f \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}\}.$$

The mapping $\mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}^\perp$ is one-to-one correspondence between the set of all invariant subspaces of $C(G)$ and the set of all closed ideals of topological algebra $\mathcal{M}_c(G)$.

Let $\mathcal{D}(G)$ be the set of all locally constant complex-valued functions on G with compact support. The set $\mathcal{D}(G)$ is a commutative topological algebra with convolution as multiplication:

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_G f_1(x - y) f_2(y) dy, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{D}(G).$$

We will denote this topological algebra by $\mathcal{D}_{conv}(G)$.

For any topological algebra $\mathcal{A}$ we will denote by $s(\mathcal{A})$ the set of all closed ideals of $\mathcal{A}$. In particular we have the sets $s(\mathcal{M}_c(G))$ and $s(\mathcal{D}_{conv}(G))$. Using identification a function $f \in \mathcal{D}(G)$ with the measure $f(x) dx$, we have inclusion $\mathcal{D}(G) \subseteq \mathcal{M}_c(G)$. The maps

$$\rho : s(\mathcal{M}_c(G)) \mapsto s(\mathcal{D}_{conv}(G)) \text{ and } \tilde{\rho} : s(\mathcal{D}_{conv}(G)) \mapsto s(\mathcal{M}_c(G))$$

are defined by formulas:

$$\rho(\mathcal{H}) := \mathcal{H} \cap \mathcal{D}(G), \quad \mathcal{H} \in s(\mathcal{M}_c(G)), \quad \tilde{\rho}(\mathcal{H}_0) := [\mathcal{H}_0], \quad \mathcal{H}_0 \in s(\mathcal{D}_{conv}(G)),$$

where $[\mathcal{H}_0]$ is the closure of $\mathcal{H}_0$ in the space $\mathcal{M}_c(G)$.

Proposition 6.1. *The mapping ρ is a bijection of set $s(\mathcal{M}_c(G))$ onto the set $s(\mathcal{D}_{conv}(G))$. The inverse mapping ρ^{-1} coincide with $\tilde{\rho}$.*

Let G be a LCA-group and $\widehat{G}$ be the dual group. It can be proved that LCA-group G is zero-dimensional group, all elements of which are compact, if and only if the dual group $\widehat{G}$ is zero-dimensional group, all elements of which are compact.

The Fourier transform of a function $f \in L_1(G)$ is the function $\widehat{f}$ on the dual group $\widehat{G}$ which is defined by formula

$$\widehat{f}(\chi) := \int_G f(x) \overline{\chi(x)} dx, \quad \chi \in \widehat{G}.$$

In particular, the Fourier transform is defined for any function $f \in \mathcal{D}(G)$. The mapping $\Phi : f \mapsto \widehat{f}$ is also called the Fourier transform.

Proposition 6.2. *If G is a zero-dimensional group, all elements of which are compact, then the Fourier transform Φ is an isomorphism of the topological vector space $\mathcal{D}(G)$ into the topological vector space $\mathcal{D}(\widehat{G})$.*

Corollary 6.1. *The mapping Φ is an isomorphism of topological algebra $\mathcal{D}_{conv}(G)$ into the topological algebra $\mathcal{D}_{mult}(\widehat{G})$.*

Proof of Theorem 3.1 Let $\mathcal{H}$ be an invariant subspace of $C(G)$, $\mathcal{H}^\perp$ be its annihilator in $\mathcal{M}_c(G)$, $\mathcal{I} = \mathcal{H}^\perp \cap \mathcal{D}(G)$, $\widehat{\mathcal{I}} = \Phi(\mathcal{I})$. Then $\mathcal{I}$ is a closed ideal of $\mathcal{D}_{conv}(G)$, and $\widehat{\mathcal{I}}$ is a closed ideal of $\mathcal{D}_{mult}(\widehat{G})$. We will say that the ideal $\widehat{\mathcal{I}}$ corresponds to the invariant subspace $\mathcal{H}$.

Let $\chi \in \widehat{G}$. One can prove that $\chi \in \mathcal{H}$ if and only if the point χ belongs to zero set of the ideal $\widehat{\mathcal{I}}$. Thus the spectrum $\sigma(\mathcal{H})$ of invariant subspace $\mathcal{H}$ is the same as zero set $N(\widehat{\mathcal{I}})$ of corresponding ideal $\widehat{\mathcal{I}} \subseteq \mathcal{D}_{mult}(\widehat{G})$.

Let $\mathcal{H}$ be an invariant subspace of $C(G)$. Denote by $\mathcal{H}_1$ a closed linear subspace of $C(G)$, that coincides with the closed linear span in $C(G)$ of all characters of G that belong to $\mathcal{H}$. Then $\mathcal{H}_1$ is also an invariant subspace of $C(G)$ and $\sigma(\mathcal{H}) = \sigma(\mathcal{H}_1)$. Let $\mathcal{I}_1 = \mathcal{H}_1^\perp \cap \mathcal{D}(G)$, $\widehat{\mathcal{I}}_1 = \Phi(\mathcal{I}_1)$. Since $N(\widehat{\mathcal{I}}) = N(\widehat{\mathcal{I}}_1)$ then we have $\widehat{\mathcal{I}} = \widehat{\mathcal{I}}_1$ by Theorem 5.1, and from Proposition 6.1 we have $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$. This completes the proof of Theorem 3.1.

References

- [1] L. Schwartz, “Théorie générale des fonctions moyenn-périodiques”, *Ann. of Math.*, **48** (1947), 875–929.
- [2] J.E. Gilbert, “On the ideal structure of some algebras of analytic functions”, *Pacif. J. of Math.*, **35**:3 (1978), 625–639.
- [3] S.S. Platonov, “Spectral synthesis in some topological vector spaces of functions”, *St.-Petersburg Math. J.*, **22**:5 (2011), 813–833.
- [4] D.I. Gurevich, “Counterexamples to a problem of L. Schwartz”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:2 (1975), 116–120.
- [5] L. Schwartz, “Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions”, *Can. J. Math.*, **3** (1951), 503–512.
- [6] M. Lefranc, “Analyse spectrale sur Z_n ”, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 1951–1953.
- [7] L. Székelyhidi, *Discrete spectral synthesis and its applications*, Springer, Berlin, 2006.
- [8] L. Székelyhidi, “On discrete spectral synthesis”, *Advances in Mathematics*, Functional Equations – Results and Advances, eds. Z. Daróczy, Zs. Páles, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 263–274.
- [9] A. Bereczky, L. Székelyhidi, “Spectral synthesis on torsion groups”, *J. Math. Anal. Appl.*, **304** (2005), 607–613.
- [10] M. Laczkovich, L. Székelyhidi, “Spectral synthesis on discrete Abelian groups”, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **143** (2007), 103–120.
- [11] С. С. Платонов, “Спектральный синтез в пространстве функций экспоненциального роста на конечно порожденной абелевой группе”, *Алгебра и анализ*, **24**:4 (2012), 182–200 [Math-Net.Ru](#) [MathSciNet](#) [ZentralMATH](#); англ. пер.: S.S. Platonov, “Spectral synthesis in a space of exponential growth functions on finitely generated abelian groups”, *St. Petersburg Math. J.*, **24**:4 (2013), 663–675 [Scopus](#).
- [12] B. Golubov, A. Efimov, V. Skvortsov, *Walsh series and transforms. Theory and applications*, Kluwer Academic Publishers Group, Netherlands, 1991.
- [13] E. Hewitt, K. A. Ross, “Abstract harmonic analysis”, *Structure of topological groups, integration theory, group representations*. V.I, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [14] И. Рубистейн, Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, А. Г. М. Джафарли, *Мультипликативная система функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, Элм, Баку, 1981. [G.N. Agaev, N.Ya. Vilenkin, G.M. Dzhafarli, A.I. Rubinshtejn, *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups*, Ehlms, Baku, 1981 (In Russian)].

Information about the author

Sergey S. Platonov, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Mathematical Analysis Department. Petrozavodsk State University, Petrozavodsk, the Russian Federation. E-mail: platonov@petsu.ru

Информация об авторе

Платонов Сергей Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа. Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск, Российская Федерация. E-mail: platonov@petsu.ru

Received 19 August 2019

Reviewed 14 October 2019

Accepted for press 29 November 2019

Поступила в редакцию 19 августа 2019 г.

Поступила после рецензирования 14 октября 2019 г.

Принята к публикации 29 ноября 2019 г.

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \dots$$

$$(1 + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$H^2(\Gamma, M^\Gamma) \rightarrow \dots$$

$$L_V(E, 1)$$

$$\{ \mu_p^{(0)} \} \rightarrow \{ \mu_p^{(0)} \}$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow \dots$$

$$L(p-1, p-1)$$

$$\frac{q}{q} \text{ other entries } \sim 2$$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma \in G \times E \rightarrow \dots$$

$$\alpha \begin{pmatrix} \bar{\alpha} + 2 \\ \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

$$L(E, \varphi, K) \times \dots$$

$$A \frac{4}{\pi} \dots$$

$$\sigma = 0$$

$$| \dots |$$

$$\Gamma \cong \dots$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$\gamma \rightarrow \dots$$

$$(E, \rho, \varphi)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \dots$$

$$\lambda + \mu$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$\lambda + \mu = \dots$$

$$K \circ X \circ \text{Ind} \dots$$

$$\det(X, \dots)$$