

ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 31
№ 153
2026

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 31, № 153,
2026

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Белый список», «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научным специальностям: 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки); 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS 3

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ

<i>Р.Р. Кучаров, Т.М. Тухтамуродова</i>	Спектральные свойства и эффект Ефимова для ограниченных самосопряженных частично интегральных операторов	5
<i>М.Р. Лангаршоев, Г.А. Юсупов</i>	О точном неравенстве между наилучшим приближением и обобщенным модулем непрерывности в пространстве L_2	22
<i>Ю.А. Малышкин, Д.А. Груздков</i>	Эффект конденсации в моделях пространственного предпочтительного присоединения с шагом с добавлением ребра	32
<i>Е.В. Молчанова Алвес, М.Ж. Алвес, Ж.С.П. Мунембе, Ю.В. Непомнящих</i>	Критерии компактности линейного интегрального оператора в пространствах непрерывных вектор-функций	41
<i>Л.И. Родина, М.С. Кузнецов</i>	Задачи максимизации дохода и средней временной выгоды от сбора ресурса с учетом расходов на обслуживание	61
<i>Д.Л. Ступин</i>	Оценки коэффициентов необращающихся в нуль функций	73
<i>Т. Эль Крук, А. Эль Амрани, М. Россафи</i>	Непрерывные Γ -фреймы и непрерывные Γ -базисы Рисса в гильбертовых C^* -модулях	86

В МАТЕМАТИЧЕСКОМ СООБЩЕСТВЕ

Владимир Федорович Молчанов (27.02.1939 – 31.12.2025) 100

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., доц. М.В. Балашов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), д. ф.-м. н., проф. А.Г. Кушнер (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Е.Б. Лансеев (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), д. ф.-м. н., проф. В.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. М.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33
Телефон редакции: 8(4752)72-34-34 доб. 0440
Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>;
<https://journals.rcsi.science/2686-9667>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации (реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Редактор: М.И. Филатова
Редактор английских текстов: Н.А. Михайлова
Технический редактор: Ю.А. Бирюкова
Технический секретарь: М.В. Борзова
Администраторы сайта: М.И. Филатова, Н.А. Михайлова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. 100 с. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153>

Подписано в печать 23.03.2026. Дата выхода в свет 10.04.2026
Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.
Печ. л. 12,5. Усл. печ. л. 11,6. Тираж 1000 экз. Заказ № 26032. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».
392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru



Контент доступен под лицензией [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 31, no. 153,
2026**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the “White list” and “List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialties:
1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences);
1.1.2. Differential equations and mathematical physics (physical and mathematical sciences)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, Scientific Electronic Library “eLIBRARY.RU”, Electronic Library “CyberLeninka”, Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>R.R. Kucharov, T.M. Tuxtamurodova</i>	Spectral properties and the Efimov effect for bounded self-adjoint partial integral operators	5
<i>M.R. Langarshoev, G.A. Yusupov</i>	On the exact inequality between the best approximation and the generalized modulus continuity in the space L_2 .	22
<i>Y. Malyshkin, D. Gruzdkov</i>	Condensation effects in spatial preferential attachment with edge step	32
<i>E.V. Molchanova Alves, M.J. Alves, J.S.P. Munembe, Y.V. Nepomnyashchikh</i>	Compactness criteria for a linear integral operator in spaces of continuous vector functions	41
<i>L.I. Rodina, M.S. Kuznetsov</i>	Problems of maximizing income and average time profit from resource harvesting, taking into account maintenance costs	61
<i>D.L. Stupin</i>	Coefficient estimates for nonvanishing functions	73
<i>T. El Krouk, A. El Amrani, M. Rossafi</i>	Continuous Γ -frames and continuous Γ -Riesz basis in Hilbert C^* -modules	86

IN MATHEMATICS COMMUNITY

Vladimir Fedorovich Molchanov (27.02.1939 – 31.12.2025)	100
---	-----

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Derzhavin Tambov State University”
(ОГРН 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenko, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Assoc. Prof. Balashov, Maxim V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. Kushner, Alexei G. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Laneev, Evgenii B. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Ponomarev, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Sumin, Vladimir I. (Nizhny Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Sumin, Mikhail I. (Nizhny Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440

E-mail: zhukovskys@mail.ru; ilyina@tsutmb.ru

Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>;
<https://journals.rcsi.science/2686-9667>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Editor: M.I. Filatova

English texts editor: N.A. Mikhailova

Technical editor: Y.A. Biryukova

Technical secretary: M.V. Borzova

Web-site administrators: M.I. Filatova, N.A. Mikhailova

For citation:

Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics, **31**:153 (2026), 100 p.
<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153>

Signed for printing 23.03.2026. Release date 10.04.2026

Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.

Pr. sheet 12,5. Conv. pr. sheet 11,6. Copies printed 1000. Order no. 26032. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”

Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.

190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

SCIENTIFIC ARTICLE

© R. R. Kucharov, T. M. Tuxtamurodova, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-5-21>

Spectral properties and the Efimov effect for bounded self-adjoint partial integral operators

R. R. KUCHAROV^{1,2}, T. M. TUXTAMURODOVA¹¹ National University of Uzbekistan

4 University St., Tashkent 100174, Uzbekistan

² Tashkent State Technical University named after Islam Karimov

2 University St., Tashkent 100095, Uzbekistan

Abstract. This paper investigates the Efimov effect for a class of bounded self-adjoint partial integral operators with degenerate kernels arising in the Hubbard model. These Fredholm-type operators act in the Hilbert space $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ and are realized as non-compact perturbations of a multiplication operator. Motivated by the spectral behavior of Schrodinger-type operators, we study the emergence of infinitely many eigenvalues located below the essential spectrum. A distinctive aspect of the model is the kernel structure, expressed as a convergent series, which significantly influences the spectrum. We present a detailed description of the essential spectrum and prove a theorem that gives sufficient conditions for the presence of an infinite discrete spectrum beneath its lower bound. The approach relies on tools from spectral theory, including the minimax principle and the properties of positive integral operators. To support the theoretical findings, we also construct an explicit example that demonstrates the Efimov effect in this framework.

Keywords: essential spectrum, discrete spectrum, lower bound of the essential spectrum, partial integral operator, Efimov effect, negative eigenvalue, minimax principle

Mathematics Subject Classification: 45P05, 47A53, 47A55, 47A75.

For citation: Kucharov R.R., Tuxtamurodova T.M. Spectral properties and the Efimov effect for bounded self-adjoint partial integral operators. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 5–21.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-5-21>

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Кучаров Р.Р., Тухтамуродова Т.М., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-5-21>

УДК 517.9



Спектральные свойства и эффект Ефимова для ограниченных самосопряженных частично интегральных операторов

Рамзиддин Рузимурадович КУЧАРОВ^{1,2},
Тиллохон Мансуржон кизи ТУХТАМУРОДОВА¹

¹ Национальный университет Узбекистана

100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 4

² Ташкентский государственный технический университет имени Ислама Каримова

100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 2

Аннотация. В статье изучается эффект Ефимова для класса ограниченных самосопряженных частичных интегральных операторов с вырожденными ядрами, возникающих в модели Хаббарда. Эти операторы типа Фредгольма действуют в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ и реализуются как некомпактные возмущения оператора умножения. Учитывая спектральное поведение операторов типа Шредингера, мы изучаем возникновение бесконечного числа собственных значений, расположенных ниже существенного спектра. Отличительной особенностью модели является структура ядра, представленная в виде сходящегося ряда, которая существенно влияет на спектр. Приведено подробное описание существенного спектра и доказана теорема, устанавливающая достаточные условия для существования бесконечного дискретного спектра ниже его нижней границы. Подход основан на инструментах спектральной теории, включая принцип минимакса и свойства положительных интегральных операторов. Для подтверждения теоретических результатов построен явный пример, демонстрирующий эффект Ефимова в данной постановке.

Ключевые слова: существенный спектр, дискретный спектр, нижняя граница существенного спектра, оператор частичного интеграла, эффект Ефимова, отрицательное собственное значение, принцип минимакса

Для цитирования: Кучаров Р.Р., Тухтамуродова Т.М. Спектральные свойства и эффект Ефимова для ограниченных самосопряженных частично интегральных операторов // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 5–21.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-5-21>

Introduction

One of the most intriguing and non-intuitive phenomena in quantum mechanics is the Efimov effect, which emerges in systems consisting of three quantum particles. Remarkably, this effect implies the existence of an infinite sequence of three-body bound states, now known as Efimov states, even in the case where none of the constituent two-body subsystems possess bound states themselves. Such a counterintuitive result fundamentally challenges our classical understanding of binding in few-body systems. The Efimov effect was first theoretically predicted by the Russian physicist V. Efimov in 1970 [1], who showed that for certain conditions involving large two-body scattering lengths, an infinite tower of three-particle bound states can arise, with a geometric energy spectrum accumulating at zero energy.

Since its theoretical discovery, the Efimov effect has garnered substantial attention in both theoretical and experimental physics. It has proven to be of great significance in the study of ultracold atomic gases, where external magnetic fields near a Feshbach resonance allow experimentalists to finely tune the two-body scattering length. This tunability enables the realization of the conditions necessary for the Efimov effect to manifest, thereby making ultracold atomic systems a prime candidate for its observation. Indeed, the first experimental confirmation of Efimov states was achieved in 2006 in a system of ultracold cesium atoms, providing direct evidence for this profound quantum phenomenon.

In [2], the article investigates linear operators and equations with partial integrals in Banach ideal spaces, spaces of vector-valued functions, and spaces of continuous functions. Their principal properties are examined, including regularity, invertibility, and spectral characteristics, and a concise description of the corresponding linear equations is also provided.

From a mathematical standpoint, the Efimov effect is intimately related to the spectral theory of Schrodinger-type operators. In particular, it is associated with the occurrence of infinitely many discrete eigenvalues located strictly below the lower edge of the essential spectrum of the corresponding Hamiltonian operator. Understanding and rigorously proving the conditions under which such an accumulation of eigenvalues occurs remains a central challenge in the spectral analysis of quantum mechanical systems.

Traditionally, the mathematical analysis of three-particle quantum systems is carried out using the Faddeev equations, which provide a powerful framework for reducing the three-body Schrodinger equation to a system of coupled integral equations. These integral equations typically contain interaction kernels that encode the physics of the underlying potentials. For analytical tractability and computational efficiency, degenerate kernels — those expressible as finite or convergent series of separable functions — are often employed. These kernels retain essential physical features of the interaction while significantly simplifying the mathematical complexity of the problem.

The earliest rigorous mathematical investigations into the Efimov effect focused on three-particle continuous Schrodinger operators, where Efimov himself and subsequent researchers developed conditions under which the discrete spectrum contains an infinite number of eigenvalues below the essential spectrum [1, 3, 4]. More recent studies have extended this analysis to discrete models, which are of interest both mathematically and in applications such as solid-state physics and lattice quantum systems.

In this direction, the pioneering works of Lakaev [5, 6] represent some of the first rigorous mathematical proofs of the Efimov effect for three-particle discrete Schrodinger operators. His approach was based on a detailed analysis of the analytical properties of Fredholm determinants

associated with the resolvent of the system. Subsequently, alternative techniques were developed, including the Sobolev method — also known as the asymptotic method [7]. This which has been successfully applied to study the spectral properties of multi-particle discrete Schrodinger operators [8–10].

Additional lines of research have investigated the spectral behavior of operator matrices and integral operators with degenerate kernels, which often arise in the effective description of three-body interactions. In particular, matrix operator models have been used to examine the distribution and accumulation of eigenvalues, while techniques such as unitary dilation have been employed to transform complex decay operators into simpler diagonal forms for spectral analysis [11–13].

In the present study, we build upon this body of work by investigating a particular class of partial integral operators with degenerate kernels that naturally emerge from a discrete three-particle Schrodinger framework, notably within the context of the Hubbard model. The kernel under consideration is defined via a convergent series, which allows us to capture key spectral properties while preserving computational manageability. Our principal aim is to establish rigorous sufficient conditions for the occurrence of the Efimov effect in this setting — specifically, to prove the existence of an infinite number of eigenvalues lying strictly below the lower bound of the essential spectrum of the operator H .

The methods employed in our analysis combine elements of spectral theory, operator theory, and functional analysis. We make essential use of the minimax principle for bounded self-adjoint operators, as well as the theory of positive compact integral operators. As a concrete application of our theoretical results, we construct an explicit example of a partial integral operator with a degenerate kernel and demonstrate the manifestation of the Efimov effect within this model. This example not only illustrates the practical relevance of the theoretical framework developed here but also underscores the broader applicability of integral operator methods in quantum few-body problems.

1. Basic definitions and notation

Let us begin by formulating the foundational mathematical framework necessary for the spectral analysis of the class of partial integral operators considered in this study.

Let H be a bounded self-adjoint operator in a separable Hilbert space. Our focus lies on the spectral properties of the operator H , for which we adopt the standard notations [14, p. 188, p. 236]: the resolvent set is denoted by $\rho(H)$, the spectrum by $\sigma(H)$, the essential spectrum by $\sigma_{\text{ess}}(H)$, and the discrete spectrum by $\sigma_{\text{disc}}(H)$. These spectral components form the backbone of our analysis, particularly in the context of identifying spectral phenomena such as the Efimov effect.

Definition 1.1. We define

$$E_{\min}(H) := \inf \sigma_{\text{ess}}(H), \quad E_{\max}(H) := \sup \sigma_{\text{ess}}(H).$$

The numbers $E_{\min}(H)$ and $E_{\max}(H)$ are called the lower edge and the upper edge of the essential spectrum of the operator H , respectively.

Definition 1.2. A point $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(H)$ is called a boundary point of the essential spectrum if

$$\lambda = E_{\min}(H) \quad \text{or} \quad \lambda = E_{\max}(H).$$

Definition 1.3. Let λ be a boundary point of $\sigma_{\text{ess}}(H)$. We say that λ is isolated from the left (respectively, from the right) in the essential spectrum if there exists $\delta > 0$ such that

$$(\lambda - \delta, \lambda] \cap \sigma_{\text{ess}}(H) = \{\lambda\} \quad (\text{respectively, } [\lambda, \lambda + \delta) \cap \sigma_{\text{ess}}(H) = \{\lambda\}).$$

Definition 1.4. Let λ be a boundary point of $\sigma_{\text{ess}}(H)$ isolated from the left (respectively, from the right). If there exists a sequence

$$\{\lambda_n\} \subset \sigma_{\text{disc}}(H)$$

such that

$$\lambda_n < \lambda \quad (\text{respectively, } \lambda_n > \lambda) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N},$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda,$$

then we say that the Efimov effect occurs at the point λ of the essential spectrum from the left (respectively, from the right).

Throughout the paper, we examine how the structure of the kernel, the geometry of the underlying space, and the integral perturbations influence the distribution of eigenvalues relative to $E_{\min}$, thereby facilitating a precise characterization of the conditions under which such spectral accumulation may occur.

To analyze the spectral structure and identify conditions under which the Efimov effect occurs, we begin by establishing the necessary mathematical setting.

Let $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ and $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ be compact domains, where $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$. We consider the complex Hilbert space $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ endowed with the standard inner product. On this space, we define two families of integral operators associated with complex-valued continuous kernels:

$$k_1(x, s, y) \in C(\Omega_1^2 \times \Omega_2), \quad k_1(x, s, y) = \overline{k_1(s, x, y)},$$

$$k_2(x, t, y) \in C(\Omega_1 \times \Omega_2^2), \quad k_2(x, t, y) = \overline{k_2(x, y, t)}.$$

These kernels define the partial integral operators A_1 and A_2 as follows:

$$(A_1 f)(x, y) = \int_{\Omega_1} k_1(x, s, y) f(s, y) ds, \quad (A_2 f)(x, y) = \int_{\Omega_2} k_2(x, t, y) f(x, t) dt.$$

Let $h_0(x, y)$ be a real-valued continuous function on $\Omega_1 \times \Omega_2$. The multiplication operator V_0 is then defined by

$$(V_0 f)(x, y) = h_0(x, y) f(x, y).$$

We define the self-adjoint operator V as

$$V = V_0 - A, \quad \text{where} \quad A = A_1 + A_2. \quad (1.1)$$

For $\lambda \in \rho(V_0)$ we introduce the auxiliary operators $B_1(\lambda)$ and $B_2(\lambda)$ in $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ given by

$$B_1(\lambda) f(x, y) = \int_{\Omega_1} \frac{k_1(x, s, y)}{h_0(s, y) - \lambda} f(s, y) ds, \quad B_2(\lambda) f(x, y) = \int_{\Omega_2} \frac{k_2(x, t, y)}{h_0(x, t) - \lambda} f(x, t) dt.$$

Let $\Delta_1(y; \lambda)$ and $\Delta_2(x; \lambda)$ denote the Fredholm determinants [15, Chapter 1, § 3, p. 27–37] of the compact operators $E - B_1(\lambda)$ and $E - B_2(\lambda)$, respectively, where E is the identity operator. We define the following spectral sets:

$$\sigma_1 = \{\lambda \in \rho(V_0) \mid \Delta_1(y_0; \lambda) = 0 \text{ for some } y_0 \in \Omega_2\}, \quad (1.2)$$

$$\sigma_2 = \{\lambda \in \rho(V_0) \mid \Delta_2(x_0; \lambda) = 0 \text{ for some } x_0 \in \Omega_1\}. \quad (1.3)$$

Let $\sigma_0 := \sigma(V_0) = \text{Ran}(h_0)$ be the spectrum of the multiplication operator V_0 . Then the following decomposition results (see [16, Theorem 6]) hold:

$$\sigma(V_0 - A_1) = \sigma_0 \cup \sigma_1, \quad \sigma(V_0 - A_2) = \sigma_0 \cup \sigma_2.$$

Furthermore, the essential spectrum of the operator V can be explicitly characterized as (see [17, Theorem 3.3]):

$$\sigma_{\text{ess}}(V) = \sigma(V_0 - A_1) \cup \sigma(V_0 - A_2).$$

This construction lays the foundation for analyzing the discrete spectrum of the operator V and the presence of the Efimov effect in this context. The key idea is that the degeneracy of the kernel allows for a rich eigenvalue structure, including the possibility of infinite accumulation of eigenvalues below the essential spectrum. The next section presents a concrete operator model derived from the above general structure.

2. Formulation of the problem

Now let us consider a concrete model that serves as a foundation for our spectral analysis. Suppose that

$$\Omega_1 = [a, b]^{d_1} \subset \mathbb{R}^{d_1}, \quad \Omega_2 = [c, d]^{d_2} \subset \mathbb{R}^{d_2}$$

for some $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, that is the sets Ω_1 and Ω_2 are compact rectangular domains. In the Hilbert space $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, we define a bounded self-adjoint partial integral operator (PIO) H as follows:

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \quad (2.1)$$

where each component is specified below.

The operator H_0 is a multiplication operator by a real-valued continuous function $h_0(x, y)$ defined on $\Omega_1 \times \Omega_2$:

$$H_0 f(x, y) = h_0(x, y) f(x, y). \quad (2.2)$$

The operator T_1 acts as a degenerate partial integral operator over the first variable:

$$T_1 f(x, y) = \int_{\Omega_1} \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} f(s, y) ds, \quad (2.3)$$

and T_2 is its counterpart acting over the second variable:

$$T_2 f(x, y) = \int_{\Omega_2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k \psi_k(y) \overline{\psi_k(t)} f(x, t) dt. \quad (2.4)$$

Here, the sequences $\{\alpha_k\}$ and $\{\beta_k\}$ consist of nonnegative real coefficients that satisfy the square-summability conditions:

$$\sum_k \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_k \beta_k^2 < \infty.$$

The functions $\{\varphi_k\}$ and $\{\psi_k\}$ form orthonormal systems in $L_2(\Omega_1)$ and $L_2(\Omega_2)$, respectively, where,

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \varphi_j) &= \int_{\Omega_1} \varphi_i(\xi) \overline{\varphi_j(\xi)} d\xi = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j, \\ 1, & \text{if } i = j, \end{cases} \\ (\psi_i, \psi_j) &= \int_{\Omega_2} \psi_i(\xi) \overline{\psi_j(\xi)} d\xi = \begin{cases} 0, & \text{if } i \neq j, \\ 1, & \text{if } i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

This operator model H is central to our investigation. Its structure, with degenerate kernels acting separately on Ω_1 and Ω_2 , makes it particularly suitable for analyzing phenomena like the Efimov effect. The spectral properties of H are determined not only by the multiplication function $h_0(x, y)$ but also by the sequences $\{\alpha_k\}$ and $\{\beta_k\}$, which influence the interaction terms T_1 and T_2 . In subsequent sections, we establish conditions under which H admits an infinite discrete spectrum below the essential spectrum.

This construction leads to a class of degenerate kernel operators that naturally arise in various quantum mechanical models, including lattice approximations of three-particle Schrodinger operators. The spectral analysis of such operators, particularly with respect to the accumulation of discrete eigenvalues and the manifestation of the Efimov effect, will be the main focus of our study in the subsequent sections.

The discrete Schrodinger operators of the form (1.1), which describe a system of three quantum particles situated on a three-dimensional lattice and are represented by a partially integral operator H , have been the subject of extensive study in the literature (see [1, 18, 19]). In particular, the spectral properties of such operators have attracted significant interest due to their connection with the Efimov effect and accumulation phenomena in the discrete spectrum.

In [20], sufficient conditions were established for the finiteness and infiniteness of the discrete spectrum of the operator H in two specific cases: first, when the integral kernel has rank 1; and second, when the essential spectrum of H coincides with that of the unperturbed operator H_0 , i. e., $\sigma_{\text{ess}}(H) = \sigma(H_0)$.

A more concrete manifestation of the Efimov effect in this framework was demonstrated in [18], where the existence of an infinite sequence of eigenvalues was proven for the model (1.1) under a specific choice of the function $h_0(x, y)$. In that case, the lower bound of the essential spectrum of the operator H was shown to be zero.

Let the function h_0 is defined as

$$h_0(x, y) = u(x)v(y), \tag{2.5}$$

where $u(x)$ and $v(y)$ are non-negative continuous functions defined on the domains Ω_1 and Ω_2 , respectively. Moreover, we assume that $u^{-1}(\{0\}) \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ and $v^{-1}(\{0\}) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$.

The subsequent work [19] focused on the case of formula (2.5) under the assumption that $v(y) = u(y)$, where $u(x)$ is a non-negative continuous function defined on the domain $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$, and the integrability condition

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{u(x)} < \infty$$

is satisfied. In this setting, an exact characterization of the essential spectrum of the partially integral operator H was obtained under the assumption that the integral kernels of T_1 and

T_2 are of rank one. Moreover, the finiteness of the number of eigenvalues below the lower edge of the essential spectrum was rigorously established.

In a later study [21], the operator (2.1) was investigated from the spectral perspective under the assumption that the integral operators T_1 and T_2 have separable integral kernels of rank two. The analysis assumed that $\alpha_k, \beta_k > 0$ for $k = 1, 2$, with constant test functions $\varphi_1(x) = \psi_1(x) = 1$. Under these conditions, an explicit formula for the lower boundary of the essential spectrum of the associated partially integral operator H was obtained.

A separate investigation reported in [22] focused on the essential spectrum of the model operator (2.1) in the symmetric setting defined by $\alpha_1 = \alpha_2 > 0$ and $\beta_1 = \beta_2 > 0$, where both integral components T_1 and T_2 possess integral kernels of rank two. The authors established a precise characterization of the essential spectrum and identified its lower spectral boundary, thereby extending earlier results on the spectral behavior of this class of operators.

In this paper, we investigate the Efimov effect for the model operator H defined in (2.1), where H_0 denotes the multiplication operator by the function h_0 given in (2.5). Unlike previously studied models, this operator features a kernel represented via infinite orthonormal systems and is defined on a more general underlying function space. A complete characterization of the lower edge of the essential spectrum, combined with the identification of sufficient conditions for the emergence of the Efimov effect, constitutes the primary novelty of this work.

In particular, our approach employs the minimax principle for bounded self-adjoint operators and leverages the spectral properties of degenerate kernel operators, enabling a rigorous derivation of conditions under which infinitely many eigenvalues accumulate below the lower edge of the essential spectrum.

3. Characterization of the essential spectrum of the operator

In order to investigate the spectral properties of the partial integral operator introduced in (2.1), we now construct auxiliary operators acting in the subspaces $L_2(\Omega_1)$ and $L_2(\Omega_2)$. These operators are closely related to the well-known Friedrichs model [23, p. 163–185; p. 213–240] and serve as building blocks for analyzing the emergence of discrete spectrum in our problem.

Let us define the bounded self-adjoint operators K_1 and K_2 in the Hilbert spaces $L_2(\Omega_1)$ and $L_2(\Omega_2)$, respectively, by the following formulas:

$$\begin{aligned} K_1\varphi(x) &= \int_{\Omega_1} \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} \varphi(s) ds, \\ K_2\psi(y) &= \int_{\Omega_2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k \psi_k(y) \overline{\psi_k(t)} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Each of the operators K_1 and K_2 is compact, self-adjoint, and positive in the corresponding Hilbert space. Their integral representations exhibit degenerate kernels, reflecting separability and the rank-one expansion characteristic of Friedrichs-type models: each term of the kernels represents a rank-one operator, and their sums define K_1 and K_2 .

These operators play an essential role in the diagonalization process of the full operator H , and their spectral properties will be used to characterize the discrete spectrum and to establish conditions under which the Efimov effect arises in our setting. In the next section, we explore how the spectral data of K_1 and K_2 influence the location and accumulation of eigenvalues of the full operator.

Let $T = T_1 + T_2$ be the sum of two self-adjoint operators acting in the Hilbert space $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Without loss of generality, we assume that the Lebesgue measures μ_1 and μ_2 on Ω_1 and Ω_2 , respectively, are normalized:

$$\mu_1(\Omega_1) = \mu_2(\Omega_2) = 1.$$

Theorem 3.1. *The spectrum of the operator T satisfies the following relations:*

- (1) *The essential spectrum of T is given by the union of the spectra of the operators K_1 and K_2 :*

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma(K_1) \cup \sigma(K_2) = \{0\} \cup \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

- (2) *The discrete spectrum of T consists of all points of the form $\omega = \alpha + \beta$ that do not belong to $\sigma(K_1) \cup \sigma(K_2)$, where $\alpha \in \sigma_{\text{disc}}(K_1)$ and $\beta \in \sigma_{\text{disc}}(K_2)$:*

$$\sigma_{\text{disc}}(T) = \{\alpha + \beta : \alpha \in \sigma_{\text{disc}}(K_1), \beta \in \sigma_{\text{disc}}(K_2), \alpha + \beta \notin \sigma_{\text{disc}}(K_1) \cup \sigma_{\text{disc}}(K_2)\}.$$

P r o o f. We begin by observing that the spectra of the operators K_1 and K_2 are given by

$$\sigma(K_1) = \{0\} \cup \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad \sigma(K_2) = \{0\} \cup \{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}},$$

where each α_i and β_j is a simple eigenvalue of K_1 and K_2 , respectively. It is clear that 0 is an eigenvalue of infinite multiplicity for both K_1 and K_2 .

Define the direct sum operator

$$K := K_1 \oplus K_2 : L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \rightarrow L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2), \quad K(f_1 \oplus f_2) = K_1 f_1 \oplus K_2 f_2.$$

Define the tensor sum operators

$$T_1 := K_1 \otimes I, \quad T_2 := I \otimes K_2, \quad T := T_1 + T_2 \text{ on } L_2(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

The natural embedding

$$i : L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \rightarrow L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \quad i(f_1 \oplus f_2) = f_1 \otimes 1 + 1 \otimes f_2$$

yields the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} H_1 \oplus H_2 & \xrightarrow{K_1 \oplus K_2} & H_1 \oplus H_2 \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ H & \xrightarrow{T_1 + T_2} & H \end{array}$$

so that $i \circ K = T \circ i$.

Since

$$\sigma(T_1) = \sigma(K_1) = \{0\} \cup \{\alpha_i\}, \quad \sigma(T_2) = \sigma(K_2) = \{0\} \cup \{\beta_j\},$$

the spectrum of the tensor sum operator T satisfies

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) + \sigma(T_2) = \{0\} \cup \{\alpha_i\} \cup \{\beta_j\} \cup \{\alpha_i + \beta_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}.$$

According to Proposition 2.1 in [24], we have the inclusion

$$\ker(K_1) \otimes \ker(K_2) \subset L_0,$$

where $L_0 \subset L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ is the eigenspace corresponding to the eigenvalue $\omega = 0$ of the operator $T_1 + T_2$. Therefore, $\dim(L_0) = \infty$, i. e., $\omega = 0$ is an eigenvalue of infinite multiplicity of the operator T .

Next, consider the values $\omega_i = \alpha_i$ and $\tilde{\omega}_j = \beta_j$. Since $0 \in \sigma(T_2)$, we have $\omega_i = \alpha_i + 0 \in \sigma(T_1 + T_2)$, and hence ω_i is an eigenvalue of T . Given that $\dim(\ker(K_2)) = \infty$ and that the subspace $M_{\alpha_i} \otimes \ker(K_2) \subset L_{\omega_i}$ (where M_{α_i} is the eigenspace of K_1 corresponding to α_i), we conclude that $\dim(L_{\omega_i}) = \infty$. Thus, each α_i is an eigenvalue of infinite multiplicity for the operator T . A similar argument shows that each β_j is also an eigenvalue of infinite multiplicity of the operator T .

Let $\phi_i \in L_2(\Omega_1)$ and $\psi_j \in L_2(\Omega_2)$ be eigenfunctions of K_1 and K_2 corresponding to eigenvalues α_i and β_j , respectively:

$$K_1\phi_i = \alpha_i\phi_i, \quad K_2\psi_j = \beta_j\psi_j.$$

Consider the tensor product $\phi_i \otimes \psi_j \in L_2(\Omega_1) \otimes L_2(\Omega_2)$. Then

$$\begin{aligned} T(\phi_i \otimes \psi_j) &= (T_1 + T_2)(\phi_i \otimes \psi_j) = (K_1 \otimes I)(\phi_i \otimes \psi_j) + (I \otimes K_2)(\phi_i \otimes \psi_j) \\ &= K_1\phi_i \otimes \psi_j + \phi_i \otimes K_2\psi_j = \alpha_i(\phi_i \otimes \psi_j) + \beta_j(\phi_i \otimes \psi_j) = (\alpha_i + \beta_j)(\phi_i \otimes \psi_j). \end{aligned}$$

Hence, $\alpha_i + \beta_j \in \sigma(T)$, and if $\alpha_i + \beta_j \neq \alpha_n$ and $\alpha_i + \beta_j \neq \beta_n$ for all n, m , this eigenvalue belongs to the discrete spectrum $\sigma_{\text{disc}}(T)$.

Combining these facts, the spectrum and the essential spectrum of the operator $T = T_1 + T_2$ can be written as

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\alpha_i\} \cup \{\beta_j\} \cup \{\alpha_i + \beta_j\}_{i,j \in \mathbb{N}}, \quad \text{and} \quad \sigma_{\text{ess}}(T) = \{0\} \cup \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \{\beta_j\}_{j \in \mathbb{N}}.$$

Hence, the discrete spectrum is given by

$$\sigma_{\text{disc}}(T) = \{\alpha_i + \beta_j : (i, j) \in I\}, \quad \text{where } I = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_i + \beta_j \neq \alpha_n \text{ and } \alpha_i + \beta_j \neq \beta_n\}.$$

□

Let $h_0(x, y)$ be defined by (2.5). In the space $L_2(\Omega_1)$ we consider the family $\{H_1(\alpha)\}_{\alpha \in \Omega_2}$ self-adjoint operators in the Friedrichs model

$$H_1(\alpha)\varphi(x) = u(x)v(\alpha)\varphi(x) - \int_{\Omega_1} \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} \varphi(s) ds.$$

Similarly, we define in $L_2(\Omega_2)$ the family of operators $\{H_2(\beta)\}_{\beta \in \Omega_1}$:

$$H_2(\beta)\psi(y) = u(\beta)v(y)\psi(y) - \int_{\Omega_2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k \psi_k(y) \overline{\psi_k(t)} \psi(t) dt.$$

Lemma 3.1. *Let $\alpha \in \Omega_2$ (respectively, $\beta \in \Omega_1$) be a fixed point. Then a number $\lambda \in (-\infty, 0)$ is an eigenvalue of the operator $H_1(\alpha)$ (respectively, of $H_2(\beta)$) if and only if the corresponding Fredholm determinant vanishes; that is,*

$$\Delta_1(\alpha; \lambda) = 0 \quad (\text{respectively, } \Delta_2(\beta; \lambda) = 0).$$

The proof follows directly from the classical Fredholm alternative (see [25, Theorem 4, p. 34]), which states that a non-zero solution exists to the homogeneous equation associated with a compact integral operator if and only if the corresponding Fredholm determinant is zero. In our setting, K_1 and K_2 are compact self-adjoint operators with degenerate kernels, and the existence of a negative eigenvalue λ corresponds precisely to the condition that $\Delta_1(\alpha; \lambda) = 0$ or $\Delta_2(\beta; \lambda) = 0$, respectively.

Let us introduce several notations that will be useful in the subsequent analysis. For $j = 1, 2$, define the function $\pi_j(t)$ as the infimum of the quadratic form associated with the operator $H_j(t)$ over all unit vectors in the corresponding Hilbert space:

$$\pi_1(t) := \inf_{\|\varphi\|=1} (H_1(t)\varphi, \varphi), \quad t \in \Omega_2, \quad \pi_2(s) := \inf_{\|\psi\|=1} (H_2(s)\psi, \psi), \quad s \in \Omega_1.$$

Finally, denote by

$$\pi_1^{\max} := \max_{t \in \Omega_2} \pi_1(t), \quad \pi_2^{\max} := \max_{s \in \Omega_1} \pi_2(s), \quad u_{\max} := \max_{x \in \Omega_1} u(x), \quad v_{\max} := \max_{y \in \Omega_2} v(y),$$

the maximum values of the functions $\pi_1(t)$, $\pi_2(s)$, $u(x)$ and $v(y)$ over their respective domains.

Theorem 3.2. *The essential spectrum of the operator H is given by the following equality:*

$$[-\alpha_1, \pi_1^{\max}] \cup [-\beta_1, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}] \subset \sigma_{\text{ess}}(H).$$

P r o o f. Let $x = x_0$ and $y = y_0$ be fixed points such that

$$u(x_0) = 0, \quad v(y_0) = 0.$$

We consider the auxiliary operators $H_1(y)$ and $H_2(x)$ previously defined, evaluated at the points $y = y_0$ and $x = x_0$, respectively. In particular, for $h \in L^2(\Omega_1)$ and $g \in L^2(\Omega_2)$ we have

$$\begin{aligned} (H_1(y_0)h)(x) &= - \int_{\Omega_1} \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} h(s) ds, \\ (H_2(x_0)g)(y) &= - \int_{\Omega_2} \sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k \psi_k(y) \overline{\psi_k(t)} g(t) dt. \end{aligned}$$

It is straightforward to verify that each number $-\alpha_k$ and $-\beta_k$ is an eigenvalue of the operators $H_1(y_0)$ and $H_2(x_0)$, respectively. Therefore, by Theorem 3.1 and the definitions of the sets σ_1 (1.2) and σ_2 (1.3), we obtain:

$$\{-\alpha_k\} \subset \sigma_1, \quad \{-\beta_k\} \subset \sigma_2.$$

Since H_0 (2.2) and T_1 (2.3) are positive operators, for any unit vector $f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, it follows that

$$((H_0 - T_1)f, f) \geq -(T_1 f, f) \geq -\max_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k = -\alpha_1.$$

Hence, $E_{\min}(H_0 - T_1) \geq -\alpha_1$. On the other hand, as $-\alpha_1 \in \sigma_1$, we conclude:

$$E_{\min}(H_0 - T_1) = -\alpha_1.$$

Now consider the function

$$\pi_1(t) = \inf_{\|h\|=1} (H_1(t)h, h) = - \sup_{\|h\|=1} (T_1 h, h) \geq -\alpha_1,$$

and it attains its minimum at some $t = y^{\min}$ such that $\pi_1(y^{\min}) = -\alpha_1$. Therefore,

$$\pi_1^{\min} = \min_{t \in \Omega_2} \pi_1(t) = -\alpha_1 \in \sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_1).$$

Suppose that for some $t_0 \in \Omega_2$, we have $\pi_1(t_0) < 0$. Then, by the minimax principle (see [26, Theorem 2.1, Section 2]), $\pi_1(t_0)$ is an eigenvalue of $H_1(t_0)$. Since $\sigma_{\text{ess}}(H_1(t_0)) = [0, M(t_0)]$ with $M(t_0) = u_{\max} \cdot v(t_0)$, it follows that

$$\Delta_1(t_0; \pi_1(t_0)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1(t_0) \in \sigma_1,$$

which implies $\pi_1(t_0) \in \sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_1)$ as $\sigma_{\text{disc}}(H_0 - T_1) = \emptyset$.

Also, since $\sigma_0 = \sigma(H_0) = [0, u_{\max} \cdot v_{\max}] \subset \sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_1)$ and $\sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_1) = \sigma_1 \cup \sigma_0$, we obtain:

$$[-\alpha_1, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}] \subset \sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_1).$$

In a similar manner, one can show:

$$[-\beta_1, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}] \subset \sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_2).$$

Finally, using the equality

$$H = H_0 - (T_1 + T_2)$$

and applying properties of the essential spectrum under additive self-adjoint perturbations, we conclude that

$$[-\alpha_1, \pi_1^{\max}] \cup [-\beta_1, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}] \subset \sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_1) \cup \sigma_{\text{ess}}(H_0 - T_2) = \sigma_{\text{ess}}(H).$$

□

Corollary 3.1. *From Theorem 3.2, it follows that the lower edge of the essential spectrum of the operator H is given by*

$$E_{\min}(H) = \min\{-\alpha_1, -\beta_1\}.$$

4. On the Existence of the Efimov Effect in the Model Operator

From the positivity of the operators H_0 (2.2), T_1 (2.3), and T_2 (2.4), and by Theorem 3.1, it follows that the discrete spectrum of the operator H given by (2.1) is located entirely within the negative half-line.

Let us now define a matrix $\Lambda = (\xi_{i,j})$ with strictly positive entries, where

$$\xi_{i,j} = \left(\int_{\Omega_1} u(x) |\varphi_i(x)|^2 dx \right) \cdot \left(\int_{\Omega_2} v(y) |\psi_j(y)|^2 dy \right).$$

Theorem 4.1.

a) Let $\alpha_1 \geq \beta_1$. If the following condition is satisfied for each number $j \in \mathbb{N}$ and some number $i \in \mathbb{N}$

$$\xi_{i,j} < \alpha_i + \beta_j - \alpha_1, \quad (4.1)$$

then there is an Efimov effect below the lower edge of the essential spectrum of the operator;

b) Let $\beta_1 \geq \alpha_1$. If the following condition is satisfied for each number $i \in \mathbb{N}$ and some number $j \in \mathbb{N}$

$$\xi_{i,j} < \alpha_i + \beta_j - \beta_1, \quad (4.2)$$

then there is an Efimov effect below the lower edge of the essential spectrum of the operator.

P r o o f. Let us prove statement a). The proof of statement b) is analogous. From the inequality $E_{\min}(H_0 - T_1) = -\alpha_1 \geq E_{\min}(H_0 - T_2)$ and Corollary 5.1 we obtain that $\inf E_{\min}(H) = -\alpha_1$. Let's put orthonormal system $f_{i,j} = \varphi_i(x) \cdot \psi_j(y)$. Then, we have $\|f_{i,j}\| = 1$ and the following inequality holds for a fixed $i \in \mathbb{N}$ and for each $j \in \mathbb{N}$:

$$(Hf_{i,j}, f_{i,j}) = (H_0f_{i,j}, f_{i,j}) - (T_1f_{i,j}, f_{i,j}) - (T_2f_{i,j}, f_{i,j}) = \xi_{i,j} - \alpha_i - \beta_j < -\alpha_1 = E_{\min}(H).$$

Therefore, we have

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (Hf_{i,j}, f_{i,j}) = -\alpha_1, \quad (Hf_{i,j}, f_{i,j}) < -\alpha_1.$$

Hence, from the family $\{f_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ one can extract an orthonormal system

$$\{\vartheta_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \{f_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$$

in the Hilbert space $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Renumbering this system as $\{\vartheta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, we may assume that it is ordered in the sense that

$$(H\vartheta_n, \vartheta_n) \leq (H\vartheta_{n+1}, \vartheta_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

We have

$$S_{\min}(H) = \lambda_1(H) \leq (H\vartheta_1, \vartheta_1) < -\alpha_1.$$

Let $L_0\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}$ be n -dimensional subspace in $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ spanned by functions $\vartheta_1, \dots, \vartheta_n$. Let us show that

$$\lambda_n(H) \leq (H\vartheta_n, \vartheta_n) < -\alpha_1.$$

We have

$$\inf_{\|\vartheta\|=1, \vartheta \perp L_0\{\vartheta_1\}} (H\vartheta, \vartheta) \leq (H\vartheta_2, \vartheta_2) < -\alpha_1.$$

From here we get that

$$\inf_{\|\vartheta\|=1, \vartheta \perp L, \dim L=1} (H\vartheta, \vartheta) \leq (H\vartheta_2, \vartheta_2) < -\alpha_1$$

for arbitrary $L \subset L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ with $\dim L = 1$. Hence,

$$\lambda_2(H) = \sup_{L \subset L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \dim L=1} \inf_{\|\vartheta\|=1, \vartheta \perp L} (H\vartheta, \vartheta) \leq (H\vartheta_2, \vartheta_2).$$

For every $n \in \mathbb{N}$ we have

$$\inf_{\|\vartheta\|=1, \vartheta \perp L_0\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_n\}} (H\vartheta, \vartheta) \leq (H\vartheta_{n+1}, \vartheta_{n+1}) < -\alpha_1.$$

Therefore, we have

$$\lambda_n(H) = \sup_{L \subset L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \dim L = (n-1)} \inf_{\|\vartheta\|=1, \vartheta \perp L} (H\vartheta, \vartheta) \leq (H\vartheta_n, \vartheta_n) < -\alpha_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Thus $\{\lambda_n(H)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (-\infty, -\alpha_1) \cap \sigma_d(H)$, i. e. the operator H has infinitely many eigenvalues below the lower boundary of the essential spectrum. On the other hand, $\{\lambda_n(H)\}$ is a bounded subsequence. This means that the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(H)$ exists and $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(H) \leq E_{\min}(H) = -\alpha_1$. Due to the closedness of the spectrum of self-adjoint operators we have $a \in \sigma(H)$, and hence from the definition of the essential spectrum we find that $a \in \sigma_{\text{ess}}(H)$, and therefore we have $a = E_{\min}(H) = -\alpha_1$. This means that below the lower edge of the essential spectrum of the operator H (2.1) there is an Efimov effect. $\square$

Corollary 4.1. *If some element $\xi_{i,j}$ of the matrix Λ satisfies the conditions (4.1) or (4.2), then the operator H has a negative eigenvalue below the lower edge of the essential spectrum. i. e. we have $\sigma_{\text{disc}}(H) \neq \emptyset$.*

5. An Illustrative Example Related to the Main Result

$$\text{Consider the function: } u(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ u_0(x), & \text{if } x \notin \left[0, \frac{1}{2}\right], \end{cases}$$

$$\text{where } u_0(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n r_n(x), \quad r_k(x) = \begin{cases} \frac{2(p_k - x)}{p_k - p_{k+1}}, & \text{if } x \in \left[p_k, \frac{p_k + p_{k+1}}{2}\right], \\ \frac{2(p_{k+1} - x)}{p_{k+1} - p_k}, & \text{if } x \in \left[\frac{p_k + p_{k+1}}{2}, p_{k+1}\right], \\ 0, & \text{if } x \notin [p_k, p_{k+1}], \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Sequences p_n and δ_n are given as:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \frac{1}{2}, \quad p_n = p_{n-1} + \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_n \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

In the space $L_2[0, 1]$, consider a sequence of orthonormal function

$$\varphi_n(x) = 2^{\frac{n+1}{2}} \sin \xi_n(y), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\xi_k(y) = \begin{cases} 2^k \pi (y - p_{k-1}), & \text{if } y \in [p_{k-1}, p_k], \\ 0, & \text{if } y \notin [p_{k-1}, p_k]. \end{cases}$$

In the space $L_2[0, 1]^2$, consider the following model operator

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \tag{5.1}$$

where

$$\begin{aligned} H_0 f(x, y) &= u(x)u(y)f(x, y), \\ T_1 f(x, y) &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)} f(s, y) ds, \\ T_2 f(x, y) &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{2}{3}\right)^k \varphi_k(y) \overline{\varphi_k(t)} f(x, t) dt. \end{aligned}$$

Let us show that in model (5.1) below the lower edge of the essential spectrum $\sigma_{ess}(H)$ there is an Efimov effect.

Let us consider the sequence of orthonormal functions $f_{i,j}$ in $L_2[0, 1]^2$:

$$f_{i,j} = \varphi_i(x)\varphi_j(y), \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Let's put $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^n$ and $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Then, by Theorem 3.1, each number $\omega_{i,j} = a_i + b_j$, $i, j \in \mathbb{N}$ is an eigenvalue of operator $T = T_1 + T_2$.

$$((H_0 - T_1)f, f) = (H_0 f, f) - (T_1 f, f) \geq (-T_1 f, f) \geq -a_1 > -b_1,$$

$$((H_0 - T_2)f, f) = (H_0 f, f) - (T_2 f, f) \geq -(T_2 f, f) \geq -b_1,$$

where $f \in L_2[0, 1]^2$, $\|f\| = 1$. From these inequalities and Theorem 3.2 we obtain $E_{\min}(H) = -b_1$.

For each element $\xi_{i,j}$:

$$\xi_{i,j} = (H_0 f_{i,1}, f_{i,j}) = \int_0^1 u(s) \varphi_i^2(s) ds \int_0^1 u(t) \varphi_j^2(t) dt \leq \delta_i \delta_j.$$

If we take $j = 1$ and from $\delta_j = 1$, $\delta_i \leq a_i$ we have

$$\xi_{i,1} \leq \delta_i \leq a_i = a_i + b_j - b_1.$$

Then the condition of Theorem 4.1 is satisfied for each $i \in \mathbb{N}$. This means that in model (5.1) below lower edge of the essential spectrum there is an Efimov effect.

References

- [1] V.N. Efimov, "Weakly Bound States of Three Resonantly Interacting Particles", *Physics of Atomic Nuclei*, **12**:5 (1970), 1080–1091 (In Russian).
- [2] A.S. Kalitvin, V.A. Kalitvin, "Linear operators and equations with partial integrals", *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, **65**:3 (2019), 390–433 (In Russian).
- [3] Yu.N. Ovchinnikov, I.M. Sigal, "Number of bound states of three-body systems and Efimov's effect", *Annals of Physics*, **123**:2 (1979), 274–295.
- [4] H. Tamura, "The Efimov effect of three-body Schrodinger operators", *Journal of Functional Analysis*, **95**:2 (1991), 433–459.
- [5] S.N. Lakaev, "On the infinite number of three-particle bound states of a system of three quantum lattice particles", *Theoretical and Mathematical Physics*, **89**:1 (1991), 1079–1086.
- [6] S.N. Lakaev, "On Efimov's effect in a system of three identical quantum particles", *Functional Analysis and Its Applications*, **27**:3 (1993), 166–175.
- [7] A.V. Sobolev, "The Efimov effect. Discrete spectrum asymptotics", *Communications in Mathematical Physics*, **156**:1 (1993), 101–126.

- [8] S. N. Lakaev, J. I. Abdullaev, “Spectral properties of the three-particle difference schrodinger operator”, *Functional Analysis and Its Applications*, **33**:2 (1999), 151–153.
- [9] J. I. Abdullaev, S. N. Lakaev, “Asymptotics of the discrete spectrum of the three-particle Schrodinger difference operator on a lattice”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **136**:2 (2003), 1096–1109.
- [10] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, “Schrodinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics”, *Annales Henri Poincare*, **5**:4 (2004), 743–772.
- [11] M. I. Muminov, I. N. Bozorov, T. K. Rasulov, “On the number of components of the essential spectrum of one 2×2 operator matrix”, *Russian Mathematics*, **68**:2 (2024), 75–79.
- [12] T. H. Rasulov, E. B. Dilmurodov, “On the eigenvalues of a soluble model of coupled molecular and nuclear Hamiltonians”, *Contemporary Mathematics*, **5**:1 (2024), 843–852.
- [13] T. H. Rasulov, F. M. Zhurakulova, “Investigation of the spectrum of an operator matrix of order three in one-dimensional case”, *Russian Mathematics*, **69**:5 (2025), 57–62.
- [14] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. V.IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978.
- [15] M. L. Krasnov, *Integral Equations*, Mir Publ., 1978 (In Russian).
- [16] Yu. Kh. Eshkabilov, “Perturbation of the spectrum of the operator of multiplication by function with a partial integral operator”, *Acta NUUz*, 2006, № 2, 17–21 (In Russian).
- [17] Yu. Kh. Eshkabilov, “A discrete “three-particle” Schrodinger operator in the Hubbard model”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **149**:2 (2006), 1497–1511.
- [18] T. H. Rasulov, “Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **163**:1 (2010), 429–437.
- [19] Yu. Kh. Eshkabilov, R. R. Kucharov, “Essential and discrete spectra of the three-particle Schrodinger operator on a lattice”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **170**:3 (2012), 341–353.
- [20] S. Albeverio, S. N. Lakaev, Z. I. Muminov, “On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices”, *Russian Journal of Mathematical Physics*, **14**:4 (2007), 377–387.
- [21] Yu. Kh. Eshkabilov, R. R. Kucharov, “On the finiteness of negative eigenvalues of a partially integral operator”, *Siberian Advances in Mathematics*, **25**:3 (2015), 179–190.
- [22] R. R. Kucharov, T. M. Tuxtamurodova, G. P. Arzikulov, “Essential spectrum of one partial integral operator with a degenerate kernel”, *Acta NUUz*, 2023, 85–96 (In Russian).
- [23] K. O. Friedrichs, *Spectral Theory of Operators in Hilbert Space. V.9*, Applied Mathematical Sciences, Springer New York, New York, 1973.
- [24] Yu. Kh. Eshkabilov, “About the spectrum of the tensor sum of compact operators”, *UzMJ*, 2005, № 3, 104–112 (In Russian).
- [25] F. G. Tricomi, *Integral Equations*, Interscience Publishers, Inc., New York; Interscience Publishers Ltd., London, 1957.
- [26] Yu. Kh. Eshkabilov, “On infinity of the discrete spectrum of operators in the Friedrichs model”, *Siberian Advances in Mathematics*, **22**:1 (2005), 1–12.

Information about the authors

Ramziddin Ruzimuradovich Kucharov,
PhD of Physics and Mathematics, Associate
Professor, National University of Uzbekistan;
Associate Professor, Tashkent State Technical
University named after Islam Karimov, Tashkent,
Uzbekistan. E-mail: ramz3364647@yahoo.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0728-9340>

Информация об авторах

Кучаров Рамзиддин Рузимурадович,
доктор философии по физико-математическим
наукам, доцент, Национальный университет Уз-
бекистана; доцент, Ташкентский государствен-
ный технический университет имени Исла-
ма Каримова, г. Ташкент, Узбекистан. E-mail:
ramz3364647@yahoo.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0728-9340>

Tillohon Mansurjon qizi Tuxtamurodova,
Doctoral Student, National University of
Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan.
E-mail: mirzayevatilloxon13@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1721-880X>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Ramziddin R. Kucharov
E-mail: ramz3364647@yahoo.com

Received 28.10.2025
Reviewed 25.02.2026
Accepted for press 12.03.2026

Тухтамуродова Тиллохон Мансуржон
қизи, докторант, Национальный университет
Узбекистана, г. Ташкент, Узбекистан.
E-mail: mirzayevatilloxon13@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0009-0002-1721-880X>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Кучаров Рамзиддин Рузимурадович
E-mail: ramz3364647@yahoo.com

Поступила в редакцию 28.10.2025 г.
Поступила после рецензирования 25.02.2026 г.
Принята к публикации 12.03.2026 г.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Лангаршоев М.Р., Юсупов Г.А., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-22-31>

УДК 517.5



О точном неравенстве между наилучшим приближением и обобщенным модулем непрерывности в пространстве L_2

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ¹, Гулзорхон Амиршоевич ЮСУПОВ²¹ АНО ВО «Московский гуманитарно-технологический университет – Московский архитектурно-строительный институт»

117342, Российская Федерация, г. Москва, ул. Введенского, 1А

² Таджикский государственный педагогический Университет имени Садриддин Айни
734003, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 121

Аннотация. В данной работе получены новые точные неравенства, которые связывают наилучшее приближения тригонометрическими полиномами дифференцируемых 2π -периодических суммируемых с квадратом функций с интегралами, содержащими обобщенные модули непрерывности высших порядков r -й производной функций в метрике пространства $L_2[0, 2\pi]$.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для произвольных $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t > 0$, определены классы 2π -периодических функций: $W_m^{(r)}(t, \Phi) \subset L_2^{(r)}$, у которых усредненное значение обобщенного модуля непрерывности r -й производной функции ограничено сверху мажорантой Φ , и $W_m^{(r)}(t) \subset L_2^{(r)}$, у которых усредненное значение характеристики гладкости $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ ограничено сверху единицей. Рассматривается экстремальная задача вычисления точных значений верхних граней наилучших полиномиальных приближений класса $W_m^{(r)}(t, \Phi)$. Полученные в работе точные результаты также применяются для вычисления значения некоторых известных n -поперечников класса $W_m^{(r)}(t)$, когда речь идет о получении оценки сверху. Оценки снизу для этих же поперечников удастся получить при помощи теоремы о поперечнике шара.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, обобщенный модуль непрерывности m -го порядка, n -поперечники

Для цитирования: Лангаршоев М.Р., Юсупов Г.А. О точном неравенстве между наилучшим приближением и обобщенным модулем непрерывности в пространстве L_2 // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 22–31.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-22-31>

SCIENTIFIC ARTICLE

© M. R. Langarshoev, G. A. Yusupov, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-22-31>

On the exact inequality between the best approximation and the generalized modulus of continuity in the space L_2

Mukhtor R. LANGARSHOEV¹, Gulzorkhon A. YUSUPOV²

¹ Moscow University of Humanities and Technology – Moscow Institute of Architecture and Construction

1A, Vvedenskogo St., Moscow 117342, Russian Federation

² Tajik State Pedagogical University named after Sadridin Aini

121, Rudaki Av., Dushanbe 734003, Republic of Tajikistan

Abstract. In the paper, we obtain new exact inequalities that relate the best approximations by trigonometric polynomials of differentiable 2π -periodic square summable functions to integrals containing generalized moduli of continuity of higher orders of the r -th derivative of the functions in the metric of the space $L_2[0, 2\pi]$.

Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. For arbitrary $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $t > 0$, the classes of 2π -periodic functions are defined: $W_m^{(r)}(t, \Phi) \subset L_2^{(r)}$, for which the average value of the generalized modulus of continuity of the r -th derivative of a function is bounded from above by the majorant Φ , and $W_m^{(r)}(t) \subset L_2^{(r)}$, for which the average value of the smoothness characteristic $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ is bounded from above by unity. We consider the extremal problem of calculating the exact upper bounds of best polynomial approximations of the class $W_m^{(r)}(t, \Phi)$. The exact results obtained in the paper are also applied to calculating the value of some known n -widths of the class $W_m^{(r)}(t)$, when obtaining upper bounds. Lower bounds for these same widths can be obtained using the theorem on the width of a ball.

Keywords: the best polynomial approximation, generalized modulus of continuity of the m -th order, n -widths

Mathematics Subject Classification: 42A10, 41A17, 41A44.

For citation: Langarshoev M.R., Yusupov G.A. On the exact inequality between the best approximation and the generalized modulus of continuity in the space L_2 . *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 22–31. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-22-31>

Введение

Работа посвящена экстремальным задачам теории наилучших приближений 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами в гильбертовом пространстве $L_2 := L_2[0; 2\pi]$.

Одной из наиболее важных задач теории приближения функций является задача отыскания точных констант в неравенствах типа Джексона–Стечкина. Под неравенствами типа Джексона–Стечкина в широком смысле понимают неравенства, у которых величина наилучшего приближения конечномерным подпространством оценивается через некоторую ее характеристику гладкости. В качестве характеристики гладкости функции, как правило, рассматривают либо модуль непрерывности, либо его различные модификации.

В настоящей работе установлены точные неравенства между наилучшим приближением 2π -периодических функций тригонометрическими полиномами и обобщенным модулем непрерывности высшего порядка. Даны их приложения к задаче нахождения точной верхней грани наилучших полиномиальных приближений, а также к задаче нахождения точных значений n -поперечников классов периодических дифференцируемых функций, задаваемых обобщенным модулем непрерывности m -го порядка. Представленные результаты в некотором смысле являются распространением и обобщением известного результата С. Б. Вакарчука и А. Н. Щитова [1], доказанного для классического модуля непрерывности m -го порядка $\omega_m(f^{(r)}, t)$ на случай обобщенного модуля непрерывности $\Omega_m(f^{(r)}, t)$ функций $f \in L_2^{(r)}$.

1. Основные понятия

Обозначим через $L_2 := L_2[0, 2\pi]$ — пространство суммируемых с квадратом по Лебегу 2π -периодических действительных функций с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2[0, 2\pi]} = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Совокупность всех 2π периодических функций, у которых производные $(r-1)$ -го порядка абсолютно непрерывны, а производные $f^{(r)} \subset L_2$ обозначим через $L_2^{(r)}$. Множество всех тригонометрических полиномов

$$T_{n-1}(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k(f) \cos kx + \beta_k(f) \sin kx)$$

порядка $n-1$ обозначим через $\mathcal{T}_{n-1}$. Пусть $S_{n-1}(f; x)$ — частная сумма порядка $n-1$ ряда Фурье функции $f(x)$, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx),$$

$$S_{n-1}(f, x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k(f) \cos kx + b_k(f) \sin kx).$$

Хорошо известно, что наилучшее приближение функции f в метрике пространства L_2 тригонометрическими полиномами $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ реализуется частичной суммой ряда Фурье $S_{n-1}(f, x)$ (см. [2, с. 125]):

$$E_{n-1}(f)_2 := \inf \{ \|f - T_{n-1}\|_2 : T_{n-1}(x) \in \mathcal{T}_{n-1} \} = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2(f) \right\}^{1/2}. \quad (1.1)$$

Равенством

$$\Omega_m(f, t)_2 = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \dots \int_0^t \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\cdot)\|_{L_2}^p dh_1 \dots dh_m \right\}^{1/p}, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

где $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_m)$, $\Delta_{\bar{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \dots \circ \Delta_{h_m}^1$, будем определять обобщенный модуль непрерывности m -го порядка функции $f \in L_2$ (см. [3], [4]). Подробные свойства характеристики гладкости (1.2) изучены в работе [5].

Пусть S — единичный шар в L_2 , $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из L_2 , $\Lambda_n \subset L_2$ — n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset L_2$ — подпространство коразмерности n , $\mathcal{L} : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, $\mathcal{L}^\perp : L_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования пространства L_2 на подпространство Λ_n . Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) := \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M} \} : \Lambda_{n+1} \subset L_2 \},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \sup \{ \|f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset L_2 \},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - g\|_2 : g \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{M} \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \},$$

$$\pi_n(\mathfrak{M}, L_2) := \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M} \} : \mathcal{L}^\perp L_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset L_2 \}$$

называют соответственно бернштейновским, гильфандовским, колмогоровским, линейным и проекционным n -поперечниками. Указанные поперечники связаны следующими неравенствами (см., например, [6, с. 239]):

$$b_n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d^n(\mathfrak{M}, L_2) \leq d_n(\mathfrak{M}, L_2) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_2) = \pi_n(\mathfrak{M}, L_2).$$

Полагаем также

$$\mathcal{E}_{n-1}(\mathfrak{M}) := \sup \{ E_{n-1}(f) : f \in \mathfrak{M} \}. \quad (1.3)$$

Пусть задана произвольная возрастающая непрерывная функция $\Phi(t)$ ($0 \leq t < \infty$) такая, что $\Phi(0) = 0$. Будем называть ее мажорантой. Через $W_m^{(r)}(t, \Phi)$ и $W_m^{(r)}(t)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, обозначим классы функций $f \in L_2^{(r)}$, для которых при любом $t > 0$ выполняются, соответственно, неравенства

$$\begin{aligned} \int_0^t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h)_2 dh + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)_2 du \right] dh &\leq \Phi^{2/m}(t), \\ \int_0^t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h)_2 dh + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)_2 du \right] dh &\leq 1. \end{aligned}$$

Следуя работе [7], введем следующее обозначение

$$\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_* := \begin{cases} 1 - \frac{\sin t}{t}, & \text{если } 0 < t \leq t_*, \\ 1 - \frac{\sin t_*}{t_*}, & \text{если } t_* \leq t < \infty, \end{cases}$$

где t_* — величина аргумента, при котором функция $\frac{\sin t}{t}$ на $\mathbb{R}_+$ принимает свое наименьшее значение. Очевидно, что t_* является минимальным положительным корнем уравнения $t = \operatorname{tg} t$ ($4,49 < t_* < 4,51$).

2. Основные результаты

Теорема 2.1. *Если $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, то для произвольного $0 < t \leq 3\pi/(4n)$ имеет место точное неравенство*

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\leq \frac{3^m}{t^{3m/2}n^{m+r}} \left[\int_0^t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h)_2 dh \right. \\ &\quad \left. + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)_2 du \right] dh \right]^{m/2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Знак равенства в (2.1) доставляет функция $f_0(x) = \cos nx$.

Доказательство. Если $f \in L_2^{(r)}$ и $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ряд Фурье функции f , то

$$\Omega_m^2(f^{(r)}, t)_2 = 2^m \sum_{k=n}^{\infty} k^{2r} \rho_k^2 \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^m. \quad (2.2)$$

Для произвольной функции $f \in L_2^{(r)}$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$ имеет место (см. [8]) следующее неравенство

$$E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{\sin kt}{kt} + (E_n^2(f))^{1-1/m} \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \cdot \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2. \quad (2.3)$$

Умножая обе части неравенства (2.3) на t и интегрируя их в пределах от 0 до u , получаем:

$$\frac{u^2}{2} E_n^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{1 - \cos ku}{k^2} + E_n^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{2n^{2r/m}} \int_0^u t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt. \quad (2.4)$$

Теперь интегрируем неравенство (2.4) по переменной u в пределах от 0 до h и делим обе его части на h , в результате имеем:

$$\frac{h^2}{3} E_{n-1}^2(f) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{kh - \sin kh}{k^3 h} + E_{n-1}^{2-2/m}(f) \cdot \frac{1}{n^{2r/m} h} \int_0^h \int_0^u t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt du. \quad (2.5)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части соотношения (2.5) с помощью неравенства Гельдера, и с учетом формулы (2.2) получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \frac{kh - \sin kh}{k^3 h} &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rho_k^{2-2/m} \rho_k^{2/m} \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right) \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2\right)^{1-1/m} \cdot \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \rho_k^2 \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)^m\right)^{1/m} \\ &= E_{n-1}^{2-2/m}(f) \frac{1}{2n^{2+2r/m}} \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h). \end{aligned}$$

Теперь преобразуем второе слагаемое в неравенстве (2.5), применяя формулу Дирихле,

$$\int_0^h \int_0^u t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 dt du = \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)_2 du.$$

Таким образом, неравенства (2.5) запишем в следующем виде

$$\frac{h^2}{3} E_n^{2/m}(f) \leq \frac{1}{n^{2+2r/m}} \left(\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h)_2 + \frac{n^2}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)_2 du \right).$$

Интегрируя последнее соотношение по переменной h на отрезке $[0, t]$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{t^3}{9} E_{n-1}^{2/m}(f) &\leq \frac{1}{n^{2+2r/m}} \left[\int_0^t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h)_2 dh \right. \\ &\quad \left. + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, u)_2 du \right] dh \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Разделив обе части неравенства (2.6) на $t^3/9$, а затем возведя результат в степень $m/2$, получаем соотношение (2.1).

Проверяем точность неравенства (2.1). В силу равенств (1.1) и (1.2) имеем

$$E_{n-1}(f_0) = 1, \quad \Omega_m^2(f_0^{(r)}, h)_2 = 2^m n^{2r} \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)^m, \quad 0 < nh \leq 3\pi/4. \quad (2.7)$$

Пользуясь равенствами (2.7), запишем

$$\begin{aligned} &\frac{3^m}{t^{3m/2} n^{m+r}} \left[\int_0^t \Omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, h)_2 dh + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f_0^{(r)}, u)_2 du \right] dh \right]^{m/2} \\ &= \frac{3^m}{t^{3m/2} n^{m+r}} \left[2n^{2r/m} \left(t - \frac{\text{Si}(nt)}{n} \right) + 2n^{2r/m} \left(\frac{n^2 t^3}{18} - t + \frac{\text{Si}(nt)}{n} \right) \right]^{m/2} = 1, \end{aligned}$$

где $\text{Si}(t) = \int_0^t x^{-1} \sin x dx$ — интегральный синус. □

Следствие 2.1. Для любого $0 < t \leq 3\pi/(4n)$ имеют место следующие неравенства

$$\frac{3^{m/2}}{(nt)^m} \leq \sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \leq 3^m \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{18} \right)^{m/2}. \quad (2.8)$$

Доказательство. Функция $\Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, h)$ на отрезке $[0, t]$ монотонно возрастает, поэтому из неравенства (2.1) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_2 &\leq \frac{3^m}{t^{3m/2} n^{m+r}} \left[t \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 + n^2 \Omega_m^{2/m}(f^{(r)}, t)_2 \int_0^t \frac{h^2}{6} dh \right]^{m/2} \\ &= 3^m n^r \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{18} \right)^{m/2} \Omega_m(f^{(r)}, t)_2. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует неравенство

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \leq 3^m \left(\frac{1}{(nt)^2} + \frac{1}{18} \right)^{m/2}. \quad (2.9)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \cos nx$. Используя второе равенство в (2.7), будем иметь

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)_2}{\Omega_m(f_0^{(r)}, t)_2} = \frac{n^r}{2^{m/2} n^r \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{m/2}}.$$

Так как $\sin t > t - \frac{t^3}{6}$ при $0 < t \leq 3\pi/(4n)$, то отсюда следует, что

$$\left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{-m/2} \geq \left(\frac{6}{(nt)^2} \right)^{m/2}.$$

Поэтому

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{n^r E_{n-1}(f)_2}{\Omega_m(f^{(r)}, t)_2} \geq \frac{n^r E_{n-1}(f_0)_2}{\Omega_m(f_0^{(r)}, t)_2} = \frac{3^{m/2}}{(nt)^m}. \quad (2.10)$$

Двойное неравенство (2.8) следует из сопоставления (2.9) и (2.10). $\square$

Приступаем теперь к нахождению величины (1.3), где в качестве $\mathfrak{M}$ берем класс $W_m^{(r)}(t, \Phi)$.

Теорема 2.2. Для любых чисел $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ и любого $u \in (0, 3\pi/(4n)]$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(W_m^{(r)}(t, \Phi) \right)_{L_2} = \frac{3^m}{t^{3m/2} n^{m+r}} \Phi(t). \quad (2.11)$$

Доказательство. Оценку сверху величины $\mathcal{E}_{n-1} \left(W_m^{(r)}(t, \Phi) \right)$ получим согласно определению класса $W_m^{(r)}(t, \Phi)$, используя неравенство (2.1). Таким образом,

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(W_m^{(r)}(t, \Phi) \right)_2 \leq \frac{3^m}{t^{3m/2} n^{m+r}} \Phi(t). \quad (2.12)$$

Для получения оценки снизу той же величины $\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(t, \Phi))$ введем в рассмотрение функцию

$$f_1(x) = \frac{3^m}{t^{3m/2}n^{m+r}}\Phi(t) \cos nx.$$

Для этой функции выполнено

$$E_{n-1}(f_1) = \frac{3^m}{t^{3m/2}n^{m+r}}\Phi(t),$$

$$\Omega_m^{2/m}(f_1^{(r)}, h) = \frac{18}{t^3 n^2} \Phi^{2/m}(t) \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right).$$

Функция f_1 принадлежит классу $W_m^{(r)}(t, \Phi)$. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \Omega_m^{2/m}(f_1^{(r)}, h)_2 dh + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(f_1^{(r)}, u)_2 du \right] dh \\ &= \int_0^t \frac{18}{t^3 n^2} \Phi^{2/m}(t) \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right) dh + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \frac{18}{t^3 n^2} \Phi^{2/m}(t) \left(1 - \frac{\sin nu}{nu}\right) du \right] dh \\ &= \frac{18}{t^3 n^2} \Phi^{2/m}(t) \left\{ \int_0^t \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right) dh + n^2 \int_0^t \frac{1}{h} \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h}{n^2} + \frac{1}{n^3} \sin nh \right) dh \right\} = \Phi^{2/m}(t). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(t, \Phi))_2 \geq E_{n-1}(f_1)_2 = \frac{3^m}{t^{3m/2}n^{m+r}}\Phi(t). \quad (2.13)$$

Из сопоставления неравенств (2.12) и (2.13) получаем равенство (2.11). $\square$

Далее рассмотрим задачу нахождения значений поперечников классов $W_m^{(r)}(t)$.

Теорема 2.3. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < t \leq 3\pi/(4n)$ и $\nu_n(\cdot)$ — любой из выше определенных n -поперечников. Тогда имеют место следующие равенства

$$\nu_{2n}(W_m^{(r)}(t), L_2) = \nu_{2n-1}(W_m^{(r)}(t), L_2) = \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(t))_2 = \frac{3^m}{t^{3m/2}n^{m+r}}.$$

Доказательство. Согласно определению класса $W_m^{(r)}(t)$, из неравенства (2.1) запишем оценку сверху для всех рассматриваемых n -поперечников

$$\nu_{2n}(W_m^{(r)}(t), L_2) \leq \nu_{2n-1}(W_m^{(r)}(t), L_2) \leq \mathcal{E}_{n-1}(W_m^{(r)}(t))_2 \leq \frac{3^m}{t^{3m/2}n^{m+r}}. \quad (2.14)$$

С целью получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников, равной правой части неравенства (2.14), в множестве $\mathcal{T}_n$ введем в рассмотрение $(2n+1)$ -мерный шар полиномов

$$S_{2n+1} := \left\{ T_n \in \mathcal{T}_n : \|T_n\| \leq \frac{3^m}{t^{3m/2}n^{m+r}} \right\}$$

и докажем, что $S_{2n+1} \in W_m^{(r)}(t)$.

В работе [9] для произвольного тригонометрического полинома $T_n(x) \in \mathcal{T}_n$ доказано неравенство

$$\Omega_m(T_n^{(r)}, h) \leq 2^{m/2} n^r \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)_*^{m/2} \|T_n\|.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^t \Omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, h)_2 dh + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) \Omega_m^{2/m}(T_n^{(r)}, u)_2 du \right] dh \right]^{m/2} \\ & \leq \left[\int_0^t 2n^{2r/m} \left(1 - \frac{\sin nh}{nh}\right)_* \|T_n\|^{2/m} dh \right. \\ & \quad \left. + n^2 \int_0^t \left[\frac{1}{h} \int_0^h u(h-u) 2n^{2r/m} \left(1 - \frac{\sin nu}{nu}\right)_* \|T_n\|^{2/m} du \right] dh \right]^{m/2} \\ & = 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \left(t - \frac{\text{Si}(nt)}{n} \right) + 2n^{2r/m} \|T_n\|^{2/m} \left(\frac{n^2 t^3}{18} - t + \frac{\text{Si}(nt)}{n} \right) = 1. \end{aligned}$$

Это соотношение означает, что $S_{2n+1} \in W_m^{(r)}(t)$. По определению бернштейновского n -поперечника получаем оценки снизу

$$\nu_{2n}(W_m^{(r)}(t), L_2) \geq b_{2n}(W_m^{(r)}(t), L_2) \geq b_{2n}(S_{2n+1}, L_2) \geq \frac{3^m}{t^{3m/2} n^{m+r}}. \quad (2.15)$$

Утверждение теоремы 2.3 вытекает из сопоставления неравенств (2.14) и (2.15). $\square$

References

- [1] С. Б. Вакарчук, А. Н. Щитов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 и поперечники некоторых классов функций”, *Укр. матем. журнал*, **56**:11 (2004), 1458–1466. [S. B. Vakarchuk, A. N. Schitov, “Best polynomial approximations in L_2 and widths of some classes of functions”, *Ukrain. Math. Journ.*, **56**:11 (2004), 1458–1466 (In Russian)].
- [2] Н. П. Корнейчук, *Экстремальные задачи теории приближения*, Наука, М., 1976. [N. P. Korneychuk, *Extremal Problems of Approximation Theory*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].
- [3] Э. А. Стороженко, В. Г. Кротов, П. Освальд, “Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L^p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **98**(140):3(11) (1975), 395–415; англ. пер.: Э. А. Storozhenko, V. G. Krotov, P. Oswald, “Direct and converse theorems of Jackson type in L^p spaces, $0 < p < 1$ ”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:3 (1975), 355–374.
- [4] К. В. Руновский, “О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сб.*, **185**:8 (1994), 81–102; англ. пер.: К. В. Runovskii, “On approximation by families of linear polynomial operators in L_p -spaces, $0 < p < 1$ ”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:2 (1995), 441–459.
- [5] С. Б. Вакарчук, М. Ш. Шабозов, В. И. Забутная, “Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых функциональных классов”, *Укр. матем. вестник*, **11**:3 (2014), 417–441. [S. B. Vakarchuk, M. Sh. Shabozov, V. I. Zabutnaya, “Structural characteristics of functions from L_2 and exact values of the diameters of some functional classes”, *Ukrain. Math. Bulletin*, **11**:3 (2014), 417–441 (In Russian)].

- [6] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].
- [7] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенства типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336; англ. пер.: S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “A Sharp inequality of Jackson–Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes”, *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 306–313.
- [8] М. Ш. Шабозов, С. С. Хоразмшоев, “Наилучшие полиномиальные приближения дифференцируемых периодических функций и значения поперечников классов функций, задаваемых обобщенными модулями непрерывности в L_2 ”, *Известия академии наук республики Таджикистана. Отделение физ.-матем., хим., геол. и техн. наук*, **142**:1 (2011), 7–19. [M. Sh. Shabozov, S. S. Khorazmshoev, “The best polynomial approximation of differentiable periodical functions and the value of widths of classes functions defined by the generalized modulus of continuity in L_2 ”, *News of the National Academy of Sciences of Tajikistan. Department of phys., math., chem., geol. and techn. sciences*, **142**:1 (2011), 7–19 (In Russian)].
- [9] S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “Widths of function classes from L_2 and exact constants in Jackson inequalities”, *East J. Approx.*, **14**:4 (2008), 411–421.

Информация об авторах

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры социально-гуманитарных дисциплин, Московский гуманитарно-технологический университет – Московский архитектурно-строительный институт, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Юсупов Гулзорхон Амиршоевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа, Таджикский государственный педагогический Университет имени Садриддин Айни, г. Душанбе, Республика Таджикистан. E-mail: g_7777@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5612-9995>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Лангаршоев Мухтор Рамазонович
 E-mail: mukhtor77@mail.ru

Поступила в редакцию 27.10.2025 г.
 Поступила после рецензирования 15.01.2026 г.
 Принята к публикации 12.03.2026 г.

Information about the authors

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Social and Humanitarian Disciplines Department, Moscow University of Humanities and Technology – Moscow Institute of Architecture and Construction, Moscow, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Gulzorkhon A. Yusupov, Doctoral of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Mathematical Analysis Department, Tajik State Pedagogical University named after Sadrididdin Aini, Dushanbe, Republic of Tajikistan. E-mail: g_7777@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5612-9995>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Mukhtor R. Langarshoev
 E-mail: mukhtor77@mail.ru

Received 27.10.2025
 Reviewed 15.01.2026
 Accepted for press 12.03.2026

SCIENTIFIC ARTICLE

© Y. Malyshkin, D. Gruzdkov, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-32-40>

Condensation effects in spatial preferential attachment with edge step

Y. MALYSHKIN, D. GRUZDKOV

Tver State University

33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. We study the asymptotic behavior of the maximum degree in the spatial preferential attachment graph model with a preferential attachment edge step. In spatial models, each vertex is assigned a coordinate (in our case, in $[0, 1]$). The model is built recursively, with the recursion step consisting of two parts. First, we introduce a new vertex and draw k edges from it to close vertices, chosen by a slightly modified spatial preferential attachment rule. Then, we draw m edges between vertices by the preferential attachment rule. We prove that, dependent on model parameters, the maximum degree could exhibit sublinear (similar to the standard preferential attachment) and linear behavior of 2 types: random distribution similar to the classical urn model and concentration over a fixed value (such an effect was observed in models with the addition of choice).

Keywords: random graphs, spatial preferential attachment, condensation effect

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00247, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00247/>).

Mathematics Subject Classification: 05C80.

For citation: Malyshkin Y., Gruzdkov D. Condensation effects in spatial preferential attachment with edge step. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 32–40. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-32-40>

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Малышкин Ю.А., Груздков Д.А., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-32-40>

УДК 519.17



Эффект конденсации в моделях пространственного предпочтительного присоединения с шагом с добавлением ребра

Юрий Андреевич МАЛЫШКИН, Денис Александрович ГРУЗДКОВ

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Мы исследуем асимптотическое поведение максимальной степени в графах пространственного предпочтительного присоединения, с дополнительным шагом с выбором ребер. В пространственных моделях предпочтительного присоединения каждой вершине присваивается координата (в нашем случае, случайное число в $[0, 1]$). Модель строится рекурсивно, причем шаг рекурсии состоит из двух частей. Сначала мы вводим новую вершину и проводим k ребер от нее к близлежащим вершинам, выбранным с помощью слегка модифицированного правила пространственного предпочтительного присоединения. Затем мы проводим m ребер между вершинами по правилу обычного предпочтительного присоединения. В статье доказывается, что в зависимости от параметров модели максимальная степень может демонстрировать сублинейное (аналогично стандартному предпочтительному присоединению) и линейное поведение двух видов: случайное распределение, подобное классической урновой модели, и концентрацию у фиксированного значения (такой эффект наблюдался в моделях предпочтительного присоединения с выбором).

Ключевые слова: случайные графы, пространственное предпочтительное присоединение, эффект конденсации

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00247, <https://rscf.ru/project/24-21-00247/>).

Для цитирования: Малышкин Ю.А., Груздков Д.А. Эффект конденсации в моделях пространственного предпочтительного присоединения с шагом с добавлением ребра // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 32–40.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-32-40>

Introduction

In the present paper, we consider a combination of two preferential attachment models: standard preferential attachment and spatial preferential attachment. The preferential attachment model was introduced in [1] to model complex networks. The preferential attachment models are examples of dynamic graph models, i. e., they are build recursively, graph G_{n+1} is built from graph G_n by adding a vertex and drawing a few edges. The general idea behind preferential attachment is that the higher the degree of a vertex, the more likely an edge is to be drawn to it. In the standard model (see, e. g., [2, 3]), edges are drawn from a new vertex to old ones with probabilities proportional to their degrees. Such a procedure results in a power law degree distribution, which is a common distribution for complex networks (see [4, 5]). One of the issue of this model is that subgraphs on old vertices do not change over time. One of the way to deal with it was proposed in [6] with the introduction of an edge step, at which no new vertices are introduced and an edge is drawn between already existing vertices in accordance with the preferential attachment rule. While this model well describes the degree distributions of complex networks, it often fails to properly describe their local structure, which manifests itself through high clustering. To satisfy that property spatial preferential attachment model has been introduced in [7]. In that model each vertex v is represented as a point in $[0, 1]$, surrounded by the neighborhood of radius proportional to its degree, and a new vertex send an edge to v , if the new vertex belongs to the neighborhood of v . Another effect that appears in some real networks is the effect of condensation, in which certain vertices have linear degree (see, e. g., [8–10]). This represents the property that a certain percentage of all nodes “know” about a given node. In previous models, that percentage is a non-random function of the model’s parameters, and was achieved by the addition of choice to the model (see, e. g., [8, 11]). In the present paper we introduce a model, at which, based on the parameters of the model, that percentage could be a constant or a non-degenerate random variable.

Let us describe our model. Fix $m, k \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, $\beta > -k$, which are parameters of the model. We consider a recursively built sequence of graphs G_n , $n \in \mathbb{Z}_+$, where G_0 is an initial graph on at least $\max\{k, m\}$ vertices (we denote them $v_{-n_0}, \dots, v_0$) and k_0 edges (this graph is a parameter of the model as well) and a graph G_{n+1} obtained from G_n by adding a vertex v_{n+1} and drawing $k+m$ edges in two steps: vertex and edge steps described in what follows. To each vertex v_i , $i \geq -n_0$, $i \in \mathbb{Z}$, we attach a random variable X_i , such that X_i , $i \geq -n_0$, are independent uniform random variables with values in $[0, 1]$ (the uniform distribution chosen for simplification of the model, so there are no special areas of vertex concentration). Also, X_{n+1} is independent from $\mathcal{F}_n$, where $\mathcal{F}_n$ is sigma-algebra that form from variables used to construct G_n (which could be formally constructed using the set of uniforms random variable, that is basic construction, so we omit it here, this way $\mathcal{F}_n$ would be rich enough to construct the supplementary processes used below). We also define the neighborhood of v_i as

$$U_i(n) = \left\{ x \in [0, 1] : |x - X_i| < \frac{a \deg_{G_n} v_i + b}{2n} \right\},$$

where $\deg_{G_n} v_i$ is the degree of v_i in G_n and $|\cdot|$ is torus distance on $[0, 1]$.

Vertex step: We draw edges from v_{n+1} to k vertices with highest degrees out of $v_{-n_0}, \dots, v_n$, whose neighborhoods contain v_{n+1} . If there are fewer than k of such vertices, draw the rest (up to the k total edges) to the different randomly (with equal probabilities) chosen vertices (that insures connectivity of the graph and that its minimal degree would be equal to k , so degree of any vertex would exceed $-\beta$).

Edge step: We choose a vertex u uniformly among $v_{-n_0}, \dots, v_n$. Then, we choose m vertices with probabilities proportional to their degrees plus β and draw edges between them and u . I. e., the probability for a vertex v to be chosen as the i -th vertex to draw an edge into is $\frac{\deg_{G_n} v + \beta}{\sum_{i=-n_0}^n (\deg_{G_n} v_i + \beta)}$.

Note that on each step, we draw $k + m$ edges, so the total degree of the graph increases by $2k + 2m$ at each step.

1. Results

Let $M(n)$ be the maximal degree of the graph G_n . The sum of the degrees of all the vertices of G_n is equal to $(2k + 2m)n + 2k_0$. Let $K(n)$ be the total number of vertices of degree $M(n)$ in G_n .

If $K(n) = 1$, the probability to increase $M(n)$ during the vertex step (conditional on $\mathcal{F}_n$) equals $\min\{1, (aM(n) + b + c_n)/n\}$, where c_n corresponds to the possibility of drawing random edged, and at the edge step the probability to draw each of the m edges to the vertex with degree $M(n)$ is $M(n)/((2k + 2m)n + 2k_0 + (n + k_0 + 1)\beta) + \frac{1}{n}$. Hence,

$$\begin{aligned} \mathbf{1}\{K(n) = 1\} \mathbb{E}\left(M(n+1) - M(n) | \mathcal{F}_n\right) &= \mathbf{1}\{K(n) = 1\} \\ &\times \left(\min\left\{1, \frac{aM(n) + b + \mathbb{E}(c_n | \mathcal{F}_n)}{n}\right\} + \frac{mM(n)}{(2k + 2m)n + 2k_0 + (n + k_0 + 1)\beta} \right) + \frac{m}{n} \\ &= \mathbf{1}\{K(n) = 1\} = \left(\min\left\{1, a \frac{M(n)}{n}\right\} + \frac{m}{2k + 2m + \beta} \frac{M(n)}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Note that $\min\left\{1, a \frac{M(n)}{n}\right\} = 1$ only if $M(n)$ grows linearly with n . Hence, the type of behavior of $M(n)$ would be defined by the value of $a + \frac{m}{2k + 2m + \beta}$. Let us formulate our main result.

Theorem 1.1. *In the described model:*

1. *If $a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} < 1$, then for any $\epsilon > 0$*

$$\Pr\left(\forall n > N : n^{a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} - \epsilon} < M(n) < n^{a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} + \epsilon}\right) \rightarrow 1 \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

2. *If $a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} = 1$, then $M(n)/n$ converges almost surely to a random variable with values in $[0, 1/a]$ with a non-degenerate distribution.*

3. *If $a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} > 1$, then $M(n)/n$ converges almost surely to $1 + \frac{m}{2k + m + \beta}$.*

To prove the above theorem, we would first prove the lemma below, and then show that instances of $K(n) \neq 1$ do not affect the asymptotic that much.

Lemma 1.1. *Let $\mathcal{F}_n$ -measurable process $X(n)$, $n \geq n_0$ with values in $\mathbb{N}$ and bounded non-negative increments satisfy*

$$\mathbb{E}\left(X(n+1) - X(n) | \mathcal{F}_n\right) = \left(\min\left\{1, a \frac{X(n)}{n}\right\} + \frac{m}{2k + 2m + \beta} \frac{X(n)}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. *If $a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} < 1$, then for any $\epsilon > 0$*

$$\Pr\left(\forall n > N : n^{a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} - \epsilon} < X(n) < n^{a + \frac{m}{2k + 2m + \beta} + \epsilon}\right) \rightarrow 1 \quad \text{as } N \rightarrow \infty.$$

2. If $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} = 1$, then $X(n)/n$ converges almost surely to a random variable with values in $[0, 1/a]$ with a non-degenerate distribution.
3. If $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} > 1$, then $X(n)/n$ converges almost surely to $1 + \frac{m}{2k+m+\beta}$.

2. Proof of Lemma 1.1

The first part of this lemma is somewhat similar to the first part of Lemma 3.1 from [12], which could be reformulated as follows (we simplify conditions that are not used in proof of the first part, we also added a variation of the third statement of this lemma, which in our case is just a simple fact from stochastic approximation theory as in Corollary 2.7 of [13])

Lemma 2.1. *Let an $\mathcal{F}_n$ -measurable process $Y(n)$ with values in $\mathbb{N}$ and non-negative bounded increments (i. e. $0 \leq Y(n+1) - Y(n) \leq C$) for some $\delta > 0$ satisfy*

$$\mathbb{E}(Y(n+1) - Y(n)|\mathcal{F}_n) = g\left(\frac{Y(n)}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

where $g(x)$ differentiable function on $\mathbb{R}$ that satisfies $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$.

1. If $g'(0) < 1$, then for any $\epsilon > 0$

$$\Pr\left(\forall n > n_0 : n^{g'(0)-\epsilon} < Y(n) < n^{g'(0)+\epsilon}\right) \rightarrow 1$$

as $n_0 \rightarrow \infty$.

2. If $g'(0) > 1$, and there is a unique positive root x^* of the equation $g(x) = x$ in $[0, +\infty)$ then, almost surely,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Y(n)}{n} = x^*.$$

Let us separately consider two processes that satisfy (for large enough n)

$$\mathbb{E}(A(n+1) - A(n)|\mathcal{F}_n) = a \frac{A(n)}{n} + \frac{m}{2k+2m+\beta} \frac{A(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\mathbb{E}(B(n+1) - B(n)|\mathcal{F}_n) = 1 + \frac{m}{2k+2m+\beta} \frac{B(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Note that $\mathcal{F}_n$ is rich enough that such processes exist.

First, let us consider the case $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} < 1$. We start by showing that $\limsup_{n \rightarrow \infty} a \frac{X(n)}{n} < 1$ almost surely. To do so, note that if both $A(n)$ and $B(n)$ satisfy $\limsup_{n \rightarrow \infty} a \frac{A(n)}{n} < 1$ and $\limsup_{n \rightarrow \infty} a \frac{B(n)}{n} < 1$, then so does the process $X(n)$. For the process $A(n)$ we get that

$$\mathbb{E}(A(n+1) - A(n)|\mathcal{F}_n) = \left(a + \frac{m}{2k+2m+\beta}\right) \frac{A(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

so, since $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} < 1$ due to Lemma 2.1 we have $\limsup_{n \rightarrow \infty} a \frac{A(n)}{n} = 0$. For $B(n)$ we get

$$\mathbb{E}(B(n+1) - B(n)|\mathcal{F}_n) = f\left(\frac{B(n)}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

with $f(x) = 1 + \frac{m}{2k+2m+\beta}x$, so almost surely $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{n} = \frac{1}{1 - \frac{m}{2k+2m+\beta}} < 1/a$. Hence, almost surely,

$$\mathbb{E}(X(n+1) - X(n)|\mathcal{F}_n) = \left(a \frac{X(n)}{n} + \frac{m}{2k+2m+\beta} \frac{X(n)}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

The first statement of Lemma 1.1 now follows from Lemma 2.1.

Now consider the case $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} > 1$. In this case, we first prove that both $A(n)$ and $B(n)$ satisfy $\lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{A(n)}{n} > 1$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{B(n)}{n} > 1$. For the process $B(n)$, as in the previous argument, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B(n)}{n} = \frac{1}{1 - \frac{m}{2k+2m+\beta}} > 1/a$ almost surely. For $A(n)$, let fix $0 < \epsilon < a + \frac{m}{2k+2m+\beta} - 1$. We get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{A(n+1)/(n+1)^{1+\epsilon}}{A(n)/n}|\mathcal{F}_n\right) &= \left(1 - \epsilon \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{\mathbb{E}(A(n+1) - A(n)|\mathcal{F}_n)}{A(n)}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1+\epsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \left(1 + \frac{a + \frac{m}{2k+2m+\beta}}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1 + \frac{a + \frac{m}{2k+2m+\beta} - 1 - \epsilon}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) > 1 \end{aligned}$$

for large enough n . Hence, $A(n)$ would grow faster than $n^{1+\epsilon}$ and so $a \frac{A(n)}{n} \rightarrow \infty$ almost surely. As a result, we get

$$\mathbb{E}(X(n+1) - X(n)|\mathcal{F}_n) = \left(1 + \frac{m}{2k+2m+\beta} \frac{X(n)}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

almost surely for large enough n . The third statement of Lemma 1.1 now follows from Lemma 2.1.

Finally, consider the case $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} = 1$. The process $\frac{B(n)}{n}$ converges almost surely to $\frac{1}{1 - \frac{m}{2k+2m+\beta}} = \frac{1}{a}$. Hence, $\limsup_{n \rightarrow \infty} a \frac{X(n)}{n} \leq \frac{1}{a}$ almost surely. At the same time, if the process $A(n)$ with a starting point A_{N_0} at time $n = N_0$ (for some N_0) for $n \geq N_0$ satisfies

$$\mathbb{E}(A(n+1) - A(n)|\mathcal{F}_n) = \frac{A(n)}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

it could be considered as a representation for an urn model (see [14] for more details), which converges almost surely to a continuous distribution (whose parameters depend on both N_0 and A_{N_0}). Hence, if the limit is below $\frac{1}{a}$, it will not exceed $\frac{1}{a}$ after some moment (and, therefore, would provide the asymptotic of $\frac{X(n)}{n}$). Hence, $\frac{X(n)}{n}$ would almost surely converge to a random variable with a non-degenerate distribution with values in $[0, 1/a]$.

3. Proof of the main result

Note that if $K(n) > 1$, it increases probability to increase $M(n)$, and if $K(n) = 1$, the increment of $M(n)$ is of the form of the process $X(n)$ from Lemma 1.1. Hence, $M(n)$ stochastically dominates the process of such form, and, therefore, there exists ($\mathcal{F}_n$ is rich enough) process $X(n)$ that satisfies conditions of Lemma 1.1 that $M(n) \geq X(n)$.

First, we show that the maximal degree can only be achieved almost surely on a finite set of vertices.

We would show that $M(n)$ would dominate the process to which we could apply Corollary 2.1 from [15]. Corollary 2.1 from [15] states that if we consider a random walk that moves only right or up with probabilities proportional to a convex function $W(x)$ of coordinates (linear functions in our case), then if we start from point $(A, 1)$, the probability to cross the diagonal (for second coordinate to be equal to the first) decays exponentially with A (as $Q(A)/2^A$ for

some polinom $Q(A)$). Its proof is pretty standard and based on counting of the number of paths between points $(A, 1)$ and a point (N, N) that are below the diagonal and the notion that probability of each of such path is lower (here convexity of a function is used) then of the path that first going to the diagonal (to the point (A, A)) and then moves consequently one point right and then one point up. We would apply this result to the pair $(X(n), \deg_{G_n} v_{n_0})$, $n_0 \geq n$. In our case, we have a two-step process, and, therefore, two functions, $W_1(x)$ and $W_2(x)$. Note that the probabilities of drawing edges during these steps are dependent on the graph configuration prior to them, so during some consecutive steps (1 step for the vertex step and m steps for an edge step), these probabilities would not change. Due to the way path probabilities are estimated in the proof of Corollary 2.1 from [15], it would decrease corresponding probabilities. Therefore, we could separately consider these steps. The edge step is a preferential attachment step (with additional probability to increase a vertex degree by m if it is chosen as the vertex from which we draw edges) and, hence, the corresponding function $W_1(x) := x + \beta + m(2k + 2m + \beta)$ is linear. The vertex step depends on whether the $X(n)$ exceeds n/a or not. If it does not, we got $W_2(x) := ax + b + c$. The problem with directly applying Corollary 2.1 from [15] to the pair $(X(n), \deg_{G_n} v_{n_0})$, $n_0 \geq n$ is that if $X(n)$ exceeds n/a , probability of its increase is represented by different function then the probability to increase $\deg_{G_n} v_{n_0}$ (this probability could actually be lower then $(a \deg_{G_n} v_{n_0} + b + c)/n$, since we draw edges to k vertices with highest degrees). Note that decreasing the first coordinate of the initial starting point would increase the probability to hit the diagonal. Also, if increasing the coordinate increases the probability to increase it on further steps (which is true in our case), the path with the highest probability would be the one that connects $(A, 1)$ and (A, A) . As such, we could assume that we start from a point with first coordinate A below n/a , and use the path to (A, A) with function $W_2(x)$, which would give us needed estimate. As a result, we get that the probability for the vertex v_{n_0} to become highest degree vertex would not exceed

$$\Pr(\exists n \geq n_0 : \deg_{G_n} v_{n_0} = M(n)) \leq \frac{Q(\min\{X(n_0), \lfloor n_0/a \rfloor\})}{2^{\min\{X(n_0), \lfloor n_0/a \rfloor\}}}$$

for some polynomial function $Q(x)$. Since probabilities $\Pr(\exists n \geq n_0 : \deg_{G_n} v_{n_0} = M(n))$ form convergent series, and by the Borel–Cantelli lemma, the set of vertices that could become maximal is finite almost surely. Let K be the size of that set, and $n_1, \dots, n_K$ be the indices of such vertices. For each of $i = 1, \dots, K$, we got that

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\deg_{G_{n+1}} v_{n_i} - \deg_{G_n} v_{n_i} | \mathcal{F}_n) \\ & \leq \left(\min \left\{ 1, a \frac{\deg_{G_n} v_{n_i}}{n} \right\} + \frac{m}{2k + 2m + \beta} \frac{\deg_{G_n} v_{n_i}}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Therefore, for each $i = 1, \dots, K$, there exists the process $X_i(n)$ that dominates $\deg_{G_{n+1}} v_{n_i}$ and satisfy conditions of Lemma 1.1. That immediately provides us with statements of Theorem 1.1 in cases $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} \neq 1$ (because if each of the $\deg_{G_{n+1}} v_{n_i}$, $i = 1, \dots, K$, satisfies them, then the maximum does as well). To prove the case $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} = 1$, note that the inequality in (3.1) happens due to the vertex not being among the k vertices with the highest degrees, whose neighborhoods contain the new vertex. For that to happen, its neighborhood should contain an area that belongs to the neighborhoods of at least k different vertices with higher degree. It is a standard fact (see, e. g., Proposition 2.3 in [15]) about random walks (A_n, B_n) of described type (that moves right and up with probabilities, proportional to their degrees, i. e.

could be represented by the standard urn model) that the fraction $A_n/(A_n+B_n)$ converges to a continuous distribution, in particular, the number of times $A_n = B_n$ is finite almost surely. Note that decreasing the probability to increase the lowest coordinate would decrease the probability to hit a diagonal, which would decrease (or keep the same) the number of times the process would hit a diagonal, which would be finite almost surely as well. Therefore, since the set of vertices $v_{n_1}, \dots, v_{n_k}$ is finite, their degrees would not be equal after some almost surely finite moment T . Hence, after $n > T$ we get $K(n) = 1$ and a maximum degree achieved on a single vertex, which satisfies the conditions of Lemma 1.1. Hence, we got condition of Theorem 1.1 for the case $a + \frac{m}{2k+2m+\beta} = 1$.

References

- [1] A. Barabási, R. Albert, “Emergence of scaling in random networks”, *Science*, **286**:5439 (1999), 509–512.
- [2] T. F. Móri, “On random trees”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **39**:1–2 (2002), 143–155.
- [3] T. F. Móri, “The maximum degree of the Barabasi–Albert random tree”, *Combinatorics, Probability & Computing*, **14**, eds. I. Leader, O. Riordan, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, 339–348.
- [4] R. van der Hofstad, *Random Graphs and Complex Networks*, Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [5] V. Latora, G. Russo, V. Nicosia, *Complex Networks: Principles, Methods and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [6] C. Alves, R. Ribeiro, R. Sanchis, “Preferential attachment random graphs with edge-step functions”, *Journal of Theoretical Probability*, **34**:1 (2021), 438–476.
- [7] W. Aiello, A. Bonato, C. Cooper, J. Janssen, P. Pral, “A spatial web graph model with local influence regions”, *Internet Mathematics*, **5**:1 (2008), 175–196.
- [8] J. Haslegrave, J. Jordan, “Preferential attachment with choice”, *Random Structures and Algorithms*, **48** (2016), 751–766.
- [9] Y. Malyshekin, “Preferential attachment combined with the random number of choices”, *Internet Mathematics*, **1**:1 (2018), 1–25.
- [10] J. Haslegrave, J. Jordan, M. Yarrow, “Condensation in preferential attachment models with location-based choice”, *Random Structures and Algorithms*, **56**:3 (2020), 775–795.
- [11] Y. Malyshekin, E. Paquette, “The power of choice over preferential attachment”, *ALEA, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, **12**:2 (2015), 903–915.
- [12] Y. Malyshekin, “Preferential attachment with choice based edge-step”, *Stat. Probab. Lett.*, **224**:110438 (2025), 1–7.
- [13] R. Pemantle, “A survey of random processes with reinforcement”, *Probab. Surv.*, **4** (2007), 1–79.
- [14] N. L. Johnson, S. Kotz, *Urn Models and their Application*, John Wiley and Sons, New York, 1977.
- [15] P. A. Galashin, “Existence of a persistent hub in the convex preferential attachment model”, *Probability and Mathematical Statistics*, **36**:1 (2016), 59–74.

Information about the authors

Yury Malyshekin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Information Technology Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: yury.malyshekin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4216-9894>

Информация об авторах

Малышкин Юрий Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий, Тверской государственной университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: yury.malyshekin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4216-9894>

Denis Gruzdkov, Assistant of the Computer Security Department, Tver State University, Tver, Russian Federation.
E-mail: Gruzdkov.DA@tversu.ru

Груздков Денис Александрович, ассистент кафедры компьютерной безопасности, Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация.
E-mail: Gruzdkov.DA@tversu.ru

There is no conflict of interests.

Конфликт интересов отсутствует.

Corresponding author:
Yury Malyshkin
E-mail: yury.malyshkin@mail.ru

Для контактов:
Малышкин Юрий Андреевич
E-mail: yury.malyshkin@mail.ru

Received 21.11.2025
Reviewed 17.02.2026
Accepted for press 12.03.2026

Поступила в редакцию 21.11.2025 г.
Поступила после рецензирования 17.02.2026 г.
Принята к публикации 12.03.2026 г.

SCIENTIFIC ARTICLE

© E. V. Molchanova Alves, M. J. Alves, J. S. P. Munembe, Y. V. Nepomnyashchikh, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-41-60>

Compactness criteria for a linear integral operator in spaces of continuous vector functions

E. V. MOLCHANOVA ALVES¹, M. J. ALVES², J. S. P. MUNEMBE²,
Y. V. NEPOMNYASHCHIKH²

¹ Higher Institute of Sciences and Technology of Mozambique

Street 1.194 no 332, Central C, Municipal District KaMpfumu, Maputo, Mozambique

² Eduardo Mondlane University

Main Campus, PO. Box 257, Maputo, Mozambique

Abstract. This paper studies the compactness of a linear integral operator of the form $(Ku)(t) = \int_{\Omega} k(t, s)u(s) ds$ with kernel (operator function) $k : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, where Ω is a connected compact set in $\mathbb{R}^{\ell}$, X, Y are separable real Banach spaces such that $Y \not\supseteq c_0$, $\mathcal{L}(X, Y)$ is the space of bounded linear operators from X to Y , and the integral is understood in the Pettis sense.

Criteria are established for the action and compactness of the operator K from the space $C(X)$ of continuous functions $u : \Omega \rightarrow X$ to the space $C(Y)$. It is also proved that the compactness of the operator $K : C(X) \rightarrow C(Y)$ implies the action and compactness of K from $L_{\infty}(X)$ to $C(Y)$. The results generalize a well-known criterion for the compactness of the operator K in the space of continuous scalar functions.

We also generalize a well-known sufficient condition for the action and compactness of an integral operator in $C[a, b]$ in the form of a condition for the boundedness of the kernel k and its continuity everywhere except for a finite number of continuous “discontinuity curves” of the kernel in the square $[a, b]^2$. This condition is of interest for application to integral operators with variable limits of integration, in particular, to Volterra integral operators.

For two cases relevant for applications: when for some $t_0 \in \Omega$ $k(t_0, s) = 0$ holds almost everywhere on Ω (called the zero-condition in the paper), and when $\dim Y < \infty$, the conditions necessary and sufficient for the action and compactness of K are formulated exclusively in terms of the kernel of the k operator, and are integral analogues of the conditions of uniform boundedness and equidistant continuity from the Arzelà–Ascoli theorem.

Keywords: Banach space, relatively compact set, compact operator, linear integral operator

Acknowledgements: The work is supported by SIDA under the subprogram “Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications” (Subprogram 1.4.2).

Mathematics Subject Classification: 47B38, 47H30.

For citation: Molchanova Alves E.V., Alves M.J., Munembe J.S.P., Nepomnyashchikh Y.V. Compactness criteria for a linear integral operator in spaces of continuous vector functions. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 31:153 (2026), 41–60. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-41-60>

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Молчанова Алвес Е.В., Алвес М.Ж., Мунембе Ж.С.П., Непомнящих Ю.В., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-41-60>

УДК 517.983.23



Критерии компактности линейного интегрального оператора в пространствах непрерывных вектор-функций

Елена Владимировна МОЛЧАНОВА АЛВЕС¹, Мануэль Жоаким АЛВЕС²,
Жоао Себастьян Паулу МУНЕМБЕ², Юрий Витальевич НЕПОМНЯЩИХ²

¹ Высший институт наук и технологий Мозамбика

1100, Республика Мозамбик, г. Мапуто, улица 1.194 No 332, центральный С.

² Университет Эдуардо Мондлане

1100, Республика Мозамбик, г. Мапуто, Главный кампус, П.Я.257

Аннотация. Статья посвящена исследованию компактности линейного интегрального оператора вида $(Ku)(t) = \int_{\Omega} k(t, s)u(s) ds$ с ядром (операторной функцией) $k : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, где Ω — связный компакт в $\mathbb{R}^{\ell}$, X, Y — вещественные сепарабельные банаховы пространства, причем $Y \not\supseteq c_0$, $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y , а интеграл понимается в смысле Петтиса.

Устанавливаются критерии действия и компактности оператора K из пространства $C(X)$ непрерывных функций $u : \Omega \rightarrow X$ в пространство $C(Y)$. Также доказано, что из компактности оператора $K : C(X) \rightarrow C(Y)$ следует действие и компактность K из $L_{\infty}(X)$ в $C(Y)$. Результаты обобщают известный из литературы критерий компактности оператора K в пространстве непрерывных скалярных функций.

Обобщается также известный достаточный признак действия и компактности интегрального оператора в $C[a, b]$ в виде условия ограниченности ядра k и его непрерывности всюду, за исключением конечного числа непрерывных «кривых разрыва» ядра в квадрате $[a, b]^2$, который интересен для применения к интегральным операторам с переменными пределами интегрирования, в частности, к интегральным операторам Вольтерра.

Для двух актуальных для приложений случаев: когда при некотором $t_0 \in \Omega$ выполнено $k(t_0, s) = 0$ почти всюду на Ω (в работе названо нуль-условием), и когда $\dim Y < \infty$, — условия, необходимые и достаточные для действия и компактности K , формулируются исключительно в терминах ядра k оператора, и являются интегральными аналогами условий равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности из теоремы Арцела–Асколи.

Ключевые слова: банахово пространство, относительно компактное множество, компактный оператор, линейный интегральный оператор

Благодарности: Работа выполнена при поддержке SIDA в рамках подпрограммы «Наращивание потенциала в области математики, статистики и ее приложений» (Подпрограмма 1.4.2).

Для цитирования: Молчанова Алвес Е.В., Алвес М.Ж., Мунембе Ж.С.П., Непомнящих Ю.В. Критерии компактности линейного интегрального оператора в пространствах непрерывных вектор-функций // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 41–60. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-41-60>

Introduction

An integral operator of the form

$$(Ku)(t) = \int_{\Omega} k(t, s)u(s) ds, \quad t \in \Omega, \quad (0.1)$$

(Ω is compact in $\mathbb{R}^{\ell}$) with kernel $k : \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is an example of a linear operator that has been most widely and thoroughly studied in functional analysis from various angles: representation issues, properties in function spaces, spectral theory, and other properties, and which is of great interest for applications (see, for example, [1–4], where further references can be found).

It is well known that the continuity of the kernel k ensures the action and compactness of the operator K in the space C of continuous functions on a compact set (see, for example, [2, p. 245]). In [1, p. 241] for $\Omega = [a, b]$ it is proved that for K to be action and compact in C it suffices to assume that the kernel is bounded and continuous everywhere on $[a, b]^2$, except for the graphs of a finite number of continuous functions $s = \varphi_i(t)$. A test for the compactness of K in C , in which the continuity condition for the kernel is replaced by its integral analogue, is given in [5, p. 24]. The papers [3, p. 101] and [4, p. 111] discuss how the conditions of this criterion are in fact necessary and sufficient for the compactness of the operator K from L_{∞} to C , under the a priori assumption that the operator acts in these spaces.

In this paper, we consider an operator K of the form (0.1) in spaces of Banach-valued functions, where the kernel k is an operator function with values in $\mathcal{L}(X, Y)$ (where X and Y are separable Banach spaces and $\mathcal{L}(X, Y)$ is the space of bounded linear operators from X to Y). Thus, under certain conditions on the kernel, the operator K can act from the space $C(X)$ of continuous functions or the space $L_{\infty}(X)$ of essentially bounded functions $u : \Omega \rightarrow X$ to the space $C(Y)$.

The main results of the paper are the criteria established in Section 5. for the action and compactness of the operator K from $C(X)$ to $C(Y)$ (along with the fact that this property is equivalent to the action and compactness of K from $L_{\infty}(X)$ to $C(Y)$), which generalize the well-known criteria from [3, p. 101] and [4, p. 111].

Section 6. presents a special sufficient condition for the compactness of a linear integral operator. A convenient sufficient condition is also established, directly generalizing the condition from [1, p. 241]. This result is interesting because it can be used for integrals with a variable set of integration, and in particular, for the linear Volterra game operator, which for $\Omega = [a, b]$ is defined similarly to the operator (0.1), with the integral $\int_{\Omega}$ replaced by an integral with a variable limit $\int_a^t$.

The importance of studying the Volterra integral operator for applications is due to the fact that the study of mathematical models in the form of the Cauchy problem for differential and functional-differential equations typically reduces to an equation with a Volterra integral operator. Without claiming to describe these ideas in detail or review the relevant bibliography, we refer the reader to [6], where further references can be found. We only note that the case of infinite-dimensional X and Y is also of practical interest for the study of evolution equations in a Banach space (see, for example, [7]).

Due to their importance for applications, a large number of papers have been devoted to the study of Volterra operators and the Volterra property of operators in their pure form. We will not delve into this area, but note only that various generalizations of the concept of Volterra operators have been defined and studied (see [8–10]).

In two special cases, when $k(t_0, \cdot)$ is the zero function for some $t_0 \in \Omega$ (called the zero-condition in the paper) and when $\dim Y < \infty$ (see Section 6. and 7., respectively), the compactness criteria for K in the above spaces are formulated exclusively in terms of the kernel k of the operator.

The proof of the main results is based on a criterion for the relative compactness of a set in $C(Y)$ (the Arzela–Ascoli theorem, see Section 3.) and on the authors’ results in [11] and [12].

This paper is a logical continuation of the authors’ research on linear integral functionals on $C(X)$ [11] and on the boundedness of the operator K in spaces of continuous and essentially bounded Banach-valued functions [12]. We also note that the uniform continuity property of the nonlinear Urysohn integral operator in these spaces was studied in [13] and [14] (and some generalizations to the case of noncompact Ω were announced in [15] and [16]).

1. Basic notations

We will use the following notations:

$\mathbb{R}^\ell$ the classical real ℓ -dimensional space with the norm $\|\cdot\|$ (any equivalent norm is considered). Ω is closed bounded connected set in $\mathbb{R}^\ell$ with the classical Lebesgue measure μ in σ -algebra Σ Lebesgue measurable subsets Ω .

For an arbitrary normed space Z , we will use the following notation: by 0_Z we will denote the zero element of Z , by $\|\cdot\|_Z$ the norm in Z , by $B_r[Z]$ the closed ball with center at zero of radius r of the space Z , that is $B_r[Z] = \{z \in Z : \|z\|_Z \leq r\}$, by Z^* the Banach space dual to Z , with the natural norm. The value of the functional $f \in Z^*$ at a point $z \in Z$ will be denoted by $\langle z, f \rangle$ or $f[z]$.

For arbitrary normed spaces U and V , by $\mathcal{L}(U, V)$ we will denote the space of linear bounded operators from U to V with the natural norm, and by $\mathcal{L}_c(U, V)$ its closed subspace of compact operators. Note that $\mathcal{L}_c(U, V) = \mathcal{L}(U, V)$ if and only if $\dim X < \infty$ or $\dim Y < \infty$.

Throughout the paper, we assume that X and Y are non-zero real separable Banach spaces, with the additional condition that Y does not contain a copy of c_0 ($Y \not\supset c_0$), in particular, Y is reflexive.

$C(X)$ is the Banach space of continuous functions $u : \Omega \rightarrow X$ with norm $\|u\|_\infty = \max_{t \in \Omega} \|u(t)\|_X$.

Definition 1.1 (see [17, p. 41]). A function $u : \Omega \rightarrow X$ is called *simple* if her image $u(\Omega)$ is finite. A simple function $u : \Omega \rightarrow X$ with image $u(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ is called *measurable* if $u^{-1}(\{x_i\}) \in \Sigma$ for $i = 1, 2, \dots, n$.

An arbitrary function $u : \Omega \rightarrow X$ is called *measurable* if there exists sequence of simple measurable functions $(u_n)_n$ which converges to u almost everywhere on Ω .

Remark 1.1. Due to the separability of X , for the function $u : \Omega \rightarrow X$ the concepts of measurability, weak measurability (in the sense of measurability of the functions $\langle u(\cdot), f \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ for each $f \in X^*$) and Borel measurability (in the sense of $f^{-1}(D) \in \Sigma$ for each Borel set $D \subset X$) are equivalent (see, for example, [17, p. 42]).

$L_0(X)$ is the set of all measurable functions $u : \Omega \rightarrow X$.

$L_\infty(X)$ is the Banach space (of μ -equivalence classes) of measurable essentially bounded functions $u : \Omega \rightarrow X$ with norm $\|u\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \Omega} \|u(t)\|_X$.

If the function $v : \Omega \rightarrow Y$ is such, that $\forall g \in B_1[Y^*]$ the real function $\langle v(\cdot), g \rangle$ is Lebesgue integrable on Ω , then there exists a unique element $I \in Y$ such that

$$\langle I, g \rangle = \int_{\Omega} \langle v(s), g \rangle ds \quad (\forall g \in Y^*)$$

(for this, condition $Y \not\supset c_0$ is essential, see [17, p. 54]). In this case, the function v is called *Pettis integrable* on Ω , and I is called the *Pettis integral* of the function v on Ω , denoted by

$$I = \int_{\Omega} v(s) ds.$$

By virtue of the separability of Y , a Pettis integrable function is measurable [17, p. 42, 53].

If the function $v : \Omega \rightarrow Y$ is measurable and the real-valued function $\|v(\cdot)\|_Y$ is Lebesgue integrable on Ω , then the function v is called *Bochner integrable* on Ω [17, p. 44]. If the function $v : \Omega \rightarrow Y$ is Bochner integrable, then it is Pettis integrable and the values of the integrals coincide. The reciprocal statement holds true if and only if Y is finite-dimensional [17]. Thus, in the case $\dim Y < \infty$ the concepts of the Bochner and Pettis integrals are equivalent and coincide with the classical concept of the Lebesgue integral.

2. Criteria for the relative compactness in $C(Y)$ (Arzelà–Ascoli theorems)

Various forms of criteria for the relative compactness of sets in the space of continuous functions, known as Arzelà–Ascoli theorems, are well known (see, for example, [1, 2, 18]). We present this criterion in a form most convenient for proving the main results of the article and with “minimal” requirements for conditions that guarantee the relative compactness of a set (closest in form to the criterion from [18, Chapter 7]).

Theorem 2.1 (Arzelà–Ascoli). *Let M be some set of functions from Ω to Y . The set M is contained in $C(Y)$ and is relatively compact in $C(Y)$ if and only if the following conditions (RC1) and (RC2) hold:*

- (RC1) $\exists t_0 \in \Omega$ such that the set $M[t_0] := \{v(t_0) : v \in M\}$ is relatively compact in Y ;
- (RC2) $\forall t_0 \in \Omega$ we have $\lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{v \in M} \|v(t) - v(t_0)\|_Y = 0$.

R e m a r k 2.1. Theorem 2.1 will be valid for any Banach space Y (without the assumptions of its separability and $Y \not\supset c_0$).

R e m a r k 2.2. In Theorem 2.1, condition (RC1) can be replaced by a stronger condition (RC1)_p of relative compactness in Y of the sets $M[t]$ for each $t \in \Omega$, or by an even stronger condition (RC1)_u of relative compactness in Y of the set $\{v(t) : t \in \Omega, v \in M\}$.

Note that in this paper, the set Ω is connected. Without this assumption, Theorem 2.1 is false, but its analogue will hold if condition (RC1) is replaced by one of the stronger conditions described in the previous paragraph, or, satisfying the minimal requirements, by the condition of relative compactness of the sets $M[t]$ for at least one t from each connected component of Ω . To avoid cumbersome formulations of the main results, in this paper we restrict ourselves to the case of a connected Ω , which is of most interest for applications.

R e m a r k 2.3. Consider the case of a finite-dimensional Y .

Obviously, for a fixed $t \in \Omega$, the relative compactness of the set $M[t]$ is equivalent to its boundedness (i. e., $\sup_{v \in M} \|v(t)\|_Y < \infty$), which is called the condition of *uniform boundedness*

of the set M at the point t . Thus, condition (RC1) of Theorem 2.1 is equivalent to the condition of uniform boundedness of $M[t_0]$ at at least one point $t_0 \in \Omega$.

Following Remark 2.2, this condition can be replaced by the stronger condition $(RC1)_p$ of uniform boundedness of M at every point $t \in \Omega$, or by the even stronger condition $(RC1)_u$: $\sup_{t \in \Omega, v \in M} \|v(t)\|_Y < \infty$, called the *uniform boundedness of the set M* [1, p. 102].

Note that for any infinite-dimensional Banach space Y , the described reduction of conditions $(CR1)$, $(RC1)_p$ and $(RC1)_u$ is impossible.

R e m a r k 2.4. The condition (RC2) is called *local equicontinuity* of the set M . Due to the compactness of Ω , this condition is equivalent to the so-called *equicontinuity* of M :

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall t_1, t_2 \in \Omega) (\forall v \in M) : \|t_1 - t_2\| < \delta \Rightarrow \|v(t_1) - v(t_2)\|_Y < \varepsilon,$$

which we denote by $(RC2)_u$, which is most often used in the literature on functional analysis (see, e. g., [1, 2]).

Clearly, by defining the function $\omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ by the equality

$$\omega(\delta) := \sup_{t_1, t_2 \in \Omega, \|t_1 - t_2\| \leq \delta} \sup_{v \in M} \|v(t_1) - v(t_2)\|_Y,$$

the condition of equicontinuity of M can be written as $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta) = 0$ (in this case, the function ω can naturally be called the *modulus of continuity* of M).

In this paper, we use the local equicontinuity condition (RC2) as the main condition to formulate the main criteria for the compactness of a linear integral operator in a form closest to the classical criterion [3, p. 101], however, as consequences we also present the corresponding results using equicontinuity.

Let us formulate a criterion for relative compactness in $C(Y)$, which reflects the possibility of varying the conditions described in the remarks.

Theorem 2.2 (Arzelà–Ascoli). *Let M be some set of functions from Ω to Y . The set M is contained in $C(Y)$ and is relatively compact in $C(Y)$ if and only if the following conditions $(RC1) \vee (RC1)_p \vee (RC1)_u$ and $(RC2) \vee (RC2)_u$ hold.*

3. Some properties of the linear integral operator with values in Y

In this section we will study some properties of a linear integral operator with values in a Banach space Y , which will be essentially used in the proof of compactness criteria for a linear integral operator in spaces of continuous functions, and are also of independent interest.

Let $a : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ be operator function. Let us consider a linear operator A , defined by

$$Au = \int_{\Omega} a(s)u(s) ds. \quad (3.1)$$

Under certain conditions on the operator function a the operator A transforms functions $u : \Omega \rightarrow X$ into elements of the space Y .

D e f i n i t i o n 3.1 (see [19, p. 74]). An operator function a is called *strongly measurable* if for any $x \in X$ the function $a(\cdot)x : \Omega \rightarrow Y$ is measurable in the sense of Definition 1.1.

R e m a r k 3.1. The measurability of a as a function from Ω to $\mathcal{L}(X, Y)$ in the sense of Definition 1.1 is called *uniform measurability* (see [19, p. 74]).

For finite-dimensional X and Y , the concepts of uniform and strong measurability are equivalent. However, if they are infinite-dimensional, the requirement of uniform measurability of an operator function is, as a rule, significantly more stringent than the requirement of its strong measurability, even for separable X and Y . Note that by Pettis's theorem [17, p. 42], [19, p. 72] a uniformly measurable operator function must be almost separably-valued, while the space of operators is “rarely” separable (for example, $\mathcal{L}(\ell_2, \ell_2)$ is not separable). To obtain the main results of the article, it is sufficient for us to assume strong measurability of a .

Next, we assume that the operator function $a : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, generating the operator A of the form (3.1), is strongly measurable.

For fixed $s \in \Omega$, let $a_*(s)$ denote the adjoint operator of $a(s)$, so that $a_* : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. The following result follows directly from Assertion 3.1 of [12].

Lemma 3.1.

- 1) For any $u \in L_0(X)$, the function $a(\cdot)u(\cdot) : \Omega \rightarrow Y$ is measurable;
- 2) The function $\|a(\cdot)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ is measurable;
- 3) For any $u \in L_0(X)$, and $g \in Y^*$, the function $\langle a(\cdot)u(\cdot), g \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable;
- 4) For any $g \in Y^*$, the function $\|a_*(\cdot)g\|_{X^*} : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ is measurable.

Let us define the quantities $\|a\|_1, \|a\|_w \in [0, \infty]$ by the equalities

$$\|a\|_1 := \int_{\Omega} \|a(s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds, \quad \|a\|_w := \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|a_*(s)g\|_{X^*} ds.$$

(by Lemma 3.1, these definitions are correct).

Lemma 3.2. For any $g \in Y^*$ is true $\int_{\Omega} \|a_*(s)g\|_{X^*} ds = \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |\langle a(s)x, g \rangle| ds$. From

$$\text{this follows } \|a\|_w = \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |\langle a(s)x, g \rangle| ds.$$

P r o o f. $\forall g \in Y^*$ we have

$$\int_{\Omega} \|a_*(s)g\|_{X^*} ds = \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |\langle x, a_*(s)g \rangle| ds = \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |\langle a(s)x, g \rangle| ds. \quad \square$$

Lemma 3.3. We have $\|a\|_w \leq \|a\|_1$. If Y is finite-dimensional, then

$$\|a\|_1 \leq R \|a\|_w \tag{3.2}$$

for some constant $R < \infty$, which depends on the norm in Y , but does not depend on the strongly measurable operator function $a : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$.

P r o o f. Using Lemma 3.2, we have

$$\begin{aligned} \|a\|_w &= \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |\langle a(s)x, g \rangle| ds \leq \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} \sup_{g \in B_1[Y^*]} |\langle a(s)x, g \rangle| ds \\ &= \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} \|a(s)x\|_Y ds = \int_{\Omega} \|a_*(s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds = \|a\|_1. \end{aligned}$$

In case $\dim Y < \infty$, applying Assertion 7.3 of [12] to the special case where the kernel $k(t, s)$ of the linear integral operator does not depend on the variable t and taking into account that Y is linearly isometric to the subspace of constant functions of the Banach space of bounded functions $v : \Omega \rightarrow Y$ with the sup-norm, we get the estimate (3.2). $\square$

R e m a r k 3.2. For $\dim Y < \infty$, as shown in [12, Assertion 7.3], the best-possible constant R in (3.2) (in the class of all strongly measurable operator functions $a : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$) is exactly 1-absolutely summing constant $\pi(Y)$ (see [12, Definition 7.1]) of the space Y , which depends on the dimension and $\|\cdot\|_Y$.

Note also that for any infinite-dimensional space Y the estimate (3.2) is not valid; moreover, there exists $a : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$ such that $\|a\|_w < \infty$ and $\|a\|_1 = \infty$ (see the corresponding example in [12, Remark 6.1]).

Assertion 3.1. *The following conditions (a), (b) and (c) are equivalent to each other:*

- (a) $A \in \mathcal{L}(C(X), Y)$ (the operator A acts from $C(X)$ to Y and is bounded);
- (b) $K \in \mathcal{L}(L_\infty(X), Y)$;
- (c) $\|a\|_w < \infty$.

Moreover, if any of the conditions (a)–(c) is satisfied, then $\|A\|_{\mathcal{L}(C(X), Y)} = \|A\|_{\mathcal{L}(L_\infty(X), Y)} = \|a\|_w$.

The proof of Assertion 3.1 follows from Theorem 4.1 of [12], in which the kernel $k(t, s)$ of the integral operator does not depend on t .

Assertion 3.2. *If $A \in \mathcal{L}_c(C(X), Y)$, then $A \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), Y)$.*

P r o o f. By definition, the set $D := A(B_1[C])$ is relatively compact in Y , and by Assertion 3.1 $A \in \mathcal{L}(L_\infty(X), Y)$.

Let us fix an arbitrary $u \in B_1[L_\infty(X)]$. By Lemma 2.1 of [11] (see also [12, Lemma 2.2] or [13, Lemma 2]) there exists a sequence of functions $u_n \in B_1[C(X)]$ that converges in measure μ to u .

Let us fix some $g \in Y^*$. For any $s \in \Omega$ we define the functional $a_g(s) : X \rightarrow \mathbb{R}$ by the equality $a_g(s)x = \langle a(s)x, g \rangle$ ($x \in X$). Obviously, the functional $a_g(s)$ is linear and continuous, so that $a_g(s) \in X^*$. Thus, the function $a_g(\cdot) : \Omega \rightarrow X^*$ is defined, and we can also define on some set of functions $v : \Omega \rightarrow X$ (formally for now) a linear integral functional H_g generated by the function a_g , as the functional of the form (4.1) was defined in [11]:

$$H_g[v] = \int_{\Omega} a_g(s)[v(s)] ds. \quad (3.3)$$

From the equality $a_g(s)[x] = \langle a(s)x, g \rangle$ and assertion 3) of Lemma 3.1 it follows that $\forall x \in X$ the function $a_g(\cdot)[x] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable.

From Assertion 3.1 it follows that $\|a\|_w < \infty$, therefore, taking into account Lemma 3.2, we have

$$\int_{\Omega} \|a_g(s)\|_{X^*} = \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |a_g(s)[x]| ds = \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |\langle a(s)x, g \rangle| ds \leq \|a\|_w < \infty.$$

Then, by Theorem 4.1 of [11], $H_g \in (L_\infty(X))^*$.

By Corollary 4.2 of [11], for the above-defined sequence of functions $u_n \in B_1[C(X)]$, converging in measure to u , we have $H_g[u_n] \rightarrow H_g[u]$.

$\forall v \in L_\infty(X)$ we have according to the definition of the Pettis integral and taking into account that by virtue of Assertion 3.1 $A : L_\infty(X) \rightarrow Y$:

$$H_g[v] = \int_{\Omega} a_g(s)[v(s)] ds = \int_{\Omega} \langle a(s)v(s), g \rangle ds = \left\langle \int_{\Omega} a(s)v(s) ds, g \right\rangle = \langle Av, g \rangle. \quad (3.4)$$

Thus, the proven property $H_g[u_n] \rightarrow H_g[u]$ means $\langle Au_n, g \rangle \rightarrow \langle Au, g \rangle$. This convergence holds for any $g \in Y^*$, so the sequence $(Au_n)_n$ weakly converges in Y to Au .

Now note that $Au_n \in D$, and that $\overline{D}$ (the closure of D in the strong topology of Y) is compact. As is known, the weak topology in Y is Hausdorff, therefore, being weaker than the normed topology on the entire space Y , it will coincide with the normed topology on the compact topological subspace $\overline{D}$. Thus, $Au_n \rightarrow Au$ in the norm, and therefore $Au \in \overline{D}$.

Since $u \in B_1[L_\infty(X)]$ is arbitrary, we conclude that $A(B_1[L_\infty(X)]) \subset \overline{D}$, therefore, the set $A(B_1[L_\infty(X)])$ is relatively compact in Y . By definition, $A : L_\infty(X) \rightarrow Y$ is compact. $\square$

Assertion 3.3. *Let $\dim X < \infty$. If A acts from $C(X)$ to Y , then it is bounded.*

P r o o f. Let $g \in Y^*$. As in the proof of Assertion 3.2, for any $s \in \Omega$ we define $a_g(s) \in X^*$ by $a_g(s)[x] = \langle a(s)x, g \rangle$ ($x \in X$), and consider the linear integral functional H_g of the form (3.3), generated by the function $a_g(\cdot) : \Omega \rightarrow X^*$.

From the condition $A : C(Y) \rightarrow Y$ and the definition of the Pettis integral it follows (using the transformations (3.4)) that

$$H_g[u] = \langle Au, g \rangle \in \mathbb{R}, \quad u \in C(X), \quad (3.5)$$

so that $H_g : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$.

The condition $\dim X < \infty$ implies, by Corollary 4.1 of [11], that the functional $H_g : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$ is bounded. Therefore, the set $H_g(B_1[C(X)])$ is bounded in $\mathbb{R}$, or, taking into account (3.5), we have that the set $\{\langle Au, g \rangle : u \in B_1[C(X)]\}$ is bounded.

Note that the above arguments are valid for any $g \in Y^*$, so the set $D := A(B_1[C(X)])$ is weakly bounded in Y . As is known, in a normed space a weakly bounded set is bounded in norm (see, for example, [1, p. 198]), therefore the set D is bounded in Y . This implies the boundedness of the operator $A : C(X) \rightarrow Y$. $\square$

From Lemma 3.3 and Assertions 3.1 and 3.3, the following statement obviously follows.

Corollary 3.1. *If X and Y are finite-dimensional, then*

$$A : C(X) \rightarrow Y \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), Y) \Leftrightarrow \|a\|_1 < \infty \Rightarrow \|A\|_{\mathcal{L}(C(X), Y)} = \|A\|_{\mathcal{L}(L_\infty(X), Y)} = \|a\|_w.$$

Assertion 3.4. *Suppose that for some $\Omega' \subset \Omega$ such that $\mu(\Omega \setminus \Omega') = 0$, the function $a|_{\Omega'}$ takes values in $\mathcal{L}_c(X, Y)$ and is continuous and bounded on Ω' . Then $A \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), Y)$.*

P r o o f. From the boundedness of $a|_{\Omega'}$ it follows

$$R := \sup_{s \in \Omega'} \|a(s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty. \quad (3.6)$$

Let us fix an arbitrary $\varepsilon > 0$ and choose some closed set Ω_ε such that $\mu(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{R}$. The function $a|_{\Omega_\varepsilon}$ is continuous on the compact set Ω_ε , hence the set $a(\Omega_\varepsilon)$ is compact in $\mathcal{L}(X, Y)$.

For an arbitrary fixed $\varepsilon_1 > 0$, we choose some finite ε_1 -net $\{a(s_i) : i = 1, 2, \dots, N\}$ of the set $a(\Omega_{\varepsilon_1})$. Since $a(\Omega_{\varepsilon_1}) \subset \mathcal{L}_c(X, Y)$, the set $D := \cup_{i=1}^N \{a(s_i)x : x \in B_1[X]\}$ is relatively compact in Y . From the obvious inequality

$$\|a(s)x - a(s_i)x\|_Y \leq \|a(s) - a(s_i)\|_{\mathcal{L}(X, Y)}, \quad s \in \Omega_{\varepsilon_1}, \quad x \in B_1[X],$$

it follows that D is a ε_1 -net for the set $D_1 := \{a(s)x : s \in \Omega_{\varepsilon_1}, x \in B_1[X]\}$.

We have proved that for any $\varepsilon_1 > 0$, there exists a relatively compact ε_1 -net for D_1 . Therefore, D_1 is relatively compact in Y .

We now fix some $u \in B_1[L_\infty(X)]$ (without loss of generality, we assume $u(\Omega) \subset B_1[X]$) and consider the function $v : \Omega \rightarrow Y$ defined by the equality $v(s) = a(s)u(s)$. By Lemma 3.1, v is measurable, and it follows from (3.6) that

$$\int_{\Omega} \|v(s)\|_Y ds \leq \int_{\Omega'} \|a(s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \|u(s)\|_X ds \leq R \cdot \mu(\Omega) < \infty.$$

By definition, v is Bochner integrable on Ω . Then, from the obvious property of $v(\Omega_{\varepsilon_1}) \subset D_1$, it follows, by Corollary 8 of [17, p. 48], that $\int_{\Omega_{\varepsilon_1}} v(s) ds \in D_2$, where $D_2 = \mu(\Omega) \cdot \overline{\text{co}}(D_1)$.

By Mvzur's theorem [17, p. 48], the set D_2 is compact in Y , and, as would be shown, $D_3 := \left\{ \int_{D_{\varepsilon_1}} a(s)u(s) ds : u \in B_1[L_\infty(X)] \right\} \subset D_2$. Thus, D_3 is relatively compact in Y .

Finally, $\forall u \in B_1[L_\infty(X)]$ we have, taking into account (3.6), the estimate

$$\left\| Au - \int_{\Omega_{\varepsilon_1}} a(s)u(s) ds \right\|_Y = \left\| \int_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_1}} a(s)u(s) ds \right\|_Y \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_1}} \|a(s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds \leq R \cdot \mu(\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon_1}) \leq \varepsilon.$$

We have proved that for any $\varepsilon > 0$, there exists a relatively compact ε -net for $A(B_1[L_\infty])$. Therefore, $A(B_1[L_\infty])$ is relatively compact in Y , which implies the compactness of the operator $A : L_\infty(X) \rightarrow Y$. $\square$

R e m a r k 3.3. The condition of relative compactness of the set D_1 from the proof of Assertion 3.4 is called in the literature *collective compactness* of the family of operators $P = \{a(s) : s \in \Omega_{\varepsilon_1}\}$. [20]. The fact that the relative compactness of the set P in $\mathcal{L}_c(X, Y)$ implies its collective compactness is well known (apparently first proved in [20]).

Corollary 3.2. *If $a \in C(\mathcal{L}_c(X, Y))$ then $A \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), Y)$.*

4. Definition of a linear integral operator and some of its properties

Let $k : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$. Let's consider the linear Fredholm integral operator K with the kernel k , defined by equality

$$(Ku)(t) = \int_{\Omega} k(t, s)u(s) ds, \quad t \in \Omega. \quad (4.1)$$

Under certain conditions on the kernel k , the operator K transforms functions $u : \Omega \rightarrow X$ into functions $Ku : \Omega \rightarrow Y$.

Next, we assume that $\forall t \in \Omega$ the operator function $k(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ is strongly measurable (see Definition 3.1), that is, $\forall t \in \Omega$ and $\forall x \in X$ the function $k(t, \cdot)x : \Omega \rightarrow Y$ is measurable (see Definition 1.1).

For fixed $(t, s) \in \Omega^2$, let $k_*(t, s)$ denote the adjoint operator of $k(t, s)$, so that $k_* : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*)$. It is important not to confuse the operator k_* with the operator k^* , which is called the conjugate kernel and is defined as $k^*(t, s) = k(s, t)!$

We define the following four conditions:

$$(IC) \quad \forall t_0 \in [a, b] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\Omega} \|k(t, s) - k(t_0, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds = 0,$$

$$(IU) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{t_1, t_2 \in \Omega, \|t_1 - t_2\| \leq \delta} \int_{\Omega} \|k(t_1, s) - k(t_2, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds = 0,$$

$$(IC)_w \quad \forall t_0 \in [a, b] \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|[k_*(t, s) - k_*(t_0, s)]g\|_{X^*} ds = 0,$$

$$(IU)_w \quad \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup_{t_1, t_2 \in \Omega, \|t_1 - t_2\| \leq \delta} \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|[k_*(t_1, s) - k_*(t_2, s)]g\|_{X^*} ds = 0,$$

which are naturally called, respectively, *integral local equicontinuity*, *integral equicontinuity*, *weakly integral local equicontinuity* and *weakly integral equicontinuity* of the kernel k of the integral operator K . The conditions are well defined since, by Lemma 3.1, quantities (finite or taking the value $+\infty$) under the limit always exist.

Lemma 4.1. $(IC) \Leftrightarrow (IU) \Rightarrow (IC)_w \Leftrightarrow (IU)_w$, and in the case $\dim Y < \infty$, conditions (IC) , (IU) , $(IC)_w$ and $(IU)_w$, are equivalent.

P r o o f. Let us prove $(IC)_w \Leftrightarrow (IU)_w$. Obviously, $(IU)_w \Rightarrow (IC)_w$.

Let condition $(IC)_w$ be satisfied. We will prove the condition by contradiction, similarly to the proof the uniform continuity of continuous functions on a compact set [1, p. 109].

For convenience, we define the function $\omega : \Omega^2 \rightarrow [0, \infty)$ by

$$\omega(t_1, t_2) = \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|[k_*(t_1, s) - k_*(t_2, s)]g\|_{X^*} ds, \quad t_1, t_2 \in \Omega. \quad (4.2)$$

Suppose that $(IU)_w$ does not hold. Then there exist $\varepsilon_0 > 0$ and sequences of points $t_n, t'_n \in \Omega$ such that $\|t_n - t'_n\| \rightarrow 0$ if $n \rightarrow \infty$ but

$$\omega(t_n, t'_n) \geq \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Since Ω is compact, from the sequence $(t_n)_n$ we can extract a subsequence $(t_{n_k})_k$ converging to some element $t_0 \in \Omega$. Obviously, $t'_{n_k} \rightarrow t_0$ if $k \rightarrow \infty$. Then condition $(IC)_w$ implies $\omega(t_{n_k}, t_0) \rightarrow 0$ and $\omega(t'_{n_k}, t_0) \rightarrow 0$. Thus, for all sufficiently large natural k , we have $\omega(t_{n_k}, t_0) < \varepsilon_0/2$ and $\omega(t'_{n_k}, t_0) < \varepsilon_0/2$, and for these k , we obtain

$$\omega(t'_{n_k}, t'_{n_k}) \leq \omega(t'_{n_k}, t_0) + \omega(t_0, t'_{n_k}) < \varepsilon_0,$$

which contradicts condition (4.3). Implication $(IC)_w \Rightarrow (IU)_w$ is proved.

Property $(IC) \Leftrightarrow (IU)$ is proved similarly.

For fixed $t, t_0 \in \Omega$, applying Lemma 3.3 to the operator function $a(\cdot) = k(t, \cdot) - k(t_0, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, we obtain the inequality

$$\sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|[k_*(t, s) - k_*(t_0, s)]g\|_{X^*} ds \leq \int_{\Omega} \|k(t, s) - k(t_0, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds,$$

and also, in the case $\dim Y < \infty$, the inequality

$$\int_{\Omega} \|k(t, s) - k(t_0, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds \leq R \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|[k_*(t, s) - k_*(t_0, s)]g\|_{X^*} ds,$$

for some constant $R < \infty$, which is independent of $t, t_0 \in \Omega$. This obviously implies $(IC) \Rightarrow (IC)_w$, and in the case $\dim Y < \infty$ also $(IC)_w \Rightarrow (IC)$. $\square$

R e m a r k 4.1. As follows from Remark 3.3, for any infinite-dimensional Y there exist kernels k of the operator K satisfying condition $(IU)_w$, such that conditions (IC) and (IU) do not hold.

Lemma 4.2. *If for some $t_0 \in \Omega$ and $u \in L_{\infty}(X)$ we have $(Ku)(t_0) \in Y$ and condition $(IC)_w$ is satisfied, then $\forall t \in \Omega$ $(Ku)(t) \in Y$.*

P r o o f. Due to the linearity of K , it is sufficient to prove the statement of the lemma for $u \in B_1[L_{\infty}]$ (and we will assume this below).

By Lemma 4.1, condition $(IU)_w$ is true. According to condition $(IU)_w$, we choose $\delta > 0$ such that

$$t, t' \in \Omega, \|t - t'\| \leq \delta \Rightarrow \omega(t, t') \leq 1, \quad (4.4)$$

where the function ω is defined in (4.2).

Fix an arbitrary $t \in \Omega$. According to Theorem 18 of [21, p. 204], since Ω is connected, there exists a finite sequence $t_1, t_2, \dots, t_n = t$ such that $\|t_i - t_{i-1}\| \leq \delta$, $i = 1, 2, \dots, N$ (these points are said to form a δ -chain connecting the points t_0 and t). Condition (4.4) implies

$$\sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} = \omega(t, t_0) \leq \sum_{i=1}^n \omega(t_i, t_{i-1}) \leq N.$$

For any $g \in B_1[Y^*]$, assuming the existence of the integral on the left-hand side, we obtain, using Lemma 3.2 for the operator function $a(\cdot) = k(t, \cdot)$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \langle k(t, s)u(s), g \rangle ds \right| &\leq \int_{\Omega} |\langle k(t, s)u(s), g \rangle| ds \\ &\leq \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} |\langle k(t, s)x, g \rangle| ds = \int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} ds \leq N < \infty. \end{aligned} \quad (4.5)$$

By Lemma 3.1, the function $k(t, \cdot)u(\cdot)$ is measurable, which, together with (4.5), implies the Lebesgue integrability of the function $\langle k(t, \cdot)u(\cdot), g \rangle$ for every $g \in Y^*$. By definition, the function $k(t, \cdot)u(\cdot)$ is Pettis integrable, so there exists $(Ku)(t) \in Y$. $\square$

5. Criteria for compactness of a linear integral operator. General case

Theorem 5.1. *The following statements (A), (B) and (C) are equivalent:*

- (A) K acts from $C(X)$ to $C(Y)$ and is compact;
- (B) K acts from $L_{\infty}(X)$ to $C(Y)$ and is compact;
- (C) *The following condition (a) and (b) are satisfied:*
 - (a) $\exists t_0 \in \Omega$ such that the set $\{(Ku)(t_0) : u \in B_1[C(X)]\}$ is relatively compact in Y ,
 - (b) condition $(IC)_w$ is true.

P r o o f. 1^0 *step.* Let us prove $(C) \Rightarrow (B)$. Suppose that for some $t_0 \in \Omega$ the set $D := \{(Ku)(t_0) : u \in B_1[C(X)]\}$ is relatively compact in Y and condition $(IC)_w$ is satisfied.

Consider an operator A of the form (3.1) generated by the operator function $a(\cdot) = k(t_0, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$. Since the set $A(B_1[C(X)]) = D$ is relatively compact in Y , the operator A acts from $C(X)$ to Y and is compact. By Assertion 3.2, K acts from $L_\infty(X)$ to Y and is compact. Therefore, the set $D_1 := \{(Ku)(t_0) : u \in B_1[L_\infty(X)]\}$ is relatively compact in Y .

Further, from Lemma 4.2 and the linearity of K it follows that $K : L_\infty(X) \rightarrow Y^\Omega$.

Define the set $M \subset Y^\Omega$ by the equality $M := K(B_1[L_\infty(X)])$. Note that $M[t_0] := \{v(t_0) : v \in M\} = D_1$, and as has already been shown, the set $M[t_0]$ is relatively compact in Y , so condition (RC1) of the Arzelà–Ascoli theorem is satisfied (Theorem 2.1).

Let $t, t_0 \in \Omega$ be such that the quantity under the limit sign in condition $(IC)_w$ is finite. Again consider an operator A of the form (3.1), but this time the generated operator function $a(\cdot) = k(t, \cdot) - k(t_0, \cdot)$. By Assertion 3.1,

$$\begin{aligned} \sup_{v \in M} \|v(t) - v(t_0)\|_Y &= \sup_{u \in B_1[L_\infty(X)]} \|(Ku)(t) - (Ku)(t_0)\|_Y = \sup_{u \in B_1[L_\infty(X)]} \|Au\|_Y \\ &= \|Au\|_{\mathcal{L}(L_\infty(X), Y)} = \|a\|_w = \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \| [k_*(t, s) - k_*(t_0, s)]g \|_{X^*} ds. \end{aligned} \quad (5.1)$$

From this and from condition $(IC)_w$ follows $\forall t_0 \in \Omega$ the equality $\lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{v \in M} \|v(t) - v(t_0)\|_Y = 0$, thus, the set M satisfies the condition (RC2) of the Arzelà–Ascoli theorem.

According to the Arzelà–Ascoli theorem, M is a relatively compact set in $C(Y)$. Thus, the operator K acts from $C(X)$ to $C(Y)$ and is compact.

2^0 *step.* Let us prove $(A) \Rightarrow (C)$. Suppose that $K : C(X) \rightarrow C(Y)$ is compact. Then the set $M_1 := K(B_1[C(X)])$ is relatively compact in $C(Y)$, and by Arzelà–Ascoli theorem satisfies conditions (RC1) and (RC2) of this theorem.

Note that condition (RC1) for M_1 means condition (a) of the theorem being proved.

For fixed $t, t_0 \in \Omega$ we define the operator function $a : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ by the equality $a(s) = k(t, s) - k(t_0, s)$, and consider the operator A of the form (3.1) generated by this function a . From the compactness of the operator $K : C(X) \rightarrow C(Y)$ it obviously follows that $A \in \mathcal{L}(C(X), Y)$. In accordance with Assertion 3.1 we have similar (5.1):

$$\sup_{v \in M} \|v(t) - v(t_0)\|_Y = \|A\|_{\mathcal{L}(C(X), Y)} = \|a\|_w = \sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \| [k_*(t, s) - k_*(t_0, s)]g \|_{X^*} ds.$$

From this and from condition (RC2) for M_1 follow condition $(IC)_w$.

From the proven properties of $(C) \Rightarrow (B)$, $(A) \Rightarrow (C)$ and the obvious property of $(B) \Rightarrow (A)$ the statement of the theorem follows. $\square$

R e m a r k 5.1. Theorem 5.1 contains criteria for the action and compactness of a linear integral operator K from U to $C(Y)$ for each of the spaces $U = C(X)$ and $U = L_\infty(X)$, as well as a statement about the equivalence of these properties for the two specified spaces U as the domain of definition of the operator.

In contrast, we note that for the action and boundedness of the operator K with values in $C(Y)$, we were able to obtain a criterion only for the domain $U = L_\infty^c(X)$ (the space of measurable functions with relatively compact range).

Also, in contrast to the equivalence of the action and compactness properties of K from $C(X)$ to $C(Y)$ and from $L_\infty(X)$ to $C(Y)$, we note that there exist linear integral operators

that are bounded in each of the spaces $L_\infty(\mathbb{R})$ and $C(\mathbb{R})$, and at the same time do not act from $L_\infty(\mathbb{R})$ to $C(\mathbb{R})$ (see [12, Example 5.1]). By Theorem 5.1, such operators cannot be compact.

Corollary 5.1. *The assertion of Theorem 5.1 remains valid if condition (a) in its formulation is replaced by any of the following conditions:*

- (a₁) $\exists t_0 \in \Omega$ such that the set $\{(Ku)(t_0) : u \in B_1[L_\infty(X)]\}$ is relatively compact in Y ;
- (a₂) $\forall t \in \Omega$ such that the set $\{(Ku)(t) : u \in B_1[C(X)]\}$ is relatively compact in Y ;
- (a₃) $\forall t \in \Omega$ such that the set $\{(Ku)(t) : u \in B_1[L_\infty(X)]\}$ is relatively compact in Y ;
- (a₄) the set $\{(Ku)(t) : t \in \Omega, u \in B_1[C(X)]\}$ is relatively compact in Y ;
- (a₅) the set $\{(Ku)(t) : t \in \Omega, u \in B_1[L_\infty(X)]\}$ is relatively compact in Y ;

or condition (IC)_w is replaced by condition (IU)_w.

The proof is completely analogous to the proof of the Theorem 5.1 (sometimes with simplifications in part (C) $\Rightarrow$ (B)), using, instead of Theorem 2.1, the corresponding variations of the Arzelà–Ascoli theorem contained in Theorem 2.2.

R e m a r k 5.2. The use of conditions (a) and (b) in Theorem 5.1 among all their modifications given in Corollary 5.1 is explained by the desire to “weaken” these conditions (although formally they are interchangeable), in other words, to “minimize” the conditions for checking the action and complete continuity of the operator when using the criterion in the direction of sufficiency of conditions (a) and (b).

The following statement follows directly from Theorem 5.1, Corollary 5.1 and Lemma 4.1.

Corollary 5.2. *If condition (a) of Theorem 5.1 (or one of conditions (a_i) of Corollary 5.1) and one of conditions (IC) or (IU) are satisfied, then $K \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), C(Y))$.*

R e m a r k 5.3. As follows from Remark 4.1, for any infinite-dimensional Y condition (IC) (as well as (IU)) is not necessary for the statement $K \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), C(Y))$.

R e m a r k 5.4. An obvious drawback of the criterion of Theorem 5.1 is that condition (a) of the theorem (as well as the conditions (a_i) of the Corollary 5.1) is formulated not in terms of the kernel k of the operator K , but in terms of all functions from the unit ball of the space $C(X)$ or $L_\infty(X)$, and are therefore difficult to verify when used for specific operators. In the general case, we were unable to find replacements for these conditions by some conditions in terms of the kernel, but we were able to do so in two independent situations: when some additional condition is imposed on the kernel k , which we will call the zero-condition, and in the case of finite-dimensional Y . The corresponding results are presented in Sections 7. and 8., respectively.

6. A special sufficient condition for compactness of a linear integral operator

Theorem 6.1. *Let the function $k : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ is continuous and bounded on the set $E \subset \Omega^2$, where the set $E_0 := \Omega^2 \setminus E$ is representable in the form $E_0 = \cup_{i \in I} \{(t, s) \in \Omega^2 : s = \varphi_i(t)\}$ for some at most countable set of indices I and some continuous functions $\varphi_i : \Omega \rightarrow \Omega$ ($i \in I$), and there exists $t_0 \in \Omega$ such that $k(t_0, s) \in \mathcal{L}_c(X, Y)$ ($\forall s \in E[t_0]$) where $E[t_0] = \{s \in \Omega : (t_0, s) \in E\}$. Then the operator K acts from $L_\infty(X)$ to $C(Y)$ and is compact.*

P r o o f. Note that the set $\Omega_0 := \Omega \setminus E[t_0]$ has the form $\Omega_0 = \{\varphi_i(t_0) : i \in I\}$, so Ω_0 is at most a countable set, and, accordingly, $\mu(\Omega_0) = 0$. Defining the operator function $a : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ by the equality $a(s) = k(t_0, s)$, we have, by the hypothesis of the theorem, that the function $a|_{E(t_0)}$ is continuous, bounded, and takes values in $\mathcal{L}_c(X, Y)$. By Assertion 3.4, for an operator A of the form (3.1) generated by a , we have $A \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), Y)$, so that the set $A(B_1[L_\infty(X)])$ is relatively compact in Y . This implies the condition (a₁) of Corollary 5.1.

In the same way as in the proof of Theorem 1 from [1, p. 241–242], the validity of condition (IU) is established. It remains to use Corollary 5.1. $\square$

R e m a r k 6.1. Theorem 6.1 directly generalizes the test from [1, Theorem 1, p. 241–242] for the action and compactness of a linear integral operator in the space $C[a, b]$ of continuous functions $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. The conditions in Theorem 6.1 are convenient for establishing the compactness of an integral operator with a variable integration set. Let us give two examples.

E x a m p l e 6.1. Let $\Omega = [a, b]$. Consider a linear integral operator K_1 with a kernel $k_1 : D \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ of the form

$$(K_1 u)(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} k_1(t, s) u(s) ds, \quad t \in \Omega, \quad (6.1)$$

where the functions $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow [a, b]$ are continuous and satisfy the condition $\varphi(t) \leq \psi(t)$ ($t \in [a, b]$), and $D = \{(t, s) \in [a, b]^2 : \varphi(t) < s < \psi(t)\}$.

It is clear that the operator K_1 is a special case of the Fredholm integral operator K of the form (4.1) with kernel $k : [a, b]^2 \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ defined by $k(t, s) = k_1(t, s)$ if $(t, s) \in D$, and $k(t, s) = 0_{\mathcal{L}(X, Y)}$ if $(t, s) \in [a, b]^2 \setminus D$.

If k_1 is a continuous function and for at least one $t_0 \in [a, b]$ the function $k(t_0, \cdot)$ takes values in $\mathcal{L}_c(X, Y)$ and is continuous, then k satisfies the conditions of Theorem 6.1 with $\Omega = [a, b]$ and $E_0 = \text{gr}(\varphi) \cup \text{gr}(\psi)$. Based on this theorem, we conclude that the operator K_1 acts from $L_\infty(X)$ to $C(Y)$ and is compact.

E x a m p l e 6.2. Of exceptional importance for applications is the class of Volterra integral operators (see Introduction). A linear Volterra integral operator with a kernel $k_2 : D \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ where $D = \{(t, s) \in [a, b]^2 : a < s < t\}$ is defined by the equality

$$(K_2 u)(t) = \int_a^t k_2(t, s) u(s) ds, \quad t \in [a, b]. \quad (6.2)$$

What is important for us is that the Volterra operator K_2 is an example of an operator K_1 of the form (6.1), where $\varphi(t) \equiv a$ and $\psi(t) = t$.

If the function k_2 is continuous, then the corresponding kernel k of the operator K of the form (4.1) satisfies the conditions of Theorem 6.1, so that by this theorem $K_2 \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), C(Y))$. Note that the additional assumption about the values of $k(t_0, \cdot)$ in $\mathcal{L}_c(X, Y)$ is not necessary, since $k(a, \cdot) \equiv 0_{\mathcal{L}(X, Y)} \in \mathcal{L}_c(X, Y)$.

The following assertion, which follows directly from Theorem 6.1, generalizes the well-known classical test for compactness of the operator K in the space $C[a, b]$ (see [2, p. 245]).

Corollary 6.1. *If $k : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{L}_c(X, Y)$ is continuous, then $K \in \mathcal{L}_c(L_\infty(X), C(Y))$.*

7. Compactness criteria for a linear integral operator under the zero-condition

Definition 7.1. We say that the function $k : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ satisfies the *zero-condition* if there exists $t_0 \in \Omega$ such that the function $k(t_0, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ is equal to zero almost everywhere on Ω .

Example 7.1. Consider a linear integral operator K_3 with a variable integration domain $\Phi : \Omega \rightarrow 2^\Omega$ and a kernel $k_3 : D \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ where $D = \{(t, s) \in \Omega^2 : s \in \Phi(t)\}$:

$$(K_3 u)(t) = \int_{\Phi(t)} k_3(t, s) u(s) ds, \quad t \in \Omega. \quad (7.1)$$

It is clear that the operator K_3 is a special case of the operator K of the form (4.1), for which $k(t, s) = k_3(t, s)$ if $(t, s) \in D$, and $k(t, s) = 0_{\mathcal{L}(X, Y)}$ if $(t, s) \in \Omega^2 \setminus D$.

If $\mu(\Phi(t_0)) = 0$ for some $t_0 \in \Omega$ then the kernel k of the operator K , corresponding to the operator K_3 , satisfies the zero-condition. Indeed, the function $k(t_0, \cdot) = \chi_{\Phi(t_0)}(\cdot) k_3(t_0, \cdot)$ can take nonzero values only on the set $\Phi(t_0)$ of measure zero.

A concrete example of a function Φ satisfying the condition $\mu(\Phi(t_0)) = 0$ with $\Omega = B_r[\mathbb{R}^\ell]$ (for some $r > 0$) and $t_0 = 0_{\mathbb{R}^\ell}$ is the function $\Phi(t) = B_{\|t\|}[\mathbb{R}^\ell]$.

Example 7.2. A special case of the operator K_3 of the form (7.1) is the operator K_1 of the form (6.1), where $\Omega = [a, b]$ and $\Phi(t) = [\varphi(t), \psi(t)]$. Clearly, the corresponding function k satisfies the null-condition if and only if $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ for some $t_0 \in [a, b]$.

This equality holds for the Volterra operator of the form (6.2) (with $t_0 = a$), so the kernel k of the operator (4.1), corresponding to the Volterra operator, satisfies the null-condition.

Let us present a criterion for the compactness of an integral operator in the case of a zero-condition, which, in contrast to Theorem 5.1, is formulated exclusively in terms of the kernel k of the operator.

Theorem 7.1. *Let the kernel k of the operator K satisfies the zero-condition. The following statements (A) to (D) are equivalent to each other:*

- (A) K acts from $C(X)$ to $C(Y)$ and is compact;
- (B) K acts from $L_\infty(X)$ to $C(Y)$ and is compact;
- (C) condition $(IC)_w$ is true;
- (D) condition $(IU)_w$ is true.

Proof. Let condition (C) be satisfied. Define the set $M \subset Y^\Omega$ by the equality $M := K(B_1[L_\infty(X)])$. The zero condition implies the existence of a $t_0 \in \Omega$ such that $M[t_0] := \{(Ku)(t_0) : u \in B_1[L_\infty(X)]\} = \{0_Y\}$, so the set $M[t_0]$ is relatively compact in Y . Thus, condition (a) of Theorem 5.1 is satisfied. From this theorem follows statement (B). We have proven the implication $(C) \Rightarrow (B)$.

Theorem 5.1 also implies the implication $(A) \Rightarrow (C)$. Note that $(B) \Rightarrow (A)$ is obvious, and $(C) \Leftrightarrow (D)$ follows from Lemma 4.1.

Thus, the equivalence of conditions (A)–(D) is proven. $\square$

The following statement follows directly from Theorem 7.1 and Lemma 4.1.

Corollary 7.1. *If k satisfies the zero-condition and one of conditions (IC) or (IU) is satisfied, then the operator K acts from $L_\infty(X)$ to $C(Y)$ and is compact.*

8. Compactness criteria for a linear integral operator in case $\dim Y < \infty$

Theorem 8.1. *Let $\dim Y < \infty$. The following statements (A), (B) and (C) are equivalent:*

- (A) *K acts from $C(X)$ to $C(Y)$ and is compact;*
- (B) *K acts from $L_\infty(X)$ to $C(Y)$ and is compact;*
- (C) *The following condition (a) and (b) are satisfied:*

- (a) $\exists t_0 \in \Omega$ such that the set $\int_{\Omega} \|k(t_0, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds < \infty$,
- (b) *condition (IC) is true.*

P r o o f. Let condition (C) be satisfied. From (a) it follows that for some $t_0 \in \Omega$

$$\sup_{u \in B_1[C(X)]} \|(Ku)(t_0)\|_Y \leq \int_{\Omega} \sup_{x \in B_1[X]} \|k(t_0, s)x\|_Y ds = \int_{\Omega} \|k(t_0, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds < \infty,$$

so that the set $M[t_0] := \{(Ku)(t_0) : u \in B_1[C(X)]\}$ is bounded in Y , and therefore, since $\dim Y < \infty$, it is relatively compact in Y . By Lemma 4.1, condition $(IC)_w$ holds. Then Theorem 5.1 implies the validity of assertion (B). We have proven the implication $(C) \Rightarrow (B)$.

Let condition (A) be satisfied. By Theorem 5.1, for some $t_0 \in \Omega$, the set $M[t_0]$ is relatively compact in Y , and hence is bounded. Then the operator A of the form (3.1) generated by the operator function $a(\cdot) = k(t_0, \cdot)$ acts from $C(X)$ to Y and is bounded. By Assertion 3.1 $\|a\|_w < \infty$. Then, by Lemma 3.2, for some constant $r < \infty$

$$\int_{\Omega} \|k(t_0, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds = \|a\|_1 \leq R \|a\|_w < \infty,$$

so that condition (a) of the theorem being proved is satisfied. Theorem 5.1 implies $(IC)_w$, so, by Lemma 4.1, condition (IC) is also satisfied. Thus, we have proved the implication $(A) \Rightarrow (C)$.

From the proven properties of $(C) \Rightarrow (B)$, $(A) \Rightarrow (C)$ and the obvious property of $(B) \Rightarrow (A)$ the statement of the theorem follows. $\square$

Corollary 8.1. *The assertion of Theorem 8.1 remains valid if condition (a) in its formulation is replaced by any of the following conditions:*

- (a₁) $\exists t_0 \in \Omega$ such that the set $\sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|k_*(t_0, s)g\|_{X^*} ds < \infty$;
- (a₂) $\forall t \in \Omega$ such that the set $\int_{\Omega} \|k(t, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds < \infty$;
- (a₃) $\forall t \in \Omega$ such that the set $\sup_{g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} ds < \infty$;
- (a₄) $\sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} \|k(t, s)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ds < \infty$,
- (a₅) $\sup_{t \in \Omega, g \in B_1[Y^*]} \int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} ds < \infty$

or condition (IC) replace with any of the conditions (IU), $(IC)_w$ or $(IU)_w$.

The proof of Corollary 8.1 is completely analogous to the proof of the Theorem 8.1 (sometimes with simplifications), using Corollary 5.1 instead of Theorem 5.1.

Corollary 8.2. *Let $\dim Y < \infty$ and the kernel k of the operator K satisfies the zero-condition. Then the following statements (A), (B) and (C) are equivalent:*

- (A) K acts from $C(X)$ to $C(Y)$ and is compact;
- (B) K acts from $L_\infty(X)$ to $C(Y)$ and is compact;
- (C) Any of the equivalent conditions (IC), (IU), $(IC)_w$ or $(IU)_w$ is met.

The proof of Corollary 8.2 follows directly from Theorem 7.1 and Lemma 4.1.

R e m a r k 8.1. In contrast to the criteria for the action and compactness of the operator K contained in Theorem 5.1 and Corollary 5.1, the corresponding criteria from Theorems 7.1, 8.1 and Corollaries 8.1, 8.2 are formulated exclusively in terms of the kernel k of the operator.

Corollary 8.3. *Let $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$ and there exists $t_0 \in \Omega$ such that $\forall u \in C(X)$ the function $k(t_0, \cdot)u(\cdot)$ is integrable on Ω . Then the statements (A), (B) and (C) of the Corollary 8.2 are equivalent.*

P r o o f. By hypothesis, the operator A of the form (3.1), generated by the operator function $a(\cdot) = k(t_0, \cdot)$, acts from $C(X)$ to Y . By Assertion 3.3, the operator A is bounded. Then from Assertion 3.1 and Lemma 3.1 it follows that $\|a\|_1 < \infty$. Thus, condition (a) of Theorem 8.1 is satisfied. It remains to use Theorem 8.1 (taking into account Lemma 4.1). $\square$

R e m a r k 8.2. In [3, p. 101] a criterion for the compactness of a linear integral operator from $L_p(\mathbb{R})$ to $C(\mathbb{R})$ is given under an a priori assumption of its action. Corollary 8.3 directly generalizes a version of this criterion for $p = \infty$.

References

- [1] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover Publications, New York, 1970.
- [2] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, 2nd edition, Pergamon Press Ltd. & "Nauka" Publishers, Oxford–New York–Toronto–Sydney–Paris–Frankfurt, 1982.
- [3] P. P. Zabrejko, A. I. Koshelev, M. A. Krasnosel'skii, S. G. Mikhlin, L. S. Rakovshchik, V. J. Stecenko, *Integral Equations*, Sience, Moscow, 1975 (In Russian).
- [4] M. A. Krasnosel'skii, P. P. Zabrejko, E. I. Pustynnik, P. E. Sbolevskii, *Integral Operators in Spaces of Summable Functions*, Noordhoff Intern. Publ., Leyden, 1976.
- [5] M. A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*, GITLL, Moscow, 1956 (In Russian).
- [6] N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications*, Contemporary Mathematics and Its Applications, **3**, Hindawi Publ. Corpor., New York, 2007.
- [7] H. Cartan, *Differential Calculus*, Hermann, Paris, 1977.
- [8] S. A. Gusarenko, "A generalization of the concept of a Volterra operator", *Dokl. Math.*, **36**:1 (1988), 156–159.
- [9] E. S. Zhukovskii, M. J. Alves, "Absract Volterra operators", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52**:3 (2008), 1–14.
- [10] E. S. Zhukovskii, M. J. Alves, "Equations with Volterra on a system of relations covering mappings of metric spaces", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **18**:5 (2013), 2518–2523 (In Russian).
- [11] M. J. Alves, E. V. Alves, J. P. S. Munembe, Y. V. Nepomnyashchikh, "Linear and nonlinear integral functionals on the space of continuous vector functions", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 111–124 (In Russian).
- [12] M. J. Alves, E. V. Alves, J. P. S. Munembe, Y. V. Nepomnyashchikh, "Linear integral operators in spaces of continuous and essentially bounded vector functions", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 5–19.

- [13] E. Molchanova-Alves, M. Alves, J. Munembe, Y. Nepomnyashchikh, “Uniform continuity of the Urysohn operator in subspaces of the space of essentially bounded vector functions”, *Functional Differential Equations*, **32**:1–2 (2025), 101–120.
- [14] E. V. Alves, M. J. Alves, J. P. S. Munembe, Y. V. Nepomnyashchikh, “Urysohn operator in subspaces of the space of essentially bounded functions”, *Proc. of the 8th International School-Seminar on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2024)* (Irkutsk, Russia, June 24–28, 2024), ISDCT SB RAS, Irkutsk, 2024, 6–7.
- [15] E. V. Molchanova Alves, M. J. Alves, J. P. S. Munembe, Y. V. Nepomnyashchikh, “Uniform continuity of the Urysohn operator in subspaces of the space of continuous bounded vector functions”, *Proc. All-Russian Conf. with Intern. Particip., dedicated to the memory of Professor N. V. Azbelev and Professor E. L. Tonkov. Part 1*, Control Theory and Mathematical Modeling (Izhevsk, Russia, June 16–20, 2025), Udmurt University, Izhevsk, 2025, 20–23.
- [16] E. V. Molchanova Alves, M. J. Alves, J. P. S. Munembe, Y. V. Nepomnyashchikh, “The modulus of continuity of the Urysohn operator in subspaces of the space of continuous vector functions”, *Proc. Intern. Scient. ific Confer. Vol. 1*, Ufa Autumn Mathematical School (Ufa, Russia, October 1–5, 2025), Aeterna, Ufa, 2025, 110–111.
- [17] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys, **15**, AMS, Providence, 1977.
- [18] J. A. Deudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1960.
- [19] R. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Colloquium Publications, **31**, AMS, Providence, 1957.
- [20] P. M. Anselone, *Collectively compact operator approximation theory and application to integral equations*, Prentice-Hall Series in Automatic Computation, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [21] P. S. Aleksandrov, *Introduction to Set Theory and General Topology*, Sience, Moscow, 1977 (In Russian).

Information about the authors

Elena V. Molchanova Alves, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the School of Economy and Business Administration. Higher Institute of Sciences and Technology of Mozambique, Maputo, Republic of Mozambique. E-mail: ealves@isctem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-1452-2553>

Manuel J. Alves, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Department of Mathematics and Informatics. Eduardo Mondlane University, Maputo, Republic of Mozambique. E-mail: manuel.joaquim.alves@uem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3713-155X>

João S. P. Munembe, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Department of Mathematics and Informatics. Eduardo Mondlane University, Maputo, Republic of Mozambique. E-mail: joao.munembe@uem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0380-6734>

Информация об авторах

Молчанова Алвес Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, профессор Школы экономики и делового администрирования. Университет наук и технологий Мозамбика, г. Мапуту, Республика Мозамбик. E-mail: ealves@isctem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-1452-2553>

Алвес Мануэль Жоахим, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Республика Мозамбик. E-mail: manuel.joaquim.alves@uem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3713-155X>

Мунембе Жоао Себастьян Паулу, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуту, Республика Мозамбик. E-mail: joao.munembe@uem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0380-6734>

Yury V. Nepomnyashchikh, PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics. Eduardo Mondlane University, Maputo, Republic of Mozambique. E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1374-4283>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Yury V. Nepomnyashchikh

E-mail: yuvn2@yandex.ru

Received 07.02.2026

Reviewed 10.03.2026

Accepted for press 12.03.2026

Непомнящих Юрий Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики. Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Республика Мозамбик. E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1374-4283>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Непомнящих Юрий Витальевич

E-mail: yuvn2@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.02.2026 г.

Поступила после рецензирования 10.03.2026 г.

Принята к публикации 12.03.2026 г.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Родина Л.И., Кузнецов М.С., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

УДК 517.935.4



Задачи максимизации дохода и средней временной выгоды от сбора ресурса с учетом расходов на обслуживание

Людмила Ивановна РОДИНА^{1,2}, Максим Сергеевич КУЗНЕЦОВ¹

¹ ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

² ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»
119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Исследуется модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано логистическим дифференциальным уравнением $\dot{x} = ax(1-x)$ с мальтузианским коэффициентом $a > 0$. Рассматриваем данное уравнение на отрезке времени $[0, T]$, где $T > 0$ — заданное число. Предполагаем, что в моменты времени t_k из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, и количество ресурса, оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству x_0 . Обозначим через X_k количество ресурса до сбора в момент t_k , общий доход от сбора на отрезке $[0, T]$ определим как

$$D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = \sum_{k=1}^n X_k u_k,$$

где $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. Исследуем задачу нахождения моментов времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ и построения управлений $u_1, \dots, u_n$ для достижения наибольшего дохода на $[0, T]$.

Также рассматривается доход от сбора при дополнительном условии, что в каждый момент времени добыча ресурса связана с расходами на обслуживание оборудования или оплату труда. Считаем, что величина этих расходов постоянная в каждый момент времени и равна $\beta > 0$, тогда общий доход от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$ определим как

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n.$$

Описан режим эксплуатации популяции, при котором достигается наибольшее значение данной характеристики. Исследуется средняя временная выгода от сбора ресурса в предположении, что количество извлечений $n(T)$ на отрезке $[0, T]$ зависит от длины этого отрезка.

Ключевые слова: модель подверженной промыслу популяции, оптимальная эксплуатация, доход от сбора возобновляемого ресурса, средняя временная выгода

Для цитирования: Родина Л.И., Кузнецов М.С. Задачи максимизации дохода и средней временной выгоды от сбора ресурса с учетом расходов на обслуживание // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 61–72.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

SCIENTIFIC ARTICLE

© L. I. Rodina, M. S. Kuznetsov, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

Problems of maximizing income and average time profit from resource harvesting, taking into account maintenance costs

Lyudmila I. RODINA^{1,2}, Maksim S. KUZNETSOV¹¹ Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

² National University of Science and Technology "MISIS"

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. We consider a model of population dynamics which development in the absence of exploitation is given by the logistic differential equation $\dot{x} = ax(1 - x)$ with a Malthusian coefficient $a > 0$. We consider this equation on the time interval $[0, T]$, where $T > 0$ is a given number. Assume that at the moments of time t_k , a certain share of the biological resource $u_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, is extracted from the population and the amount of resource remaining at time T is equal to the initial amount x_0 . Let X_k be the amount of resource before collection at the time t_k , and define the total income from collection on the interval $[0, T]$ as

$$D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = \sum_{k=1}^n X_k u_k,$$

where $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. We study the problem of finding the time moments $t_1, \dots, t_{n-1}$ and constructing the controls $u_1, \dots, u_n$ to achieve the maximum income on $[0, T]$.

Also, the income from the collection is considered under the additional condition that at each moment of time, the extraction of the resource is associated with the costs of equipment maintenance or labor. We assume that the value of these costs is constant at each moment of time and is equal to $\beta > 0$, then the total income from the collection of the resource on the interval $[0, T]$ is defined as

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n.$$

The mode of exploitation of the population in which the greatest value of this characteristic is achieved is described. The average time profit from harvesting a resource is investigated under the assumption that the number of extractions $n(T)$ on the interval $[0, T]$ depends on the length of this interval.

Keywords: model of a population subject to harvesting, optimal exploitation, income from harvesting of a renewable resource, average time profit

Mathematics Subject Classification: 34K35, 49J15, 49K15, 93C15.

For citation: Rodina L.I., Kuznetsov M.S. Problems of maximizing income and average time profit from resource harvesting, taking into account maintenance costs. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 61–72.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-61-72>

Введение

Управление эксплуатацией возобновляемых биологических ресурсов является важной прикладной задачей, находящейся на стыке экологии, экономики и математической теории управления. Основная цель исследований состоит в определении таких режимов извлечения ресурса, которые обеспечивают максимальный экономический эффект при сохранении устойчивости эксплуатируемой системы. Математические модели, используемые для решения подобных задач, часто основаны на системах дифференциальных или разностных уравнений, описывающих динамику популяции, и дополняются управляющими воздействиями, которые заключаются в изъятиях некоторой доли биомассы. С обзором литературы по данной тематике можно познакомиться в [1, 2].

Настоящая работа является продолжением публикаций [3–7], в которых исследуются различные характеристики сбора возобновляемого ресурса и режимы оптимальной добычи. Рассматриваем модель динамики популяции, заданной логистическим дифференциальным уравнением и подверженной эксплуатации. Актуальность исследования связана с необходимостью учета не только доходов от добычи, но и постоянных затрат, сопровождающих каждое извлечение ресурса (например, затраты на оборудование, топливо, рабочую силу), а также с задачей долгосрочного устойчивого использования ресурса, характеризующейся средней временной выгодой.

В первом параграфе статьи рассматривается общий доход при n извлечениях ресурса на заданном отрезке $[0, T]$, исследуется задача нахождения моментов времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ и построения управлений для достижения наибольшего значения данной характеристики. Показано, что если количество ресурса, оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству x_0 , то для максимизации дохода необходимо производить извлечения через одинаковые промежутки времени. Далее рассматривается доход от сбора ресурса при дополнительном условии, что в каждый момент времени добыча связана с расходами на обслуживание оборудования или оплату труда. В предположении, что величина этих расходов $\beta > 0$ постоянная при каждом извлечении ресурса, получено значение оптимального количества извлечений $n_0 = n_0(\beta, T) \leq n$ для отрезка $[0, T]$ и наибольшее значение дохода. В последнем параграфе исследуется задача сбора ресурса на бесконечном промежутке времени. Получены выражения для оптимальных величин промежутков между моментами извлечения ресурса и максимальное значение средней временной выгоды с учетом расходов на обслуживание. Для всех рассматриваемых характеристик описаны режимы эксплуатации популяции, при которых достигаются их наибольшие значения.

1. Задача о максимизации дохода от сбора возобновляемого ресурса

Исследуется модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано логистическим дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = ax(1 - x), \quad x \geq 0. \quad (1.1)$$

Коэффициент $a > 0$ в задачах математической биологии называют мальтузианским коэффициентом. Будем рассматривать уравнение (1.1) на промежутке времени $[0, T]$, где $T > 0$ — заданное число.

Пусть в момент времени t_k ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$) из популяции извлекается некоторая доля биологического ресурса $u_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$. С учетом

эксплуатации получаем управляемую систему с импульсным воздействием

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax(1-x), \quad t \neq t_k, \\ x(t_k) &= (1-u_k)x(t_k-0),\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $x(t_k-0)$ и $x(t_k)$ — количество ресурса до и после сбора в момент t_k соответственно. Предполагаем, что решения этой системы непрерывны справа.

Обозначим через $X_k = x(t_k-0)$ количество ресурса до сбора в момент t_k , $x(0) = x_0$ — начальное количество ресурса, C_1 — агрегированную стоимость условной единицы ресурса. Будем полагать, что $C_1 = 1$, тогда стоимость собранного ресурса в момент t_k равна $X_k u_k$, $k = 1, \dots, n$. Предполагаем также, что количество ресурса, оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству ресурса x_0 , то есть $(1-u_n)X_n = x_0$. *Общий доход от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$ определим как*

$$D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = \sum_{k=1}^n X_k u_k,\tag{1.3}$$

где $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. Исследуем задачу нахождения моментов времени $t_1, \dots, t_{n-1}$ и построения управлений $u_1, \dots, u_n$ для достижения наибольшего дохода (1.3) на отрезке $[0, T]$.

Для удобства вычислений введем вспомогательные обозначения: $x_k = x(t_k)$ — количество ресурса после сбора в момент t_k , $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, $t_0 = 0$, $t_n = T$. Тогда

$$x_k = (1-u_k)X_k, \quad k = 1, \dots, n; \quad \tau_1 + \dots + \tau_n = T, \quad x_n = x_0.\tag{1.4}$$

Впишем решения логистического уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(0, x_k) = x_k$:

$$\varphi(t, x_k) = \frac{x_k e^{at}}{1 + x_k(e^{at} - 1)}, \quad t \geq 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Отметим, что

$$X_k = \varphi(\tau_k, x_{k-1}) = \frac{x_{k-1} e^{a\tau_k}}{1 + x_{k-1}(e^{a\tau_k} - 1)}, \quad k = 1, \dots, n.\tag{1.5}$$

В новых обозначениях задача максимизации функции (1.3) сводится к задаче максимизации функции

$$S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x_k}{(1-x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k} - x_k \right),$$

где $\bar{\tau}_n = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$, $\tau_1 + \dots + \tau_n = T$, $x_n = x_0$. Для фиксированного $n \geq 1$ рассмотрим множество

$$\Delta_n(T) \doteq \{(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) : \tau_k \in (0, T), \tau_1 + \dots + \tau_n = T, x_k \in [0, X_k], k = 1, \dots, n\}.$$

Если $x_0 \in [0, 1]$, то $x_k \in [0, X_k] \subseteq [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, тогда множество $\Delta_n(T)$ ограничено и является подмножеством $[0, 1]^n \times (0, T)^n$.

Теорема 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и $x_0 \in [0, 1]$. Наибольшее значение функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$ равно

$$S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) = n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} \quad (1.6)$$

и достигается в точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$\tau_1^* = \dots = \tau_n^* = \frac{T}{n}, \quad x_1^* = \dots = x_n^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}. \quad (1.7)$$

Доказательству теоремы 1.1 предположим доказательство следующего утверждения.

Лемма 1.1. Последовательность $\{S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)\}_{n=1}^\infty$, заданная (1.6), возрастающая и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} = \frac{aT}{4}. \quad (1.8)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$S(x) \doteq x(e^{\frac{aT}{2x}} - 1)(e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-1}, \quad x > 0.$$

Найдем

$$S'(x) = \left(e^{\frac{aT}{x}} - 1 - \frac{aT}{x}e^{\frac{aT}{2x}}\right)(e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-2}.$$

Отметим, что $S'(x) > 0$ при $x > 0$, так как это неравенство равносильно

$$\operatorname{sh} \frac{aT}{2x} > \frac{aT}{2x}, \quad x > 0.$$

Таким образом, функция $S(x)$ возрастает на интервале $(0, +\infty)$, поэтому последовательность $\{S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)\}_{n=1}^\infty$ возрастающая.

Равенство (1.8) можно получить, если разложить экспоненту $e^{\frac{aT}{2n}}$ в ряд Тейлора. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Выпишем уравнения для нахождения критических точек функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$:

$$S'_{\tau_k}(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) = \frac{ax_{k-1}(1 - x_{k-1})e^{-a\tau_k}}{((1 - x_{k-1})e^{-a\tau_k} + x_{k-1})^2} - \frac{ax_{n-1}(1 - x_{n-1})e^{-a\tau_n}}{((1 - x_{n-1})e^{-a\tau_n} + x_{n-1})^2} = 0, \quad (1.9)$$

где $k = 1, \dots, n$, $\tau_n = T - (\tau_1 + \dots + \tau_{n-1})$;

$$S'_{x_k}(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) = \frac{e^{-a\tau_{k+1}}}{((1 - x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k)^2} - 1 = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует

$$x_k^* = \left(e^{\frac{a\tau_{k+1}^*}{2}} + 1\right)^{-1}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Подставляя данные значения в (1.9), получаем $\tau_1^* = \dots = \tau_n^*$ и окончательно

$$\tau_1^* = \dots = \tau_n^* = \frac{T}{n}.$$

Теперь из двух последних равенств и $x_0^* = x_n^*$ следует, что

$$x_1^* = \dots = x_n^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}.$$

Вычисляя значение функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ в данной стационарной точке, получаем (1.6).

Докажем, что точка $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$, заданная (1.7), является точкой максимума функции $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$. Отметим, что $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$ является внутренней стационарной точкой ограниченного множества $\Delta_n(T)$ (это следует из неравенства $x^* < \varphi(\tau^*, x^*)$, где $x^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$, $\tau^* = T/n$). Покажем, что значение функции в точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$ больше максимального значения на границе $\Delta_n(T)$.

Пусть $n = 1$, тогда $\Delta_1(T) \doteq \{(T, x_1) : x_1 \in [0, X_1]\}$. Функция

$$S(\bar{\tau}_1, \bar{x}_1) = S(T, x_1) = \frac{x_1}{(1 - x_1)e^{-aT} + x_1} - x_1$$

на интервале $(0, 1)$ имеет стационарную точку $x^* = (e^{\frac{aT}{2}} + 1)^{-1}$, в которой

$$S(T, x^*) = (e^{\frac{aT}{2}} - 1)(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^{-1} > 0.$$

Вычисляя $S(T, 0) = S(T, X_1) = 0$, делаем вывод, что (T, x^*) — точка максимума.

При $n = 2$ рассмотрим множество

$$\Delta_2(T) \doteq \{(\bar{\tau}_2, \bar{x}_2) : \tau_k \in (0, T), \tau_1 + \tau_2 = T, x_k \in [0, X_k], k = 1, 2\}$$

и найдем

$$S(\bar{\tau}_2^*, \bar{x}_2^*) = 2(e^{\frac{aT}{4}} - 1)(e^{\frac{aT}{4}} + 1)^{-1}$$

(здесь $\tau_1^* = \tau_2^* = T/2$, $x_1^* = x_2^* = (e^{\frac{aT}{4}} + 1)^{-1}$). Докажем, что это значение больше, чем значения функции $S(\bar{\tau}_2, \bar{x}_2)$ на границе $\Delta_2(T)$. Рассмотрим часть этой границы, на которой выполняется равенство $x_1 = X_1 = \varphi(\tau_1, x_0)$. Оно означает, что в момент времени τ_1 извлечение ресурса не производится и весь доход получается только при $t = T$, наибольшее значение этого дохода равно $S(T, x^*)$. Из леммы 1.1 следует, что

$$S(\bar{\tau}_2^*, \bar{x}_2^*) > S(\bar{\tau}_1^*, \bar{x}_1^*) = S(T, x^*). \quad (1.11)$$

Далее рассмотрим часть границы, для которой $x_2 = X_2 = \varphi(\tau_2, x_1)$; здесь в момент времени T добыча ресурса не производилась, и весь доход получен от извлечения в момент $\tau_1 < T$. В этом случае получаем

$$S(\bar{\tau}_2^*, \bar{x}_2^*) > S(T, x^*) > S(\tau_1, x^*).$$

Рассмотрим другие части границы множества $\Delta_2(T)$. Если $x_0 = 0$, то $x_1 = 0$, здесь получается нулевой доход, и аналогично при $x_1 = 0$. Если $\tau_1 = 0$, то $\tau_2 = T$ (если $\tau_2 = 0$, то $\tau_1 = T$), тогда выполнено (1.11).

Аналогичные рассуждения верны для множества $\Delta_n(T)$ при любом $n \geq 3$. В силу леммы 1.1, последовательность $\{S_n(\bar{\tau}^*, \bar{x}^*)\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, поэтому наибольшее значение дохода в стационарной точке внутри множества $\Delta_n(T)$ будет превосходить значения данной функции на границе этого множества. $\square$

Вернемся к рассмотрению функции общего дохода от сбора ресурса $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$, заданной равенством (1.3).

Теорема 1.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и $x_0 \in [0, 1]$. Наибольшее значение функции $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ равно $n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}$ и достигается в точке $(\bar{t}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$t_k^* = \frac{kT}{n}, \quad u_k^* = 1 - e^{-\frac{aT}{2n}}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.12)$$

Доказательство. Наибольшие значения функций $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ и $S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ совпадают, поэтому основное утверждение теоремы следует из теоремы 1.1. Найдем точку $(\bar{t}_n^*, \bar{x}_n^*)$, в которой достигается максимум $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$. Из (1.4) и (1.5) следует, что

$$u_k = 1 - \frac{x_k}{X_k} = 1 - \frac{x_k}{\varphi(\tau_k, x_{k-1})} = 1 - \frac{x_k(1 + x_{k-1}(e^{a\tau_k} - 1))}{x_{k-1}e^{a\tau_k}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Далее из (1.7) получаем (1.12). $\square$

2. Задача о максимизации дохода с учетом расходов на обслуживание

Рассматриваем управляемую систему с импульсным воздействием (1.2) и общий доход от сбора ресурса $D(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ на отрезке $[0, T]$, заданный равенством (1.3). Полагаем, что количество ресурса x_n , оставшегося в момент времени T , равно начальному количеству ресурса x_0 .

Введем дополнительное предположение, которое состоит в том, что извлечение ресурса в каждый момент времени связано с расходами на обслуживание оборудования или оплату труда. Пусть величина этих расходов будет постоянной в каждый момент времени и равна $\beta > 0$. Тогда общий доход от сбора ресурса на отрезке $[0, T]$ определим как

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n, \quad (2.1)$$

где $\bar{t}_n = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u}_n = (u_1, \dots, u_n)$, $t_n = T$. Исследуем задачу максимизации дохода (2.1) от добычи ресурса на отрезке $[0, T]$ с учетом расходов на обслуживание.

Рассмотрим последовательность

$$V_n \doteq S(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) - \beta n = n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} - \beta n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Лемма 2.1. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 > e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$, то последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ убывающая;
 - 2) если $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 \leq e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$, то последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает
- при $n \leq n_0$ и убывает при $n > n_0$, где $n_0 = \left\lfloor \frac{aT}{2y^*} \right\rfloor$, $y^* > 0$ — корень уравнения

$$e^{2y} - 1 - 2ye^y = \beta(e^y + 1)^2 \quad (2.2)$$

(квадратными скобками здесь обозначена целая часть числа).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(x) \doteq x(e^{\frac{aT}{2x}} - 1)(e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-1} - \beta x, \quad x > 0,$$

найдем

$$v'(x) = \left(e^{\frac{aT}{x}} - 1 - \frac{aT}{x} e^{\frac{aT}{2x}} \right) (e^{\frac{aT}{2x}} + 1)^{-2} - \beta.$$

Отметим, что функция $v'(x)$ убывающая, так как $v''(x) < 0$ при $x > 0$; кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v'(x) = -\beta < 0. \quad (2.3)$$

Неравенство $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 > e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$ равносильно $v'(1) < 0$. Поскольку функция $v'(x)$ убывающая, то $v'(x) < 0$ при всех $x \geq 1$. Следовательно, $v(x)$ также является убывающей функцией (при $x \geq 1$), и поэтому последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ убывающая.

Далее, неравенство $\beta(e^{\frac{aT}{2}} + 1)^2 \leq e^{aT} - 1 - aTe^{\frac{aT}{2}}$ означает, что $v'(1) \geq 0$. Поэтому из (2.3) следует существование точки $x^* \geq 1$, для которой $v'(x^*) = 0$. Поскольку функция $v'(x)$ убывающая, то точка x^* единственная и является точкой максимума функции $v(x)$. Пусть $y = aT/2x$, тогда уравнение $v'(x) = 0$ равносильно уравнению (2.2), и $y^* = aT/2x^*$ является единственным положительным корнем (2.2). $\square$

Используя обозначения первого параграфа, приведем задачу о максимизации дохода с учетом на обслуживание $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ к задаче максимизации функции

$$V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) \doteq S(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n) - \beta n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x_k}{(1-x_k)e^{-a\tau_{k+1}} + x_k} - x_k \right) - \beta n,$$

где $\bar{\tau}_n = (\tau_1, \dots, \tau_n)$, $\bar{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$, $\tau_1 + \dots + \tau_n = T$, $x_n = x_0$.

Приведенное ниже утверждение является следствием теоремы 1.1 и леммы 2.1.

Теорема 2.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано и $x_0 \in [0, 1]$. Справедливы следующие утверждения:

1) Если $n \leq n_0 = \left\lceil \frac{aT}{2y^*} \right\rceil$, где $y^* > 0$ — корень уравнения (2.2), то наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$ равно

$$V(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*) = n(e^{\frac{aT}{2n}} - 1)(e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1} - \beta n \quad (2.4)$$

и достигается в точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$\tau_1^* = \dots = \tau_n^* = \frac{T}{n}, \quad x_1^* = \dots = x_n^* = (e^{\frac{aT}{2n}} + 1)^{-1}.$$

2) Если $n > n_0$, то наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ на множестве $\Delta_n(T)$ равно $\max(V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*), V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*))$.

Доказательство. Пусть $n \leq n_0$. В силу леммы 2.1 последовательность $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ возрастает при $n \leq n_0$, поэтому значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ в стационарной точке $(\bar{\tau}_n^*, \bar{x}_n^*)$ больше, чем на границе множества $\Delta_n(T)$.

Если $n > n_0$, то наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_n, \bar{x}_n)$ равно либо $V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*)$, либо $V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*)$. Отсюда получаем второе утверждение теоремы. $\square$

Следствие 2.1. Пусть $x_0 \in [0, 1]$. Если $n \leq n_0$, то наибольшее значение функции $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ задается равенством (2.4) и достигается в точке $(\bar{t}_n^*, \bar{x}_n^*)$, где

$$t_k^* = \frac{kT}{n}, \quad u_k^* = 1 - e^{-\frac{aT}{2n}}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При $n > n_0$ наибольшее значение функции $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ равно

$$\max(V(\bar{t}_{n_0}^*, \bar{u}_{n_0}^*), V(\bar{t}_{n_0+1}^*, \bar{u}_{n_0+1}^*)).$$

Пример 2.1. Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой при отсутствии эксплуатации задано дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = 2x(1 - x), \quad x \geq 0. \quad (2.5)$$

Найдем наибольшее значение дохода (2.1) от добычи ресурса с учетом расходов на обслуживание на отрезке $[0, 15]$ при $n = 10$, $\beta = 0,5$.

Отметим сначала, что если производить 10 извлечений ресурса через одинаковые промежутки времени, то доход от добычи будет равен приблизительно 1,351. Покажем, что более рационально производить 6 извлечений. Действительно, при $\beta = 0,5$ уравнение (2.2) имеет корень $y^* \approx 2,51$ и $n_0 = 5$. Из (2.4) находим

$$V(\bar{\tau}_5^*, \bar{x}_5^*) \approx 2,026, \quad V(\bar{\tau}_6^*, \bar{x}_6^*) \approx 2,090.$$

В силу теоремы 2.1 наибольшее значение функции $V(\bar{\tau}_{10}, \bar{x}_{10})$ на множестве $\Delta_{10}(15)$ приближенно равно 2,090. Данное значение достигается в точке $(\bar{\tau}_6^*, \bar{x}_6^*)$, где

$$\tau_1^* = \dots = \tau_6^* = 2,5, \quad x_1^* = \dots = x_6^* \approx 0,076.$$

Отметим, что $u_k^* \approx 0,918$, $k = 1, \dots, 6$.

3. Задача о максимизации средней временной выгоды от извлечения ресурса

Рассматриваем управляемую систему с импульсным воздействием (1.2) и общий доход от сбора ресурса на отрезке времени $[0, T]$:

$$R(\bar{t}_n, \bar{u}_n) = D(\bar{t}_n, \bar{u}_n) - n\beta = \sum_{k=1}^n X_k u_k - \beta n.$$

Если $\beta > 0$, то общий доход учитывает расходы на обслуживание, при $\beta = 0$ такие расходы не предусмотрены. Количество ресурса, оставшегося в момент времени T , может быть произвольным (не обязательно равным начальному количеству ресурса x_0). Предполагаем, что количество извлечений ресурса $n = n(T)$ зависит от длины отрезка $[0, T]$ и может выбираться различными способами. Обозначим $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots)$, $\bar{u} = (u_1, u_2, \dots)$, где $u_k \in [0, 1]$ — доля извлеченного ресурса в момент времени t_k , $k = 1, 2, \dots$.

Определение 3.1. *Средней временной выгодой* от извлечения ресурса назовем функцию

$$H_*(x_0, \bar{t}, \bar{u}) \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{k=1}^{n(T)} X_k u_k - \beta n(T) \right).$$

Аналогично, с заменой нижнего предела на верхний, определим функцию $H^*(x_0, \bar{t}, \bar{u})$ и, если выполнено равенство $H_*(x_0, \bar{t}, \bar{u}) = H^*(x_0, \bar{t}, \bar{u})$, то определим предел

$$H(x_0, \bar{t}, \bar{u}) \doteq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\sum_{k=1}^{n(T)} X_k u_k - \beta n(T) \right).$$

Отметим, что в работах [5, 6] рассматривалось другое определение средней временной выгоды (предполагалось, что промежутки между извлечениями ресурса фиксированы и равны $d > 0$).

Теорема 3.1. Пусть $\beta > 0$. Тогда наибольшее значение функции $H(x_0, \bar{t}, \bar{u})$ равно

$$H(x_0^*, \bar{t}^*, \bar{u}^*) = \frac{a}{2y^*} \left(\frac{e^{y^*} - 1}{e^{y^*} + 1} - \beta \right) = \frac{ae^{y^*}}{(e^{y^*} + 1)^2}, \quad (3.1)$$

где y^* — корень уравнения (2.2). Значение (3.1) достигается при

$$x_0^* = (e^{y^*} + 1)^{-1}, \quad t_k^* = \frac{2ky^*}{a}, \quad u_k^* = 1 - e^{-y^*}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Доказательство. Покажем сначала, что если $n(T) = [\alpha T]$ для некоторого $\alpha > 0$, то существует предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T)}{T} = \alpha. \quad (3.3)$$

Действительно, для любого числа αT выполнены неравенства $[\alpha T] \leq \alpha T < [\alpha T] + 1$. Отсюда получаем

$$\frac{\alpha T - 1}{T} < \frac{[\alpha T]}{T} = \frac{n(T)}{T} \leq \alpha.$$

Таким образом, предел $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(T)}{T}$ существует, и выполнено (3.3).

Для каждого $T > 0$ выберем $n(T) = [aT/2y^*]$, тогда наибольшее значение дохода $R(\bar{t}_n, \bar{u}_n)$ равно $\max(V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*), V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*))$, где $n_0 = n(T)$. Из (3.3) получаем, что $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_0}{T} = \frac{a}{2y^*}$. Учитывая (2.4), найдем предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n_0}{T} \left(\frac{e^{\frac{aT}{2n_0}} - 1}{e^{\frac{aT}{2n_0}} + 1} - \beta \right) = \frac{a}{2y^*} \left(\frac{e^{y^*} - 1}{e^{y^*} + 1} - \beta \right) = \frac{ae^{y^*}}{(e^{y^*} + 1)^2}.$$

Последнее равенство следует из условия того, что y^* является корнем уравнения (2.2). Отметим, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V(\bar{\tau}_{n_0+1}^*, \bar{x}_{n_0+1}^*)}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{V(\bar{\tau}_{n_0}^*, \bar{x}_{n_0}^*)}{T},$$

поэтому справедливо (3.1). В (3.2) указаны значения $x_0^*, \bar{t}^*, \bar{u}^*$, при которых выполнено (3.1) (это можно проверить при помощи простых вычислений). $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Кроме режима эксплуатации популяции, указанного в (3.2), можно выбрать и другие оптимальные режимы сбора ресурса. Например, если $x_0 \geq x_0^* = (e^{y^*} + 1)^{-1}$, то следующие значения:

$$t_k^* = \frac{2ky^*}{a}, k = 1, 2, \dots; u_1^* = 1 - \frac{x_0^*(1 + x_0(e^{2y^*} - 1))}{x_0 e^{2y^*}}, \quad u_k^* = 1 - e^{-y^*}, \quad k = 2, 3, \dots$$

дадут такой же оптимальный результат средней временной выгоды, как в (3.1).

Также заметим, что в (3.2) получены оптимальные величины промежутков между моментами извлечения ресурса на бесконечном интервале времени, которые равны $2y^*/a$.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим модель динамики популяции, развитие которой задано дифференциальным уравнением (2.5). Пусть $\beta = 0,5$, тогда $y^* \approx 2,51$. Наибольшее значение функции $H(x_0, \bar{t}, \bar{u})$ приближенно равно 0,139 и достигается при

$$x_0^* \approx 0,075, \quad t_k^* \approx 2,51k, \quad u_k^* \approx 0,919, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отметим, что данные значения управлений u_k^* близки к значениям, полученным в примере 2.1. Сравнивая значения $H(x_0^*, \bar{t}^*, \bar{u}^*) \approx 0,139$ и $\frac{1}{15}V(\bar{\tau}_6^*, \bar{x}_6^*) \approx 0,139$, видим, что они совпадают с точностью до тысячных.

References

- [1] A. O. Belyakov, V. M. Veliov, “On optimal harvesting in age-structured populations”, *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making: Essays in Honor of Richard F. Hartl*, **22** (2016), 149–166.
- [2] А. А. Давыдов, Д. А. Мельник, “Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором”, Тр. ИММ УрО РАН, **27**, 2021, 99–107; англ. пер.: A. A. Davydov, D. A. Melnik, “Optimal states of distributed exploited populations with periodic impulse harvesting”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **315**: suppl. 1 (2021), S81–S88.
- [3] А. В. Егорова, Л. И. Родина, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29**:4 (2019), 501–517. [A. V. Egorova, L. I. Rodina, “On optimal harvesting of renewable resource from the structured population”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 501–517 (In Russian)].
- [4] Л. И. Родина, А. В. Черникова, “Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени”, Труды Института математики и механики УрО РАН, **29**, 2023, 167–179. [L. I. Rodina, A. V. Chernikova, “On infinite-horizon optimal exploitation of a renewable resource”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **29**, 2023, 167–179 (In Russian)].
- [5] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].
- [6] Л. И. Родина, “Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, “Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].
- [7] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 16–26. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of renewable resource extraction from the structured population”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 16–26 (In Russian)].

Информация об авторах

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Information about the authors

Lyudmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Кузнецов Максим Сергеевич, старший преподаватель кафедры материаловедения и энергетического машиностроения, Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: maks.kuznetsoff@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-8970-0825>

Maxim S. Kuznetsov, Senior Lecturer of the Materials Science and Power Engineering Department, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russian Federation. E-mail: maks.kuznetsoff@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0009-0001-8970-0825>

Поступила в редакцию 13.01.2026 г.
Поступила после рецензирования 09.03.2026 г.
Принята к публикации 12.03.2026 г.

Received 13.01.2026
Reviewed 09.03.2026
Accepted for press 12.03.2026

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ступин Д. Л., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

УДК 517.53, 517.54



Оценки коэффициентов необращающихся в нуль функций

Денис Леонидович СТУПИН

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Настоящая статья посвящена оценкам модулей тейлоровских коэффициентов на классах голоморфных функций, не обращающихся в нуль и ограниченных в единичном круге. Обозначим множество всех голоморфных функций, ограниченных снизу по модулю в единичном круге, через E . Пусть $t \geq 0$ — параметр. На подклассах E_t класса E , содержащих отображения из E , нормированные в начале координат, получены точные оценки модулей всех тейлоровских коэффициентов. Рассмотрим класс B , состоящий из голоморфных функций, ограниченных по модулю сверху и не обращающихся в нуль в единичном круге, а также его подклассы B_t , состоящие из функций класса B , нормированных в начале координат. Классы E и E_t связаны с классами B и B_t посредством инволюции. Промежуточное положение между двумя упомянутыми классами E и B занимает множество голоморфных ограниченных по модулю сверху и снизу функций $A_{\rho,r}$, $0 < \rho < r$. Классы $A_{\rho,r}$ можно разбить на подклассы $A_{\rho,r,t}$ функций класса $A_{\rho,r}$, нормированных в начале координат. Фиксируем ρ и r . Изучение класса $A_{\rho,r}$ можно свести к изучению класса $A_{1,r/\rho}$, являющегося подклассом класса E , или к изучению класса $A_{\rho/r,1}$, являющегося подклассом класса B . При этом $A_{1,r/\rho} \rightarrow E$ и $A_{\rho/r,1} \rightarrow B$ при $r \rightarrow \infty$. На классах $A_{1,r,t}$ построена мажорирующая функция с действительными коэффициентами, благодаря чему с помощью теории подчинения получены точные оценки модулей первых двух тейлоровских коэффициентов на каждом классе $A_{1,r,t}$, а также на классе $A_{1,r}$.

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, ограниченные функции, точные оценки модулей тейлоровских коэффициентов

Для цитирования: Ступин Д. Л. Оценки коэффициентов необращающихся в нуль функций // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 73–85.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. L. Stupin, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

Coefficient estimates for nonvanishing functions

Denis L. STUPIN

Tver State University

33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. The article is devoted to the estimates of the moduli of Taylor coefficients on classes of holomorphic functions that do not vanish and are bounded in the unit disk. Let us denote the set of all holomorphic functions that are bounded from below by modulus in the unit disk by E . Let $t \geq 0$ be a parameter. The sharp estimates of the moduli of all Taylor coefficients have been obtained for subclasses E_t of the class E that contain mappings from E normalized at the origin. We consider the class B consisting of holomorphic functions that are bounded from above by modulus and do not vanish in the unit disk, as well as its subclasses B_t which consist of functions from the class B normalized at the origin. The classes E and E_t are related to the classes B and B_t through involution. An intermediate position between the two aforementioned classes E and B is occupied by the set of holomorphic functions $A_{\rho,r}$, $0 < \rho < r$, that are bounded from above and from below by modulus. The classes $A_{\rho,r}$ can be divided into subclasses $A_{\rho,r,t}$ of functions from class $A_{\rho,r}$ normalized at the origin. We fix ρ and r . The study of the class $A_{\rho,r}$ can be reduced to the study of the class $A_{1,r/\rho}$ which is a subclass of the class E , or to the study of the class $A_{\rho/r,1}$ which is a subclass of the class B . Besides, $A_{1,r/\rho} \rightarrow E$ and $A_{\rho/r,1} \rightarrow B$ as $r \rightarrow \infty$. A majorizing function with real coefficients has been constructed for the classes $A_{1,r,t}$, enabling us using the theory of subordination to obtain the sharp estimates of the moduli of the first two Taylor coefficients for each class $A_{1,r,t}$ and also for the class $A_{1,r}$.

Keywords: the Krzyz conjecture, the Krzyz hypothesis, the Krzyz problem, bounded nonvanishing functions, bounded functions, sharp Taylor coefficient modulus estimates

Mathematics Subject Classification: 30C50.

For citation: Stupin D.L. Coefficient estimates for nonvanishing functions. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 73–85. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-73-85>

Введение

Пусть $\Delta := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости. Класс функций F , голоморфных в Δ и удовлетворяющих условию $|F(z)| \geq 1$ для всех $z \in \Delta$, обозначим через E .

Коэффициенты ряда Тейлора функции F будем обозначать через $\{F\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. В этих обозначениях разложение F в ряд Тейлора имеет вид:

$$F(z) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \dots$$

Поскольку класс E инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = F(z)$), мы можем без потери общности ограничиться изучением тех функций, для которых $F(0) > 1$. Далее, можно положить $\{F\}_0 := e^t$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через E_t . Ясно также, что для любой функции F класса E_t существует функция $h \in C$ такая, что

$$F(z) = e^{th(z)}, \quad (0.1)$$

где C — известный класс Каратеодори голоморфных функций h с нормировкой $h(0) = 1$, $\operatorname{Re} h(z) > 0$ для $z \in \Delta$. Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами C и E_t .

1. Формула для коэффициентов

Продифференцировав (0.1) по z , имеем:

$$F'(z) = t h'(z) F(z). \quad (1.1)$$

Подставив в формулу (1.1) тейлоровские разложения функций F и h , получим следующие формулы:

$$\{F\}_0 = e^t, \quad \{F\}_n = \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{F\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

связывающие коэффициенты функций F и h .

2. Точные оценки коэффициентов на классах E_t , $t > 0$

Ядро Шварца

$$h^*(z) := \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} z^k$$

является важным представителем класса C . Сформулируем для дальнейших ссылок следующее известное утверждение [1]:

Лемма 2.1. *Если $h \in C$, то $|\{h\}_k| \leq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Только вращения функции h^* в плоскости переменной z удовлетворяют условию $|\{h\}_k| = 2$, $k \in \mathbb{N}$, на классе C .*

Заметим, что класс E_0 состоит только из одной функции $f(z) \equiv 1$, поэтому без ущерба для сути дела можно считать, что $t > 0$. Получим оценки всех тейлоровских коэффициентов функций класса E_t . Справедлива

Теорема 2.1. Пусть $t > 0$, тогда для любой функции $F \in E_t$ имеют место точные неравенства

$$|\{F\}_n| \leq \frac{2t}{n} \sum_{k=1}^n k \{F_t^*\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1)$$

Равенства имеют место только для вращений функции $F_t^*(z) := e^{th^*(z)}$ в плоскости переменной z .

Доказательство. Покажем сначала, что $\{F_t^*\}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Рассуждаем по индукции. Действительно, из формулы (1.2) следует, что $\{F_t^*\}_1 = 2t\{F_t^*\}_0 > 0$, так как $\{F_t^*\}_0 > 0$. Возьмем произвольный номер n и предположим, что $\{F_t^*\}_k > 0$ при всех $k = 0, \dots, n$, тогда из (1.2) очевидно, что

$$\{F_t^*\}_{n+1} = \frac{2t}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k \{F_t^*\}_{n+1-k} > 0.$$

Стало быть, в силу произвольности n , доказано, что $\{F_t^*\}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Покажем теперь, что $|\{F\}_n| \leq \{F_t^*\}_n$, $n \in \mathbb{N}$, и равенства достигаются только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z . Снова рассуждаем по индукции. Согласно формуле (1.2) и лемме 2.1

$$|\{F\}_1| = t|\{h\}_1|\{F\}_0 \leq 2t\{F\}_0 = 2te^t,$$

причем по лемме 2.1 равенство здесь достигается только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z . Возьмем произвольный номер n и предположим, что точные оценки (2.1) справедливы для $|\{F\}_k|$ при $k = 0, \dots, n$, и равенство достигается только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z , тогда очевидно, что

$$|\{F\}_{n+1}| \leq \frac{t}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k |\{h\}_k| |\{F\}_{n+1-k}| \leq \frac{t}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k \{h^*\}_k \{F_t^*\}_{n+1-k} = \{F_t^*\}_{n+1}.$$

Из второго неравенства понятно, что равенство здесь достигается только на вращениях функции F_t^* в плоскости переменной z . Итак, в силу произвольности n , мы доказали формулу (2.1) и, таким образом, теорема полностью доказана. $\square$

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Из формулы (2.1) ясно, что сколь бы большое положительное действительное число m мы не взяли, найдется положительное действительное число t такое, что $\{F_t^*\}_n > m$. Отсюда следует, что задача об оценке модулей тейлоровских коэффициентов имеет смысл только на классе E_t при фиксированном t , но не на всем классе E .

3. Формулировка гипотезы Кшижа

Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f , генерируемых по формуле

$$f = \frac{1}{F} \quad (3.1)$$

функциями $F \in E$, обозначим через B . Формула (3.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами B и E .

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [2], что если $f \in B$, то для ее тейлоровских коэффициентов $\{f\}_n$ справедливы неравенства

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается на функциях вида $e^{i\psi} f_1^*(e^{i\varphi} z^n)$, где $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$,

$$f_t^*(z) := e^{-th^*(z)}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B мы будем называть проблемой Кшижа.

В настоящее время гипотеза Кшижа доказана для первых шести тейлоровских коэффициентов включительно. Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [3]. Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает сложности с 1943 года [1]. Кшиж сформулировал обсуждаемую здесь гипотезу, полагаясь на оценки модулей первых двух коэффициентов. Доказательство для случая $n = 3$ впервые было опубликовано в 1977 году в работе Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [4]. Для случая $n = 4$ упомянем доказательство В. Шапеля [5]. Впервые оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [6]. Автор данной статьи в работе [7] при помощи метода Шапеля получил оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e + 0.00116077$, а в работе [8] оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e$ численным методом.

Фиксируем номер n . Существование экстремалей в проблеме Кшижа очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе (в топологии локально равномерной сходимости) семейство функций, а функционал, ставящий каждой функции из B ее тейлоровский коэффициент с номером n , является непрерывным на B .

Фиксируем $t > 0$. Класс, состоящий из голоморфных в Δ функций f , генерируемых по формуле (3.1) из функций $F \in E_t$, обозначим через B_t . Заметим, что B_t является компактным в себе семейством функций.

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geq 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t .

4. Еще одна формула для коэффициентов

В классах B_t проблема оценки модулей коэффициентов существенно сложнее, чем в классах E_t . Подтверждением сказанного служит хотя бы тот факт, что за полвека ни одна попытка ее полного решения не увенчалась успехом.

Из формул (0.1) и (3.1) следует, что для любой $f \in B_t$ найдется $h \in C$, такая, что $f(z) = e^{-th(z)}$. Продифференцировав это равенство по z , приходим к формуле, аналогичной (1.2) для класса B_t , $t > 0$:

$$\{f\}_0 = e^{-t}, \quad \{f\}_n = -\frac{t}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{f\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Видимо, впервые формула, аналогичная (1.2) и (4.1), появилась в статье [9], где в частности получены точные оценки $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$ на классах B_t , $t > 0$. Формула (4.1)

позволяет решить проблему Кшижа, если $\{h\}_k = 0$ или $\{f\}_k = 0$ при некоторых k . В работе [10] с помощью формулы (4.1) обобщены некоторые частные случаи, описанные в более ранних работах. Соответствующие ссылки см. в [10].

5. Функции, ограниченные по модулю сверху и снизу

Формула (4.1) не применима в классах B_t для получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов даже при малых и при больших значениях t . Например, при больших значениях параметра t начальные коэффициенты $\{f_t^*\}_k$, где $k = 1, \dots, n$, функции f_t^* являются знакопеременными (напомним, что $\{h^*\}_k$ положительны); при этом начальные коэффициенты $(-1)^k \{f_t^*\}_k$, $k = 1, \dots, n$, функции $f_t^*(-z)$ являются неотрицательными, а коэффициенты $(-1)^k \{h^*\}_k$ функции $h^*(-z)$ являются знакопеременными. Здесь $n = n(t)$.

С другой стороны, так как в классах E_t такой проблемы нет, то резонно обратить внимание на то, как обстоят дела в подклассах класса E_t , состоящих из функций, ограниченных сверху по модулю. Дело в том, что с точностью до мультипликативной константы каждый ограниченный подкласс класса E_{t_1} является подклассом некоторого класса B_{t_2} , что позволяет легко переносить коэффициентные оценки между упомянутыми подклассами. Например, если $r > 1$ и голоморфная функция F отображает круг Δ в кольцо $K_{1,r} := \{z : 1 < |z| < r\}$, а ноль в e^{t_1} , то $f \in B_{t_2}$, где $f(z) := F(z)/r$, а $t_2 := \ln r - t_1$.

Вообще, можно взять действительные числа ρ и r , удовлетворяющие неравенствам $0 < \rho < r$, и рассмотреть множество $A_{\rho,r}$ всех голоморфных функций, удовлетворяющих неравенствам $\rho \leq |f(z)| \leq r$, $z \in \Delta$. Ясно, что если $f \in A_{\rho,r}$, то $f \in \rho \cdot E$ и $f \in r \cdot B$. Р. Эрмерс в [11, с. 31] получила точные оценки модулей первых двух коэффициентов на классе функций $A_{\rho,r}$, зависящие от ρ и r . Заметим, что $A_{\rho,r}$ является компактным в себе семейством функций.

Пусть $0 < \rho < 1$. Формула (3.1) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $A_{\rho,1}$ и $A_{1,\frac{1}{\rho}}$, где $f \in A_{\rho,1}$ а $F \in A_{1,\frac{1}{\rho}}$. Формула

$$f = \rho F,$$

где $f \in A_{\rho,1}$, а $F \in A_{1,\frac{1}{\rho}}$, также устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классами $A_{\rho,1}$ и $A_{1,\frac{1}{\rho}}$.

Пусть $s > 0$. Рассмотрим класс A_{e^{-s},e^s} . Ясно, что формула (3.1) задает автоморфизм на A_{e^{-s},e^s} .

6. Подчиненные функции

Пусть функции F и f голоморфны в Δ . Функция f называется подчиненной в Δ для функции F , если она может быть представлена в Δ в форме $f(z) = F(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$, а Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω , таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad z \in \Delta, \quad \omega(0) = 0.$$

Функцию $F(z)$ будем называть мажорантой для $f(z)$ в Δ . Ясно, что $\{f\}_0 = \{F\}_0$.

Понятие подчинения восходит к Е. Линдедефу [12]. Современная терминология была введена позже Д. И. Литлвудом [13] и В. Рогозинским [1], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [4,5,7,14,15]).

В случае проблемы Кшижа трудность применения этого метода заключается в нерегулярном поведении коэффициентов $\{f_t^*\}_k$ функции f_t^* при промежуточных значениях параметра t . Значения считаются промежуточными, если t принадлежит некоторому интервалу, содержащему число 2. Длина этого интервала зависит от k и увеличивается с ростом k (см. [14]).

Теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $f(z)$, подчиненных функции $F(z)$. Пусть M_F — класс, состоящий из функций $f(z) = F(\omega(z))$, где F — голоморфная в Δ функция, а $\omega \in \Omega_0$. Имеют место следующие теоремы [1]:

Теорема 6.1. *Если $f \in M_F$, то*

$$|\{f\}_1| \leq |\{F\}_1|, \quad (6.1)$$

причем оценка (6.1) точная, и равенство в неравенстве (6.1) достигается только на вращениях функции $F(z)$ в плоскости переменной z .

Теорема 6.2. *Если $f \in M_F$, то*

$$|\{f\}_2| \leq \max(|\{F\}_1|, |\{F\}_2|), \quad (6.2)$$

причем оценка (6.2) точная, и равенство в неравенстве (6.2) достигается только на вращениях функций $F(z)$ или $F(z^2)$ в плоскости переменной z .

7. Подклассы функций, ограниченных по модулю сверху и снизу

Во введении мы рассмотрели класс Каратеодори C . Для каждого $t > 0$ определим класс C_t с помощью формулы $C_t := t \cdot C$. Другими словами, при фиксированном t , класс C_t есть множество функций h с нормировкой $h(0) = t$, отображающих единичный круг Δ в правую полуплоскость Π .

Пусть $s > 0$, а $t \in (0, s)$. Определим класс $C_{s,t}$ как подмножество функций из C_t , отображающих Δ в полосу $\Pi_s := \{v \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} v < s\}$.

Утверждение 7.1. *Функция*

$$h_{s,t}^*(z) := i \frac{s}{\pi} \ln \frac{1 - e^{i \frac{\pi}{s} t} z}{e^{i \frac{\pi}{s} t} - z}$$

является конформным отображением Δ на Π_s с действительными тейлоровскими коэффициентами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение $w = i \frac{\pi}{s} v$ переводит вертикальную полосу Π_s в горизонтальную полосу $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$. При этом ось абсцисс переходит в ось ординат, в частности: $0 \mapsto 0$, $t \mapsto i \frac{\pi}{s} t$, $s \mapsto i\pi$.

Отображение $x = e^w$ переводит нашу горизонтальную полосу в верхнюю полуплоскость. При этом ось ординат переходит в верхнюю единичную полуокружность, в частности: $0 \mapsto 1$, $i \frac{\pi}{s} t \mapsto e^{i \frac{\pi}{s} t}$, $i\pi \mapsto -1$.

Отображение $y = \frac{e^{i \frac{\pi}{s} t} + 1}{e^{i \frac{\pi}{s} t} - 1} \frac{x-1}{x+1}$ переводит верхнюю полуплоскость в правую полуплоскость. При этом верхняя единичная полуокружность переходит в ось абсцисс, в частности: $1 \mapsto 0$, $e^{i \frac{\pi}{s} t} \mapsto 1$, $-1 \mapsto \infty$.

Наконец отображение $z = \frac{y-1}{y+1}$ переводит нашу правую полуплоскость в Δ . При этом ось абсцисс переходит в ось абсцисс, в частности: $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto 0$, $\infty \mapsto 1$.

Искомое отображение $v = h_{s,t}^*(z)$ построим как композицию отображений, обратных к упомянутым.

Как видно из проведенных построений, отображение $h_{s,t}^*$ переводит отрезок $[-1, 1]$ в отрезок $[0, s]$, в частности: $-1 \mapsto 0$, $0 \mapsto t$, $1 \mapsto s$. Поскольку $h_{s,t}^*$ переводит $[-1, 1]$ в $[0, s]$, то мы можем рассматривать $h_{s,t}^*$ как действительнзначную функцию действительной переменной, стало быть и ее тейлоровское разложение имеет действительные коэффициенты. $\square$

Заметим, что

$$h_{s,t}^*(z) = t + 2 \frac{s}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k \frac{\pi}{s} t\right)}{k} z^k. \quad (7.1)$$

Пусть $0 < t < s$. Рассмотрим множество $A_{1,e^s,t}$ всех голоморфных функций f класса A_{1,e^s} с нормировкой $f(0) = e^t$. Отметим, что $A_{1,e^s,t}$ является компактным в себе семейством функций. Ясно, что

$$f_{s,t}^*(z) := e^{h_{s,t}^*(z)}$$

является мажорирующей функцией на классе $A_{1,e^s,t}$. Поэтому, согласно [1], для любой функции f из класса $A_{1,e^s,t}$ найдется отображение $\omega \in \Omega_0$ такое, что

$$f(z) = f_{s,t}^*(\omega(z)). \quad (7.2)$$

Поскольку класс A_{1,e^s} инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w , то без уменьшения общности можно ограничиться изучением подкласса функций, для которых $f(0) > 1$. Изучение класса A_{1,e^s} также не уменьшает общности, так как для любых ρ и r таких, что $0 < \rho < r$, имеем, что $A_{\rho,r} = \rho \cdot A_{1,\frac{r}{\rho}}$ ($s = \ln r - \ln \rho > 0$).

Из формулы (7.2) следует, что если $f \in A_{1,e^s}$, то

$$f(z) = e^{h(z)}, \quad h \in C_{s,t}. \quad (7.3)$$

По аналогии с выводом формулы (1.2) из (7.3) получаем, что

$$\{f\}_0 = e^t, \quad \{f\}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{f\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7.4)$$

в частности, подставив $\{h_{s,t}^*\}_k$ из формулы (7.1) в формулу (7.4), имеем

$$\{f_{s,t}^*\}_0 = e^t, \quad \{f_{s,t}^*\}_n = \frac{2s}{n\pi} \sum_{k=1}^n \sin\left(k \frac{\pi}{s} t\right) \{f_{s,t}^*\}_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.5)$$

Вычисления по формуле (7.5) дают

$$f_{s,t}^*(z) = e^t + 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) z + \frac{s}{\pi} e^t \left(2 \frac{s}{\pi} \sin^2\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \sin\left(2 \frac{\pi}{s} t\right)\right) z^2 + \dots \quad (7.6)$$

8. Точная оценка первого коэффициента

Теорема 8.1. Если $s > 0$, а $f \in A_{1,es}$, то

$$|\{f\}_1| \leq 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}}, \quad (8.1)$$

причем оценка (8.1) точная, и равенство в неравенстве (8.1) достигается только на вращениях функции f_{s,t_1}^* в плоскости переменной z , где $t_1 = s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}$.

Более того, если $0 < t < s$ и $f \in A_{1,e^s,t}$, то

$$|\{f\}_1| \leq 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right), \quad (8.2)$$

причем оценка (8.2) точная, и равенство в неравенстве (8.2) достигается только на вращениях функции $f_{s,t}^*$ в плоскости переменной z .

Доказательство. По теореме 6.1 справедливо неравенство $|\{f\}_1| \leq |\{f_{s,t}^*\}_1|$. Теорема 6.1 также содержит описание множества функций f , для которых достигается равенство $|\{f\}_1| = |\{f_{s,t}^*\}_1|$. По формуле (7.6) имеем $\{f_{s,t}^*\}_1 = 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right)$. Заметив, что $\{f_{s,t}^*\}_1 > 0$ при $t \in (0, s)$, мы получим формулу (8.2). Таким образом, второе утверждение нашей теоремы полностью доказано.

Докажем теперь справедливость формулы (8.1). Для этого исследуем функцию

$$g_1(t) := 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right)$$

на максимум на интервале $(0, s)$. Имеем: $g_1(t) \geq 0$, $t \in [0, s]$, $g_1(0) = g_1(s) = 0$ и

$$g_1'(t) = 2 \frac{s}{\pi} e^t \left(\sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \frac{\pi}{s} \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) \right).$$

Уравнение $g_1'(t) = 0$ равносильно уравнению

$$\sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \frac{\pi}{s} \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) = 0. \quad (8.3)$$

Поделив это уравнение на $\cos\left(\frac{\pi}{s} t\right)$, мы получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \frac{\pi}{s} = 0.$$

(Заметим, что $\cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) = 0$ при $t_k = s/2 + sk$, $k \in \mathbb{Z}$. Поскольку $0 < t_k < s$, то нам подходит только $t_0 = s/2$, которое не является корнем уравнения (8.3)). Решая уравнение (8.3), найдем, что

$$t_k = sk - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются стационарными точками функции g_1 . В нашем случае $0 < t < s$, поэтому

$$t_1 = s - \frac{s}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{s}$$

есть единственное подходящее решение уравнения (8.3) (так как только $0 < t_1 < s$). Далее, t_1 является точкой максимума для функции g_1 , поскольку

$$g_1''(t_1) = -2e^{t_1} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}} < 0.$$

Наконец

$$g_1(t_1) = 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}},$$

поэтому оценка (8.1) справедлива. Случаи равенства в неравенстве (8.1) уже были рассмотрены в первой части доказательства. $\square$

9. Точная оценка второго коэффициента

Имеет место следующий результат [11]:

Теорема 9.1. Если $s > 0$, $t \in (0, s)$, а $f \in A_{1,es}$, то

$$|\{f\}_2| \leq 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}}, \quad (9.1)$$

равенство в неравенстве (9.1) достигается только на вращениях функции $f_{s,t_1}^*(z^2)$ в плоскости переменной z , где $t_1 = s - \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}$.

Дополним этот результат для класса $A_{1,es}$, получив оценку $|\{f\}_2|$ на его подклассах $A_{1,es,t}$, $0 < t < s$:

Теорема 9.2. Если $f \in A_{1,es,t}$, $0 < t < s$, то

$$|\{f\}_2| \leq \begin{cases} 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right), & 0 < t \leq t_1, \\ 2 \frac{s}{\pi} e^t \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) \left(\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right)\right), & t_1 < t < s, \end{cases} \quad (9.2)$$

где $t_1 = s - 2 \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}$. При $0 < t < t_1$ равенство в (9.2) достигается только на вращениях функции $f_{s,t}^*(z^2)$ в плоскости переменной z . При $t = t_1$ равенство достигается только на вращениях функций $f_{s,t}^*(z^2)$ и $f_{s,t}^*(z)$. При $t_1 < t < s$ равенство в (9.2) достигается только на вращениях функции $f_{s,t}^*(z)$ в плоскости переменной z .

Доказательство. По теореме 6.2 для доказательства этого утверждения достаточно найти значения t , при которых $|\{f_{s,t}^*\}_1| > |\{f_{s,t}^*\}_2|$.

1. Неравенство $\{f_{s,t}^*\}_1 \geq \{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < s$ равносильно неравенству

$$\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s} t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s} t\right) \leq 1.$$

Соответствующее уравнение имеет следующие решения

$$t_k = \frac{s}{\pi} ((-1)^k - 1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}} + sk, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Условию $0 < t_k < s$ удовлетворяет только решение t_1 . Таким образом, $\{f_{s,t}^*\}_1 > \{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < t_1$, где

$$t_1 = s - 2 \frac{s}{\pi} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}}.$$

2. Неравенство $\{f_{s,t}^*\}_1 \geq -\{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < s$ равносильно неравенству

$$\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s}t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{s}t\right) \geq -1.$$

Соответствующее уравнение имеет следующие решения

$$t_k = \frac{s}{\pi}((-1)^{k+1} - 1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\pi^2}}} + sk, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ни одно из которых не удовлетворяет условию $0 < t_k < s$. Итак, $\{f_{s,t}^*\}_1 > -\{f_{s,t}^*\}_2$ при $0 < t < s$.

Таким образом, мы показали, что $|\{f_{s,t}^*\}_1| > |\{f_{s,t}^*\}_2|$ при $0 < t < t_1$, то есть формула (9.2) справедлива. $\square$

Заключение

В этой статье мы рассмотрели классы E и B , а также их подклассы, которые генерируются из классов $A_{\rho,r}$, $0 < \rho < r < +\infty$. Интересно, что $A_{\rho,1} \rightarrow B$ при $\rho \rightarrow 0$, а $A_{1,r} \rightarrow E$ при $r \rightarrow \infty$. Как было показано выше, формулы типа (1.2) не могут быть использованы даже на классах $A_{1,r} \subset E$ для получения точных оценок коэффициентов при $n \geq 2$. С другой стороны, классы $A_{\rho,r}$ имеют больше алгебраических свойств, чем, например, класс B , что можно использовать для изучения класса B .

Кшиж выдвинул свою гипотезу [2], располагая только оценками модулей первых двух коэффициентов на классе B , поэтому (имея теоремы 8.1 и 9.1) мы можем выдвинуть следующее предположение: если $f \in A_{1,e^s}$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2 \frac{e^{s - \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9.3)$$

причем равенство в неравенстве (9.3) достигается только на вращениях функции $f_{s,t_1}^*(z^n)$ в плоскостях переменных z и w ($w = f(z)$), где $t_1 = s - \frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}$.

Заметим, что при любом $s > 0$ множество $e^{-s}A_{1,e^s}$ является подклассом класса B , и оценка (9.3) для класса $e^{-s}A_{1,e^s}$ при $s \rightarrow \infty$ переходит в оценку

$$|\{f\}_n| \leq \frac{2}{e},$$

то есть высказанное только что предположение в пределе дает гипотезу Кшижа. Действительно, при $s \rightarrow \infty$ имеем $e^{-s}A_{1,e^s} \rightarrow B$, а

$$2 \frac{e^{-\frac{s}{\pi} \arctg \frac{\pi}{s}}}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{s^2}}} \rightarrow \frac{2}{e}.$$

Фиксируем $t > 0$. Так как при $s > t$ множество $e^{-s}A_{1,e^s,s-t} \subset B_t$ и $e^{-s}A_{1,e^s,s-t} \rightarrow B_t$ при $s \rightarrow \infty$, то после перехода в теореме 8.1 к пределу при $s \rightarrow \infty$ получим следующий известный результат [4, 9]:

Теорема 9.3. *Если $f \in B$, то $|\{f\}_1| \leq 2/e$, причем равенство достигается только на вращениях функции f_1^* в плоскости переменной z . Более того, если $f \in B_t$, то $|\{f\}_1| \leq 2te^{-t}$, причем равенство достигается только на вращениях функции f_t^* в плоскости переменной z .*

Аналогично, после перехода в теоремах 9.1 и 9.2 к пределу при $s \rightarrow \infty$ получим еще один известный результат [4, 9]:

Теорема 9.4. *Если $f \in B$, то $|\{f\}_2| \leq 2/e$, причем равенство достигается только на вращениях функции $f_1^*(z^2)$ в плоскости переменной z . Если $f \in B_t$, то*

$$|\{f\}_2| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & 0 < t \leq 2, \\ t-1, & 2 < t < s. \end{cases}$$

При $0 < t < 2$ равенство достигается только на вращениях функции $f_t^*(z^2)$ в плоскости переменной z . При $t = 2$ равенство достигается только на вращениях функций $f_t^*(z^2)$ и $f_t^*(z)$. При $t > 2$ равенство достигается только на вращениях функции $f_t^*(z)$ в плоскости переменной z .

Фиксируем $t > 0$, $s > t$ и $f \in A_{1,e^s,t}$. По формуле (7.4) при $n = 1$ имеем

$$|\{f\}_1| \leq \{h_{s,t}^*\}_1 \cdot \{f_{s,t}^*\}_0 = 2\frac{s}{\pi}e^t \sin\left(\frac{\pi}{s}t\right),$$

причем эта оценка точная, так как равенство в ней достигается, например, при $f = f_{s,t}^*$ (сравните с оценкой (8.2)). Уже при $n \geq 2$ из формулы (7.4) при помощи неравенства треугольника невозможно получить точную оценку для $|\{f\}_n|$. Тем не менее, мы можем получить грубую оценку:

$$|\{f\}_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \{h\}_k \{f\}_{n-k} \right| \leq \frac{2s}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s}t\right) \sum_{k=0}^{n-1} k m_k, \quad (9.4)$$

где

$$m_0 := \{f_{s,t}^*\}_0, \quad m_1 := \{f_{s,t}^*\}_1, \quad m_k := \max_{f \in A_{1,e^s,t}} |\{f\}_k|, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Заметим, что если $h \in C_{s,t}$, то

$$|\{h\}_k| \leq \{h_{s,t}^*\}_1 = 2\frac{s}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{s}t\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

но в отличие от класса C в $C_{s,t}$ нет функции, все коэффициенты которой равны $\{h_{s,t}^*\}_1$.

Фиксируем $t > 0$. Поскольку при любом $s > t$ множество $A_{1,e^s,t} \subset E_t$ и $A_{1,e^s,t} \rightarrow E_t$ при $s \rightarrow \infty$, то после перехода в неравенстве (9.4) к пределу при $s \rightarrow \infty$ получим теорему 2.1.

References

- [1] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s2-48**, 1945, 48–82.
- [2] J. G. Krzyz, “Coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *Ann. Polon. Math*, **70** (1968), 314.
- [3] V. I. Levin, “Lösing der Aufgabe 163”, *Jahresber. DM*, **44:2** (1934), 80–81.
- [4] J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman, “A coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *J.d’Analyse Mathematique*, **31** (1977), 169–190.
- [5] W. Szapiel, “A new approach to the Krzyz conjecture”, *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A.*, **48** (1994), 169–192.

- [6] N. Samaris, “A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient”, *Compl. Var. Theory and Appl.*, **48**:9 (2003), 753–766.
- [7] Д. Л. Ступин, “Один метод оценки модулей тейлоровских коэффициентов подчиненных функций”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, 2024, № 2, 71–84. [D. L. Stupin, “One method of estimation of moduli of taylor coefficients of subordinated functions”, *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, № 2, 71–84 (In Russian)].
- [8] Д. Л. Ступин, “Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций”, *Вестник российских университетов. Математика*, **29**:145 (2024), 98–120. [D. L. Stupin, “A new method of estimation of moduli of initial Taylor coefficients on the class of bounded non-vanishing functions”, *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 98–120 (In Russian)].
- [9] И. М. Гальперин, “Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций”, *УМН*, **20**:1(121) (1965), 197–202. [I. M. Gal’perin, “Some estimates for functions bounded in the unit circle”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **20**:1(121) (1965), 197–202 (In Russian)].
- [10] M. J. Martin, E. T. Sawyer, I. Uriarte-Tuero, D. Vukotic, “The Krzyz conjecture revisited”, *Advances in Mathematics*, **273** (2015), 716–745.
- [11] R. Ermers, *Coefficient Estimates for Bounded Nonvanishing Functions*, Wibro Dissertatiedrukkerij, Helmond, 1990.
- [12] E. Lindelöf, “Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel”, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**:7 (1909), 1–35.
- [13] J. E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1947.
- [14] R. Peretz, “Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions”, *Compl. Var.*, **17**:3–4 (1992), 213–222.
- [15] D. L. Stupin, “The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz’s problem”, 2011, arXiv: [abs/1104.3984](https://arxiv.org/abs/1104.3984).

Информация об авторе

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики и цифровых технологий, Тверской государственный университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Конфликт интересов отсутствует.

Поступила в редакцию 20.10.2025 г.
Поступила после рецензирования 04.02.2026 г.
Принята к публикации 12.03.2026 г.

Information about the author

Denis L. Stupin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Fundamental Mathematics and Digital Technologies Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: dstupin@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

There is no conflict of interests.

Received 20.10.2025
Reviewed 04.02.2026
Accepted for press 12.03.2026

SCIENTIFIC ARTICLE

© T. El Krouk, A. El Amrani, M. Rossafi, 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-86-99>

Continuous Γ -frames and continuous Γ -Riesz basis in Hilbert C^* -modules

T. EL KROUK¹, A. EL AMRANI¹, M. ROSSAFI²

¹ Faculty of Sciences Dhar El Mahraz,
Sidi Mohamed Ben Abdellah University
B.P. 1796, Fez-Atlas 30003, Morocco

² Laboratory of Analysis, Geometry and Applications
Higher School of Education and Training, Ibn Tofail University
B.P. 242, Kenitra 14000, Morocco

Abstract. In this paper, we introduce and extend important results concerning continuous Γ -frames and continuous Γ -Riesz basis, originally established in Hilbert spaces, to a Hilbert $\mathcal{B}$ -module $\mathcal{E}$ over a C^* -algebra $\mathcal{B}$. We provide a characterization of a continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ via a condition on a Bessel sequence $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ for $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ and a standard orthonormal basis $\{\eta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ of $\mathcal{E}$. Furthermore, we investigate their fundamental properties and offer characterizations of continuous Γ -Riesz basis via conditions on the corresponding synthesis operator $T_{\mathcal{C}}$.

Keywords: continuous Γ -frame, continuous Γ -Riesz basis, C^* -algebra, Hilbert $\mathcal{B}$ -module

Mathematics Subject Classification: 43A80, 57S15.

For citation: El Krouk T., El Amrani A., Rossafi M. Continuous Γ -frames and continuous Γ -Riesz basis in Hilbert C^* -modules. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **31**:153 (2026), 86–99. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-86-99>

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Эль Крук Т., Эль Амрани А., Россафи М., 2026

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-86-99>

УДК 512.816



Непрерывные Γ -фреймы и непрерывные Γ -базисы Рисса в гильбертовых C^* -модулях

Тахар ЭЛЬ КРУК¹, Абдельхалек ЭЛЬ АМРАНИ¹, Мохамед РОССАФИ²¹ Факультет естественных наук Дхар Эль Махраз,
университет Сиди Мохамеда Бен Абделлаха

В.Р. 1796, г. Фес-Атлас 30003, Марокко

² Лаборатория анализа, геометрии и приложений

высшая школа образования и профессиональной подготовки, университет Ибн Тофаила

В.Р. 242, г. Кенитра 14000, Марокко

Аннотация. В данной работе мы вводим и расширяем важные результаты, касающиеся непрерывных Γ -фреймов и непрерывных Γ -базисов Рисса, изначально установленные в гильбертовых пространствах, на гильбертов модуль $\mathcal{E}$ над C^* -алгеброй $\mathcal{B}$. Мы даем характеристику непрерывного Γ -фрейма $\mathcal{C}$ с помощью условия на последовательность Бесселя $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ в пространстве $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ и стандартного ортонормированного базиса $\{\eta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ в $\mathcal{E}$. Также мы исследуем их основные свойства и приводим характеристики непрерывного Γ -базиса Рисса через условия на соответствующий оператор синтеза $T_{\mathcal{C}}$.

Ключевые слова: непрерывный Γ -фрейм, непрерывный Γ -базис Рисса, C^* -алгебра, гильбертов $\mathcal{B}$ -модуль

Для цитирования: Эль Крук Т., Эль Амрани А., Россафи М. Непрерывные Γ -фреймы и непрерывные Γ -базисы Рисса в гильбертовых C^* -модулях // Вестник российских университетов. Математика. 2026. Т. 31. № 153. С. 86–99. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2026-31-153-86-99>

Introduction

The theory of continuous frames was initially introduced in Hilbert spaces by Kaiser and Hudgins in [1], and was further developed by Ali, Antoine, and Gazeau in [2]. This theory generalizes the classical notion of frames by using the concepts of measurement spaces. The concept of frames itself is a generalization of a basis in Hilbert spaces, originally introduced by Duffin and Schaeffer in 1952 in their study of nonharmonic Fourier series [3]. This concept was motivated by applications in distributed signal processing, image processing, operator theory, harmonic analysis, wireless communications and many other fields.

For more information on frames and continuous frames in Hilbert spaces, we refer the reader to [4, 5].

Arefijamaal, Kamyabi Gol, Raisi Tousi and Tavalaei introduced and studied the concept of a continuous Riesz basis in [6], as a generalization of the classical Riesz basis in Hilbert spaces.

For a bounded linear operator Γ in a separable Hilbert space, frames for operators, also known as Γ -frames, generalize ordinary frames. These were introduced by Gavruta in [7], to study atomic decomposition systems. In [8], Rahimlou, Ahmadi, Jafarizadeh and Nami extended the theory of continuous frames to continuous Γ -frames. Some properties of continuous Γ -frames have been studied in [9, 10].

The concept of continuous Γ -Riesz basis in Hilbert spaces was introduced by Shekari and Abdollahpour in [9].

The notion of Hilbert $\mathcal{B}$ -modules was introduced in [11], and some of their properties were studied in [12]. Hilbert $\mathcal{B}$ -modules are considered a generalization of Hilbert spaces, as they allow the inner product to take values in a C^* -algebra. Studying the theory of frames in Hilbert $\mathcal{B}$ -modules is important due to their distinct characteristics, which differentiate them from Hilbert spaces. For instance, in general, every bounded operator on a Hilbert space has a unique adjoint, whereas this is not necessarily the case for bounded operators on a Hilbert $\mathcal{B}$ -module.

The concept of continuous frames in Hilbert $\mathcal{B}$ -module was introduced and investigated in [13, 14], and the concept of frames, Γ -frames and Γ -Riesz basis in Hilbert $\mathcal{B}$ -module were further developed in [15–17] and [18].

In this paper, we introduce the notions of continuous Γ -frames and continuous Γ -Riesz basis in a Hilbert $\mathcal{B}$ -module, which generalize the corresponding concepts in Hilbert spaces introduced by Shekari and Abdollahpour [9]. We also establish several related results.

This article is organized as follows: In Section 2, we review fundamental definitions and notations related to Hilbert $\mathcal{B}$ -modules, Γ -frames, and continuous frames in Hilbert $\mathcal{B}$ -modules. In Section 3, we define and establish some properties of a continuous Γ -frame $\mathcal{C}$. Furthermore, we provide a characterization of a continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ via a condition on a Bessel sequence $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ for $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ and a standard orthonormal basis $\{\eta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ of $\mathcal{E}$. In Section 4, we introduce and characterize the concept of continuous Γ -Riesz basis in Hilbert $\mathcal{B}$ -modules. Moreover, we establish a result concerning the properties of the associated synthesis operator $T_{\mathcal{C}}$.

1. Preliminaries

In this section, we start with some preliminary definitions and lemmas that will be used in this paper.

Definition 1.1. [16, Definition 2.45] Let $\mathcal{B}$ be a unitary C^* -algebra and $\mathcal{E}$ be a left $\mathcal{B}$ -module such that the linear structures of $\mathcal{B}$ and $\mathcal{E}$ are compatible. $\mathcal{E}$ is a pre-Hilbert $\mathcal{B}$ -module if $\mathcal{E}$ is equipped with an $\mathcal{B}$ -valued inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{B}} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ such that

- (i) For all $\xi \in \mathcal{E}$, $\langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{B}} \geq 0$, and $\langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{B}} = 0$ if and only if $\xi = 0$.
- (ii) $\langle a\xi + \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{B}} = a\langle \xi, \xi_2 \rangle_{\mathcal{B}} + \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{\mathcal{B}}$, for all $a \in \mathcal{B}$ and $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathcal{E}$.
- (iii) $\langle \xi, \xi_1 \rangle_{\mathcal{B}} = \langle \xi_1, \xi \rangle_{\mathcal{B}}^*$, for all $\xi, \xi_1 \in \mathcal{E}$.

For $\xi \in \mathcal{E}$, we define $\|\xi\| = \|\langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{B}}\|_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$. If $\mathcal{E}$ is complete with $\|\cdot\|$, it is called a Hilbert $\mathcal{B}$ -module or a Hilbert C^* -module over $\mathcal{B}$. For every a in C^* -algebra $\mathcal{B}$, we have $|a| = (a^*a)^{\frac{1}{2}}$ and the $\mathcal{B}$ -valued norm on $\mathcal{E}$ is defined by $|\xi| = \langle \xi, \xi \rangle_{\mathcal{B}}^{\frac{1}{2}}$ for $\xi \in \mathcal{E}$.

Definition 1.2. [16, Definition 2.53] Let $\mathcal{E}_1$ and $\mathcal{E}_2$ be two Hilbert $\mathcal{B}$ -modules, a map $\Gamma : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2$ (a priori neither linear nor bounded) is said to be *adjointable* if there exists a map $\Gamma^* : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_1$ such that $\langle \Gamma\xi, \xi_1 \rangle_{\mathcal{B}} = \langle \xi, \Gamma^*\xi_1 \rangle_{\mathcal{B}}$ for all $\xi \in \mathcal{E}_1$ and $\xi_1 \in \mathcal{E}_2$.

From now on, we assume that Θ is a finite or countable index set, $\mathcal{B}$ is a unital C^* -algebra, and that $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$, and $\mathcal{E}_2$ are Hilbert $\mathcal{B}$ -modules. We denote by $\text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ the set of all adjointable maps from $\mathcal{E}_1$ to $\mathcal{E}_2$, and $\text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1)$ is abbreviated to $\text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E}_1)$.

Let $l^2(\mathcal{B})$ be the Hilbert $\mathcal{B}$ -module defined by

$$l^2(\mathcal{B}) = \left\{ \{\alpha_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta} \subseteq \mathcal{B} : \sum_{\kappa \in \Theta} \alpha_{\kappa} \alpha_{\kappa}^* \text{ converge in } \|\cdot\|_{\mathcal{B}} \right\},$$

with $\mathcal{B}$ -valued inner product $\langle \{\alpha_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta}, \{\beta_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta} \rangle = \sum_{\kappa \in \Theta} \alpha_{\kappa} \beta_{\kappa}^*$, for all $\{\alpha_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta}, \{\beta_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta} \in l^2(\mathcal{B})$.

We now define the Hilbert $\mathcal{B}$ -module $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, where $(\mathcal{X}, \mu)$ is a measure space.

Definition 1.3. [13, Definition 2.1] Let $(\mathcal{X}, \mu)$ be a measure space. We define,

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}) = \left\{ \psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}, \int_{\mathcal{X}} \|\psi(\sigma) \psi(\sigma)^*\| d\mu(\sigma) < \infty \right\}.$$

For any $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, the inner product is defined by $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \langle \varphi(\sigma), \psi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma)$ and the norm is defined by $\|\psi\| = \|\langle \psi, \psi \rangle\|^{\frac{1}{2}}$. It was shown in [19] that $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ is a Hilbert $\mathcal{B}$ -module.

We have the following definition of a Γ -frame.

Definition 1.4. [17, Definition 2.8] For $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$, a sequence $\{\xi_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta}$ in $\mathcal{E}$ is called a Γ -frame if there exist constants $A, B > 0$ such that for each $\xi \in \mathcal{E}$,

$$A \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \xi_{\kappa} \rangle \langle \xi_{\kappa}, \xi \rangle \leq B \langle \xi, \xi \rangle. \quad (1.1)$$

The numbers A and B are called *lower* and *upper* bound of the frame, respectively. If only upper inequality of (1.1) hold, then $\{\xi_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta}$ is called a Bessel sequence for $\mathcal{E}$.

We define the synthesis operator for a Bessel sequence $\{\xi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ as:

$$U : l^2(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}, \quad U(\{\alpha_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}) = \sum_{\kappa \in \Theta} \alpha_\kappa \xi_\kappa. \quad (1.2)$$

Lemma 1.1. [16, Proposition 3.11] $\{\xi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is a Bessel sequence for $\mathcal{E}$ with bound B , if and only if the operator U defined in (1.2) is a well defined bounded operator with $\|U\| \leq \sqrt{B}$.

Also, we provide the definitions of continuous frame, synthesis operator and frame operator.

Definition 1.5. [13, Definition 2.2] A mapping $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ is called a *continuous frame* for $\mathcal{E}$ if

- (i) $\mathcal{C}$ is weakly-measurable, i. e., for any $\xi \in \mathcal{E}$, the mapping $\mathcal{X} \mapsto \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle$ is measurable on $\mathcal{X}$.
- (ii) There exist constants $A, B > 0$ such that

$$A \langle \xi, \xi \rangle \leq \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B \langle \xi, \xi \rangle, \quad \text{for all } \xi \in \mathcal{E}. \quad (1.3)$$

The mapping $\mathcal{C}$ is called *Bessel* if the right inequality in (1.3) holds and is called *tight* if $A = B$.

Definition 1.6. [13, Definition 2.5] Let $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ be a continuous frame. Then

- (i) The *synthesis operator* or *pre-frame operator* $T_{\mathcal{C}} : \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}$ is weakly defined by

$$\langle T_{\mathcal{C}}\psi, \xi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \psi(\sigma) \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \quad (\xi \in \mathcal{E}).$$

- (ii) The adjoint of $T_{\mathcal{C}}$, called the *analysis operator* $T_{\mathcal{C}}^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ is defined by

$$(T_{\mathcal{C}}^* f)(\sigma) = \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \quad (\sigma \in \mathcal{X}, \xi \in \mathcal{E}).$$

Definition 1.7. [13, Definition 2.6] Let $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ be a continuous frame for $\mathcal{E}$. Then the *frame operator* $S_{\mathcal{C}} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ is weakly defined by

$$\langle S_{\mathcal{C}}(\xi), \xi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \quad (\xi \in \mathcal{E}).$$

The following lemmas are subsequently used to prove several results concerning the synthesis operator $T_{\mathcal{C}}$ and its range $\mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})$.

Lemma 1.2. [13, Theorem 2.7] Let $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ be a continuous frame for $\mathcal{E}$ with bounds A, B . Then the synthesis operator $T_{\mathcal{C}} : \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{E}$ is well defined, surjective, adjointable map and bounded with $\|T_{\mathcal{C}}\| \leq \sqrt{B}$.

Lemma 1.3. [20, Lemma 1.1] Let $\mathcal{T} \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Then

- (i) $\mathcal{R}(\mathcal{T})^\perp = N(\mathcal{T}^*)$, $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T})} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{T})^{\perp\perp} = N(\mathcal{T}^*)^\perp$.
- (ii) $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ is closed if and only if $\mathcal{R}(\mathcal{T}^*)$ is closed, and in this case $\mathcal{R}(\mathcal{T})$ and $\mathcal{R}(\mathcal{T}^*)$ are orthogonally complemented with $\mathcal{R}(\mathcal{T}) = N(\mathcal{T}^*)^\perp$ and $\mathcal{R}(\mathcal{T}^*) = N(\mathcal{T})^\perp$.

Lemma 1.4. [20, Theorem 1.1] *Let $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ with $\overline{\mathcal{R}(\mathcal{T}^*)}$ orthogonally complemented. The following statements are equivalent:*

- (i) $\mathcal{R}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{R}(\mathcal{T})$;
- (ii) $\mathcal{S}\mathcal{S}^* \leq \zeta \mathcal{T}\mathcal{T}^*$ for some $\zeta \geq 0$;
- (iii) There exists $Q \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ such that $\mathcal{S} = \mathcal{T}Q$.

2. Continuous Γ -frames in Hilbert $\mathcal{B}$ -modules

We begin by giving the definition of a continuous Γ -frame in Hilbert $\mathcal{B}$ -modules.

Definition 2.1. Let $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ and $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ be weakly measurable. Then the map $\mathcal{C}$ is called a *continuous Γ -frame* for $\mathcal{E}$, if there exist constants $A, B > 0$ such that for each $\xi \in \mathcal{E}$,

$$A\langle \Gamma^*\xi, \Gamma^*\xi \rangle \leq \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B\langle \xi, \xi \rangle.$$

A continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ is called a *Parseval continuous Γ -frame*, whenever for every $\xi \in \mathcal{E}$,

$$\int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) = \langle \Gamma^*\xi, \Gamma^*\xi \rangle.$$

Remark 2.1. $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ with frame bounds A, B and frame operator $S_{\mathcal{C}}$, if and only if $A\Gamma^* \leq S_{\mathcal{C}} \leq B.I$.

And $\mathcal{C}$ is a Parseval continuous Γ -frame, if and only if $S_{\mathcal{C}} = \Gamma\Gamma^*$.

We have the following theorem, which states that when a continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ is left-multiplied by a co-isometry operator S that commutes with Γ , the result $S\mathcal{C}$ remains a continuous Γ -frame.

Theorem 2.1. *Let $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ and $\mathcal{C}$ be a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ and $S \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ be a co-isometry with $S\Gamma = \Gamma S$. Then $S\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$.*

Proof. Let A and B be the lower and upper frame bounds for $\mathcal{C}$. Since S is a co-isometry, we have for each $\xi \in \mathcal{E}$

$$\begin{aligned} A\langle \Gamma^*\xi, \Gamma^*\xi \rangle &= A\langle S^*\Gamma^*\xi, S^*\Gamma^*\xi \rangle = A\langle \Gamma^*S^*\xi, \Gamma^*S^*\xi \rangle \leq \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, S\mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle S\mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \langle S^*\xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), S^*\xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B\langle S^*\xi, S^*\xi \rangle \leq B\|S\|^2\langle \xi, \xi \rangle. \end{aligned}$$

Therefore, $S\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ with frame bounds A and $B\|S\|^2$. $\square$

The following theorem provides a characterization of a Parseval continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ by a standard orthonormal set $\{\psi_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta}$ in $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ and a standard orthonormal basis $\{\eta_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta}$ of $\mathcal{E}$.

Theorem 2.2. *Let $\{\eta_{\kappa}\}_{\kappa \in \Theta}$ be the standard orthonormal basis of $\mathcal{E}$ and let $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ be an invertible operator. Then the following are equivalent:*

- (i) $\mathcal{C}$ is a Parseval continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$;
- (ii) There exists an standard orthonormal set $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ in $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ having the property that $\sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \psi_\kappa(\sigma) < \infty$ for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$ such that $\mathcal{C}(\sigma) = \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \Gamma \eta_\kappa$ holds for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$.

P r o o f. Assume that $\mathcal{C}$ is a Parseval continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$.

We take $\psi_\kappa = T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa)$. Then for all $\kappa, i \in \Theta$, we have

$$\begin{aligned} \langle \psi_\kappa, \psi_i \rangle &= \langle T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa), T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_i) \rangle = \langle T_{\mathcal{C}} T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa), (\Gamma^{-1})^* \eta_i \rangle \\ &= \langle S_{\mathcal{C}}((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa), (\Gamma^{-1})^* \eta_i \rangle = \langle (\Gamma^{-1} \Gamma^* ((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa), \eta_i \rangle = \langle \eta_\kappa, \eta_i \rangle. \end{aligned}$$

Thus, $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is a standard orthonormal set. Also, for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$ we have

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \psi_\kappa(\sigma) &= \sum_{\kappa \in \Theta} [(T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa))(\sigma)]^* [(T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa))(\sigma)] \\ &= \sum_{\kappa \in \Theta} \langle (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \mathcal{C}(\sigma) \rangle^* \langle (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \\ &= \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^{-1} \mathcal{C}(\sigma), \eta_\kappa \rangle \langle \eta_\kappa, \Gamma^{-1} \mathcal{C}(\sigma) \rangle \\ &= \langle \Gamma^{-1} \mathcal{C}(\sigma), \Gamma^{-1} \mathcal{C}(\sigma) \rangle \leq \|\Gamma^{-1}\|^2 \langle \mathcal{C}(\sigma), \mathcal{C}(\sigma) \rangle < \infty, \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \eta_\kappa &= \sum_{\kappa \in \Theta} [(T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa))(\sigma)]^* \eta_\kappa = \sum_{\kappa \in \Theta} \langle (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \mathcal{C}(\sigma) \rangle^* \eta_\kappa \\ &= \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^{-1} \mathcal{C}(\sigma), \eta_\kappa \rangle \eta_\kappa = \Gamma^{-1} \mathcal{C}(\sigma). \end{aligned}$$

So, $\mathcal{C}(\sigma) = \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \Gamma \eta_\kappa$ for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$.

Conversly, if (ii) holds then for any $\xi \in \mathcal{E}$, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) &= \int_{\mathcal{X}} \left\langle \xi, \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* K \eta_\kappa \right\rangle \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* K \eta_\kappa, \xi \right\rangle d\mu(\sigma) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \Gamma \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa(\sigma) \right) \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \Gamma \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa(\sigma) \right)^* d\mu(\sigma) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \Gamma \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa(\sigma), \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \Gamma \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa(\sigma) \right\rangle d\mu(\sigma) \\ &= \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \Gamma \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \Gamma \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa \right\rangle \\ &= \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^* \xi, \eta_\kappa \rangle \langle \eta_\kappa, \Gamma^* \xi \rangle = \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Therefore, $\mathcal{C}$ is a Parseval continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$. □

We have the following remark.

R e m a r k 2.2. Let $\mathcal{C}(\sigma) = \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \xi_\kappa$ where $\{\xi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is a Γ -frame for $\mathcal{E}$ and $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is a standard orthonormal set in $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. Similarly to the proof of (2.1), for all $\xi \in \mathcal{E}$ we have

$$\int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) = \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \xi_\kappa \rangle \langle \xi_\kappa, \xi \rangle.$$

Since $\{\xi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is a Γ -frame for $\mathcal{E}$, then there exist $A, B > 0$ such that

$$A \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \xi, \xi_\kappa \rangle \langle \xi_\kappa, \xi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B \langle \xi, \xi \rangle, \text{ for all } \xi \in \mathcal{E}.$$

Thus $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$.

In general, the following theorem provides a characterization of a continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ via a condition on a Bessel sequence $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ for $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ and a standard orthonormal basis $\{\eta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ of $\mathcal{E}$.

Theorem 2.3. *Let $\{\eta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ be the standard orthonormal basis of $\mathcal{E}$ and let $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ be an invertible operator. Then the following are equivalent:*

- (i) $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$;
- (ii) *There exists a bessel sequence $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ for $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ having the property that U_ψ the synthesis operator for $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is bounded below and $\sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \psi_\kappa(\sigma) < \infty$ for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$, such that $\mathcal{C}(\sigma) = \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \Gamma \eta_\kappa$ holds for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$.*

P r o o f. Assume that $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ with bounds A and B .

We take $\psi_\kappa = T_{\mathcal{C}}^*((\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa)$. Then for all $\psi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \psi, \psi_\kappa \rangle \langle \psi_\kappa, \psi \rangle &= \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \psi, T_{\mathcal{C}}^*(\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \rangle \langle T_{\mathcal{C}}^*(\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \psi \rangle \\ &= \sum_{\kappa \in \Theta} \langle T_{\mathcal{C}} \psi, (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \rangle \langle (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, T_{\mathcal{C}} \psi \rangle \\ &= \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^{-1} T_{\mathcal{C}} \psi, \eta_\kappa \rangle \langle \eta_\kappa, \Gamma^{-1} T_{\mathcal{C}} \psi \rangle = \langle \Gamma^{-1} T_{\mathcal{C}} \psi, \Gamma^{-1} T_{\mathcal{C}} \psi \rangle \leq \|\Gamma^{-1} T_{\mathcal{C}}\|^2 \langle \psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Thus, $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is a bessel sequence for $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$.

And for any $\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \in l^2(\mathcal{B})$, we have

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa \right\rangle &= \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa T_{\mathcal{C}}^*(\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa T_{\mathcal{C}}^*(\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right\rangle \\ &= \left\langle T_{\mathcal{C}}^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right), T_{\mathcal{C}}^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right) \right\rangle \\ &= \int_{\mathcal{X}} \left\langle T_{\mathcal{C}}^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right) (\mathcal{X}), T_{\mathcal{C}}^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right) (\mathcal{X}) \right\rangle d\mu(\sigma) \\ &= \int_{\mathcal{X}} \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \mathcal{C}(\sigma) \right\rangle \left\langle \mathcal{C}(\sigma), \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right\rangle d\mu(\sigma), \end{aligned}$$

since $\mathcal{C}$ is continuous Γ -frame, we have

$$\begin{aligned} A \left\langle \Gamma^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right), \Gamma^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right) \right\rangle &\leq \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa \right\rangle \\ &\leq B \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right\rangle, \end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned} A \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \zeta_\kappa^* &= A \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \eta_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \eta_\kappa \right\rangle \\ &= A \left\langle \Gamma^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right), \Gamma^* \left(\sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right) \right\rangle \leq \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa \right\rangle \\ &\leq B \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa (\Gamma^{-1})^* \eta_\kappa \right\rangle \leq B \|\Gamma^{-1}\|^2 \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \zeta_\kappa^*. \end{aligned}$$

Then

$$A \langle \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}, \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \rangle \leq \langle U_\psi(\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}), U_\psi(\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}) \rangle \leq B \|\Gamma^{-1}\|^2 \langle \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}, \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \rangle,$$

for all $\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \in l^2(\mathcal{B})$. Therefore, U_ψ is bounded below.

Similarly to the proof of Theorem 2.2, we also have

$$\mathcal{C}(\sigma) = \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \Gamma \eta_\kappa \quad \text{and} \quad \sum_{\kappa \in \Theta} \psi_\kappa(\sigma)^* \psi_\kappa(\sigma) < \infty$$

for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$.

Conversly, if (ii) holds. Since $\{\psi_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}$ is Bessel sequence for $\mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, by Lemma 1.1, U_ψ is bounded and there exists $B > 0$ such that $\|U_\psi\| \leq \sqrt{B}$. It means that, for all $\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \in l^2(\mathcal{B})$

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa \right\rangle &= \left\langle U_\psi(\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}), U_\psi(\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}) \right\rangle \\ &\leq B \langle \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}, \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \rangle = B \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \zeta_\kappa^*. \end{aligned}$$

Since U_ψ is bounded below, then there is $A > 0$ such that for all $\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \in l^2(\mathcal{B})$,

$$A \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \zeta_\kappa^* = A \langle \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}, \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \rangle \leq \langle U_\psi(\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}), U_\psi(\{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta}) \rangle = \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa \right\rangle.$$

Therefore,

$$A \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \zeta_\kappa^* \leq \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \psi_\kappa \right\rangle \leq B \sum_{\kappa \in \Theta} \zeta_\kappa \zeta_\kappa^*, \quad \text{for all } \{\zeta_\kappa\}_{\kappa \in \Theta} \in l^2(\mathcal{B}).$$

Then, for all $\xi \in \mathcal{E}$ we have

$$\begin{aligned} A \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle &= A \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^* \xi, \eta_\kappa \rangle \langle \eta_\kappa, \Gamma^* \xi \rangle \leq \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^* \xi, \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa, \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^* \xi, \eta_\kappa \rangle \psi_\kappa \right\rangle \\ &\leq B \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^* \xi, \eta_\kappa \rangle \langle \eta_\kappa, \Gamma^* \xi \rangle = B \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq B \|\Gamma\|^2 \cdot \langle \xi, \xi \rangle, \end{aligned}$$

and by (2.1),

$$\int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) = \left\langle \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^* \xi, \eta_{\kappa} \rangle \psi_{\kappa}, \sum_{\kappa \in \Theta} \langle \Gamma^* \xi, \eta_{\kappa} \rangle \psi_{\kappa} \right\rangle.$$

Therefore

$$A \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B \|\Gamma\|^2 \cdot \langle \xi, \xi \rangle, \quad \text{for all } \xi \in \mathcal{E}.$$

So, $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ with bounds A and $B\|\Gamma\|^2$. $\square$

The following theorem provides a characterization of a continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ by the condition $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})$.

Theorem 2.4. *Let $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ and $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ be weakly measurable. Then $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ if and only if $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})$.*

P r o o f. First, we suppose that $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$. Then, there exist $A, B > 0$ such that

$$A \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B \langle \xi, \xi \rangle, \quad \text{for all } \xi \in \mathcal{E}. \quad (2.2)$$

Then for all $\xi \in \mathcal{E}$, we have

$$\langle T_{\mathcal{C}}^* \xi, T_{\mathcal{C}}^* \xi \rangle = \int_{\mathcal{X}} (T_{\mathcal{C}}^* \xi(\sigma)) (T_{\mathcal{C}}^* \xi(\sigma))^* d\mu(\sigma) = \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B \langle \xi, \xi \rangle.$$

Hence, by (2.2) we have $A \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq \langle T_{\mathcal{C}}^* \xi, T_{\mathcal{C}}^* \xi \rangle$, for all $\xi \in \mathcal{E}$. Then $\Gamma \Gamma^* \leq \frac{1}{A} T_{\mathcal{C}} T_{\mathcal{C}}^*$, so by Lemma 1.4, $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})$. Conversely, $\mathcal{C}$ is a continuous Bessel mapping, since

$$\int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) = \langle T_{\mathcal{C}}^* \xi, T_{\mathcal{C}}^* \xi \rangle \leq \|T_{\mathcal{C}}\|^2 \langle \xi, \xi \rangle, \quad \text{for all } \xi \in \mathcal{E}.$$

Since, $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})$, Lemma 1.4 imply that there exists $\zeta > 0$ such that $\Gamma \Gamma^* \leq \zeta T_{\mathcal{C}} T_{\mathcal{C}}^*$. Then

$$\frac{1}{\zeta} \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq \langle T_{\mathcal{C}}^* \xi, T_{\mathcal{C}}^* \xi \rangle = \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma), \quad \text{for all } \xi \in \mathcal{E}.$$

Therefore, $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ with bounds $\frac{1}{\zeta}$ and $\|T_{\mathcal{C}}\|^2$. $\square$

We have the following consequence

Corollary 2.1. *Let $S \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ and $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ be a continuous S -frame for $\mathcal{E}$, and $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ with $\mathcal{R}(\Gamma) \subseteq \mathcal{R}(S)$. Then $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$.*

P r o o f. It is clear by Theorem 2.4. $\square$

3. Continuous Γ -Riesz basis in Hilbert $\mathcal{B}$ -modules

In this section, we introduce and characterize the concept of continuous Γ -Riesz basis.

Definition 3.1. For $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$, a weakly-measurable mapping $\mathcal{C} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ is called a *continuous Γ -Riesz basis* for a Hilbert $\mathcal{B}$ -module $\mathcal{E}$, if the following holds:

- (i) $\{\xi \in \mathcal{E} : \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle = 0, \text{ for almost all } \sigma \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{N}(\Gamma^*)$.
- (ii) There exist constants $A, B > 0$ such that for all $\chi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$,

$$\begin{aligned} A \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma) &\leq \left\langle \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma), \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma) \right\rangle \\ &\leq B \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma). \end{aligned}$$

Theorem 3.1. Let $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$ and $\mathcal{C} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{E})$. If $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -Riesz basis for $\mathcal{E}$, then $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})$.

Proof. Suppose that $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -Riesz basis for $\mathcal{E}$. Then

$$\{\xi \in \mathcal{E} : \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle = 0, \text{ for almost all } \sigma \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{N}(\Gamma^*), \quad (3.1)$$

and there exist $A, B > 0$ such that for all $\chi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$,

$$A \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma) \leq \left\langle \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma), \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma) \right\rangle \leq B \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma).$$

We have

$$T_{\mathcal{C}}^* : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B}), (T_{\mathcal{C}}^* f)(\sigma) = \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle.$$

Now, if $\xi \in \mathcal{E}$ and $T_{\mathcal{C}}^*(\xi) = 0$ then for all $\sigma \in \mathcal{X}$, $\langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle = 0$. Thus by (3.1), $\xi \in \mathcal{N}(\Gamma^*)$. It means that $\mathcal{N}(T_{\mathcal{C}}^*) \subset \mathcal{N}(\Gamma^*)$, and $\mathcal{N}(\Gamma^*)^{\perp} \subset \mathcal{N}(T_{\mathcal{C}}^*)^{\perp}$. By Lemma 1.3, we have

$$\mathcal{R}(\Gamma) \subset \overline{\mathcal{R}(\Gamma)} \subset \overline{\mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})} = \mathcal{R}(T_{\mathcal{C}}).$$

□

The following theorem provides a characterization of a continuous Γ -Riesz basis $\mathcal{C}$ in terms of a condition on the operator $T_{\mathcal{C}}$.

Theorem 3.2. Let $\mathcal{C}$ be a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$, then $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -Riesz basis for $\mathcal{E}$ if and only if, the synthesis operator $T_{\mathcal{C}}$ for continuous Γ -frame $\mathcal{C}$ is bounded below with respect to the inner product.

Proof. ($\Rightarrow$), Assume that $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -Riesz basis for $\mathcal{E}$, i. e.

$$\{\xi \in \mathcal{E} : \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle = 0, \text{ for almost all } \sigma \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{N}(\Gamma^*),$$

and there exist constants $A, B > 0$ such that for all $\chi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$,

$$A \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma) \leq \left\langle \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma), \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma) \right\rangle \leq B \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma),$$

then

$$A \langle \chi, \chi \rangle \leq \langle T_{\mathcal{C}}(\chi), T_{\mathcal{C}}(\chi) \rangle \leq B \langle \chi, \chi \rangle.$$

Thus $T_{\mathcal{C}}$ is a bounded below.

($\Leftarrow$), Since $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame, then there exist constants $A, B > 0$ such that for each $\xi \in \mathcal{E}$,

$$A\langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle \leq \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma) \leq B\langle \xi, \xi \rangle.$$

Thus if $\langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle = 0$ for almost all $\sigma \in \mathcal{X}$, then $A\langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle = 0$, so $\xi \in \mathcal{N}(\Gamma^*)$. Therefore,

$$\{\xi \in \mathcal{E} : \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle = 0, \text{ for almost all } \sigma \in \mathcal{X}\} \subset \mathcal{N}(\Gamma^*).$$

Since $\mathcal{C}$ is Bessel continuous Frame, By Lemma 1.2, $T_{\mathcal{C}}$ is bounded and there exists $B > 0$ such that $\|T_{\mathcal{C}}\| \leq \sqrt{B}$. It means that, for all $\chi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma), \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma) \right\rangle &= \langle T_{\mathcal{C}}(\chi), T_{\mathcal{C}}(\chi) \rangle \\ &\leq B\langle \chi, \chi \rangle = B \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma). \end{aligned}$$

Since $T_{\mathcal{C}}$ is bounded below, then there is $m > 0$ such that for all $\chi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{B})$,

$$\begin{aligned} m \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma) &= m\langle \chi, \chi \rangle \leq \langle T_{\mathcal{C}}(\chi), T_{\mathcal{C}}(\chi) \rangle \\ &= \left\langle \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma), \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma) \right\rangle. \end{aligned}$$

Therefore,

$$m \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma) \leq \left\langle \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma), \int_{\mathcal{X}} \chi(\sigma) \mathcal{C}(\sigma) d\mu(\sigma) \right\rangle \leq B \int_{\mathcal{X}} \langle \chi(\sigma), \chi(\sigma) \rangle d\mu(\sigma).$$

So, $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -Riesz basis for $\mathcal{E}$. □

Every continuous Γ -Riesz basis is a continuous Γ -frame.

Proposition 3.1. *Let $\Gamma \in \text{End}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{E})$. If $\mathcal{C} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ is a continuous Γ -Riesz basis for $\mathcal{E}$, then it is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$.*

Proof. Let $\mathcal{C} \in \mathcal{L}^2(\mathcal{X}, \mathcal{E})$ be a continuous Γ -Riesz basis for $\mathcal{E}$, then it is a continuous Bessel mapping with bound B and by Theorem 3.1, $\mathcal{R}(\Gamma) \subset \mathcal{R}(T_{\mathcal{C}})$. By Lemma 1.4, there exists $\zeta > 0$ such that $\Gamma\Gamma^* \leq \zeta T_{\mathcal{C}} T_{\mathcal{C}}^*$. Then

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^* \xi, \Gamma^* \xi \rangle &\leq \zeta \langle T_{\mathcal{C}}^* \xi, T_{\mathcal{C}}^* \xi \rangle = \zeta \langle \langle \xi, \mathcal{C}(\cdot) \rangle, \langle \xi, \mathcal{C}(\cdot) \rangle \rangle \\ &= \zeta \int_{\mathcal{X}} \langle \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle, \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \rangle d\mu(\sigma) \\ &= \zeta \int_{\mathcal{X}} \langle \xi, \mathcal{C}(\sigma) \rangle \langle \mathcal{C}(\sigma), \xi \rangle d\mu(\sigma), \text{ for all } \xi \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Therefore, $\mathcal{C}$ is a continuous Γ -frame for $\mathcal{E}$ with bounds $\frac{1}{\zeta}$ and B . □

4. Conclusion

Studying more general spaces is one of the fundamental aspects of mathematics. This is precisely the aim of our article, the Hilbert $\mathcal{B}$ -modules are regarded as a generalization of classical Hilbert spaces. The study of Γ -frames in Hilbert $\mathcal{B}$ -modules is essential due to their distinctive properties, which set them apart from traditional Hilbert spaces. Moreover, extending the theory of Γ -frames from the discrete setting to the continuous one is a significant development. We defined and presented important properties of continuous Γ -frames in this space and provided necessary and sufficient conditions for their existence. Furthermore, we introduced the notion of continuous Γ -Riesz basis and provided characterizations of these basis.

References

- [1] G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, MA, Boston, 1994, 300 pp.
- [2] S. T. Ali, J. P. Antoine, J. P. Gazeau, “Continuous frames in Hilbert space”, *Annals of Physics*, **222**:1 (1993), 1–37.
- [3] R. J. Duffin, A. C. Schaeffer, “A class of nonharmonic Fourier series”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **72** (1952), 341–366.
- [4] P. G. Casazza, “The art of frame theory”, *Taiwanese Journal of Mathematics*, **4**:2 (2000), 129–201.
- [5] J. P. Gabardo, D. Han, “Frames associated with measurable spaces”, *Advances in Computational Mathematics*, **18** (2003), 127–147.
- [6] A. Arefijamaal, R. A. Kamyabi Gol, R. Raisi Tousi, N. Tavalaei, “A new approach to continuous Riesz basis”, *Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran*, **129** (2000), 1143–1147.
- [7] L. Gavruta, “Frames for operators”, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **32**:1 (2012), 139–144.
- [8] G. Rahimlou, R. Ahmadi, M. A. Jafarizadeh, S. Nami, “Continuous $\mathcal{K}$ -frames and their dual in Hilbert spaces”, *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, **17**:3 (2020), 145–160.
- [9] A. Shekari, M. R. Abdollahpour, “ $c\mathcal{K}$ -frames and $c\mathcal{K}$ -Riesz basis in Hilbert spaces”, *Wavelet and Linear Algebra*, **10**:2 (2023), 1–18.
- [10] G. Rahimlou, R. Ahmadi, M. A. Jafarizadeh, S. Nami, “Some properties of continuous $\mathcal{K}$ -frames in Hilbert spaces”, *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, **15**:1 (2019), 169–187.
- [11] I. Kaplansky, “Modules over operator algebras”, *American Journal of Mathematics*, **75**:4 (1953), 839–858.
- [12] V. M. Manuilov, E. V. Troitsky, *Hilbert C^* -Modules*, Translations of Mathematical Monographs, **226**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005.
- [13] H. Ghasemi, T. L. Shateri, “On Continuous Frames in Hilbert C^* -Modules”, *Sahand Communications in Mathematical Analysis*, **21**:2 (2024), 327–349.
- [14] H. Ghasemi, T. L. Shateri, “On perturbation of continuous frames in Hilbert C^* -Modules”, *Georgian Mathematical Journal*, **31**:5 (2024), 801–812.
- [15] M. Frank, D. R. Larson, “Frames in Hilbert C^* -modules and C^* -algebras”, *Journal of Operator Theory*, **48**:2 (2002), 273–314.
- [16] W. Jing, *Frames in Hilbert C^* -Modules*, Doctoral Dissertation, Florida, 2006.
- [17] M. Mahmoudieh, G. A. Tabadkan, A. Arefijamaal, “Sum of $\mathcal{K}$ -Frames in Hilbert C^* -Modules”, *Filomat*, **34**:6 (2020), 1771–1780.
- [18] A. El Amrani, M. Rossafi, T. El Krouk, “ $\mathcal{K}$ -Riesz basis and $\mathcal{K}$ -g-Riesz basis in Hilbert C^* -modules”, *Proyecciones Journal of Mathematics*, **42**:5 (2023), 1241–1260.
- [19] E. C. Lance, *Hilbert C^* -Modules: A Toolkit for Operator Algebraists*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **210**, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995.
- [20] X. Fang, J. Yu, H. Yao, “Solutions to operator equations on Hilbert C^* -modules”, *Linear Algebra and its Applications*, **431**:11 (2009), 2142–2153.

Information about the authors

Tahar El Krouk, Post-Graduate Student,
Faculty of Sciences Dhar El Mahraz, Sidi Mohamed
Ben Abdellah University, Fez-Atlas, Morocco.
E-mail: elkrouktaher@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6423-0281>

Abdelkhalek El Amrani, PhD of Physics
and Mathematics, Professor of Mathematics
Department, Faculty of Sciences Dhar El Mahraz,
Sidi Mohamed Ben Abdellah University, Fez-Atlas,
Morocco.
E-mail: abdelkhalek.elamrani@usmba.ac.ma
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4841-8038>

Mohamed Rossafi, PhD of Physics
and Mathematics, Professor of Mathematics
Department, Laboratory of Analysis, Geometry
and Applications, Higher School of Education and
Training, Ibn Tofail University, Kenitra, Morocco.
E-mail: rossafimohamed@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5662-6921>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Tahar El Krouk
E-mail: elkrouktaher@gmail.com

Received 07.08.2025

Reviewed 15.01.2026

Accepted for press 12.03.2026

Информация об авторах

Эль Крук Тахар, аспирант, факультет есте-
ственных наук Дхар Эль Махраз, университет
Сиди Мохамеда Бен Абделлаха, г. Фес-Атлас,
Марокко. E-mail: elkrouktaher@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6423-0281>

Эль Амрани Абдельхалек, доктор
философии по физико-математическим на-
укам, профессор кафедры математики,
факультет естественных наук Дхар Эль
Махраз, университет Сиди Мохамеда Бен
Абделлаха, г. Фес-Атлас, Марокко. E-mail:
abdelkhalek.elamrani@usmba.ac.ma
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4841-8038>

Россафи Мохамед, доктор философии по
физико-математическим наукам, профессор ка-
федры математики, лаборатория анализа, гео-
метрии и приложений, высшая школа образова-
ния и профессиональной подготовки, универси-
тет Ибн Тофаила, г. Кенитра, Марокко. E-mail:
rossafimohamed@gmail.com
ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5662-6921>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Тахар Эль Крук
E-mail: elkrouktaher@gmail.com

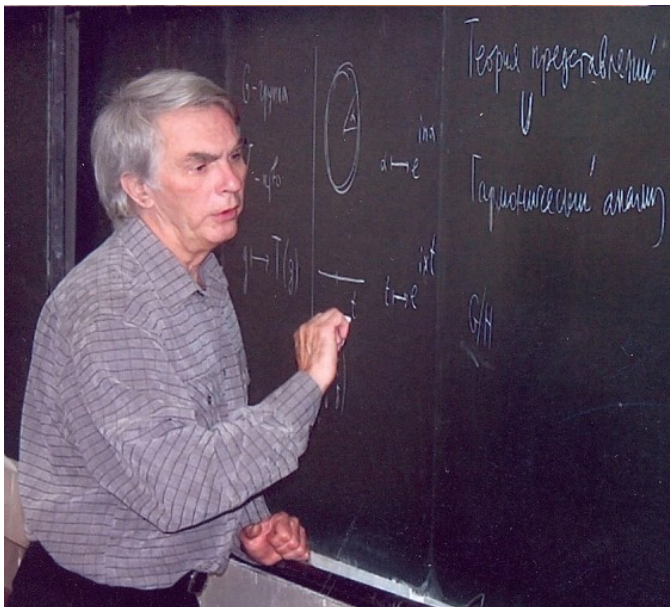
Поступила в редакцию 07.08.2025 г.

Поступила после рецензирования 15.01.2026 г.

Принята к публикации 12.03.2026 г.

С глубоким прискорбием извещаем о том,
что ушел из жизни наш коллега выдающийся математик

Владимир Федорович Молчанов



27.02.1939 – 31.12.2025

Выражаем искренние соболезнования родным и близким Владимира Федоровича.

Всю свою жизнь Владимир Федорович Молчанов посвятил служению математике, развитию математической науки и математического образования. Владимир Федорович внес огромный вклад в становление Тамбовского университета, укрепление его авторитета. Владимир Федорович получил всемирно признанные математические результаты, подготовил плеяду учеников, ставших профессиональными математиками, основал и возглавил известную в научном мире тамбовскую математическую школу по гармоническому анализу и квантованию. Многие математики из различных стран мира ассоциируют Тамбов с именем Владимира Федоровича. Владимир Федорович был выдающимся педагогом, его лекции и семинары с благодарностью вспоминают сотни выпускников Физмата. Владимир Федорович был очень разносторонним человеком, увлекался спортом, театром, музыкой, литературой, был интереснейшим собеседником.

Благодарная светлая Память о Владимире Федоровиче Молчанове навсегда сохранится в сердцах его учеников, коллег и всех, кому посчастливилось с ним работать и общаться.

*Редакция журнала
«Вестник российских университетов. Математика»*

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \lambda$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$H^2(\Pi, M^\Pi) \rightarrow$$

$$L_v(E, 1)$$

$$\mathcal{U}_1^{(0)} \rightarrow \mathcal{U}_2^{(0)}$$

none

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

of the entries in $\mathbb{Z}$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \alpha^2 + 2\alpha \\ \bar{\alpha} & \alpha + 1 \\ \alpha & \frac{\bar{\alpha} + 2}{\alpha + 1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma \cdot G \times E \in \mathbb{Z}_p$$

$$A \frac{4}{\pi} = \frac{1}{\pi} a a \frac{1}{\pi} \sigma = -\pi$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|R|, |III|, |VE| = 1$$

$$\Gamma \cong \frac{1}{11}$$

$$(x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)})$$

$$\psi = \frac{1}{\mu_{H^2}}$$

$$(E, p, 4)$$

$$\Pi; \int \chi$$

$$\lambda + \mu$$

$$\lambda' + \mu' = \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$\det(X, \Theta_X) \neq 0$$

$$K_0(X) \text{ Ind } \mathbb{Z}/p$$

$$p \times p$$