

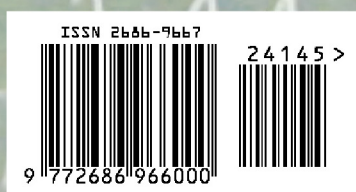
ISSN 2686-9667 (Print)
ISSN 2782-3342 (Online)

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический журнал

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical journal



Том 29
№ 145
2024

ВЕСТНИК РОССИЙСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ МАТЕМАТИКА

Научно-теоретический
журнал

Том 29, № 145,
2024

Издается с 14 июня 1996 года
Выходит 4 раза в год

Журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» ВАК при Минобрнауки России по научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки) (категория K1)

Индексируется в базе данных Scopus, Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science, РИНЦ (входит в ядро РИНЦ), Math-Net.Ru, ВИНТИ РАН, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich's Periodicals Directory, НЭБ «eLIBRARY.RU», ЭБ «КиберЛенинка», Норвежский реестр научных журналов, серий и издателей первого уровня (NSD)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS	3
НАУЧНЫЕ СТАТЬИ	
<i>М.Ж. Алвес, Е.В. Алвес, Ж.С.П. Мунембе, Ю.В. Непомнящих</i>	Линейные интегральные операторы в пространствах непрерывных и существенно ограниченных вектор-функций 5
<i>Д.Н. Баротов, Р.Н. Баротов</i>	Конструирование гладких выпуклых продолжений булевых функций 20
<i>В.Р. Барсегян, Т.А. Симонян, А.Г. Матевосян</i>	Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат 29
<i>Е.О. Бурлаков, В.М. Верхлютов, И.Н. Мальков</i>	О корректности математической модели вызванной активности первичной зрительной коры 43
<i>А.А. Волков, А.Ф. Измаилов, Е.И. Усков</i>	Методы с суженной матрицей Гессе как возмущенный метод Ньютона–Лагранжа 51
<i>М.Р. Лангаршоев</i>	Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\mu}$ 65
<i>Л.И. Родина</i>	О некоторых классах систем дифференциальных уравнений 77
<i>А.М. Романенков</i>	О решении смешанной задачи для уравнения колебаний движущегося вязкоупругого полотна 86

С 14 июня 1996 г. по 27 мая 2019 г. журнал выходил под названием
«Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки». ISSN 1810-0198

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»
(ОГРН 1026801156689) (392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33)

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР д. ф.-м. н., проф. Е.С. Жуковский (г. Тамбов, Российская Федерация)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА: к. ф.-м. н., доц. Е.А. Панасенко (научный редактор) (г. Тамбов, Российская Федерация), И.В. Ильина (отв. секретарь) (г. Тамбов, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. А.В. Арутюнов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., доц. М.В. Балашов (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Л.М. Березанский (г. Беэр-Шева, Израиль), д. ф.-м. н., проф. А.Г. Кушнер (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. Е.Б. Лансеев (г. Москва, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. В.Ф. Молчанов (г. Тамбов, Российская Федерация), доктор, проф. М. Певзнер (г. Реймс, Франция), доктор, проф. А.В. Поносов (г. Ос, Норвегия), д. ф.-м. н., проф. В.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), д. ф.-м. н., проф. М.И. Сумин (г. Нижний Новгород, Российская Федерация), доктор, проф. Г. Хельминк (г. Амстердам, Нидерланды), член-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. А.Г. Ченцов (г. Екатеринбург, Российская Федерация)

Адрес редакции: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Телефон редакции: +7(4752)72-34-34 доб. 0440

Электронная почта: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru

Сайт: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций (Роскомнадзор), выписка из реестра зарегистрированных средств массовой информации
(реестровая запись) от 03.07.2019 ПИ № ФС77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Подписной индекс 83372 в каталоге ООО «УП Урал-Пресс»

Редакторы: М.И. Филатова, М.А. Сенина

Редакторы английских текстов: М.С. Пустовалова, Д.Г. Самодуров

Технический редактор Ю.А. Бирюкова

Технический секретарь М.В. Борзова

Администратор сайта М.И. Филатова

Для цитирования:

Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29, № 145. 120 с. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145>

Подписано в печать 18.03.2024. Дата выхода в свет 08.04.2024

Формат А4 (60×84 1/8). Гарнитура «Times New Roman». Печать на ризографе.

Печ. л. 15,0. Усл. печ. л. 13,9. Тираж 1000 экз. Заказ № 24076. Свободная цена.

Издатель: ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина»

Адрес издателя: 392000, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Интернациональная, д. 33

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе оперативной печати Издательского дома «Державинский»

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

392008, Тамбовская обл., г. Тамбов, ул. Советская, д. 190г. Эл. почта: izdat_tsu09@mail.ru



Контент доступен под лицензией [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина», 2024

© Журнал «Вестник российских университетов. Математика», 2024

При перепечатке, при цитировании материалов, в том числе в электронных СМИ,
ссылка на журнал обязательна.

Ответственность за содержание публикаций несет автор

RUSSIAN UNIVERSITIES REPORTS MATHEMATICS

Scientific-theoretical
journal

**Volume 29, no. 145,
2024**

Published since June 14, 1996
Issued 4 times a year

The journal is on the “List of peer-reviewed scientific periodicals recommended by Higher Attestation Commission at Ministry of Science and Higher Education for publication of scientific results of dissertations for academic degree of candidate of science, doctor of science on physical and mathematical sciences in the scientific specialty 1.1.1. Real, complex and functional analysis (physical and mathematical sciences) (category K1)

Indexed in the Scopus database, Russian Science Citation Index (RSCI) on Web of Science platform, RSCI (included in the RSCI core), Math-Net.Ru, VINITI RAS, Zentralblatt MATH, SciLIT, Ulrich’s Periodicals Directory, Scientific Electronic Library “eLIBRARY.RU”, Electronic Library “CyberLeninka”, Norwegian Register of Scientific Journals, Series and Publishers Level 1 (NSD)

CONTENTS

SCIENTIFIC ARTICLES

<i>M.J. Alves, E.V. Alves, J.S.P. Munembe, Yu.V. Nepomnyashchikh</i>	Linear integral operators in spaces of continuous and essentially bounded vector functions	5
<i>D.N. Barotov, R.N. Barotov</i>	Construction of smooth convex extensions of Boolean functions	20
<i>V.R. Barseghyan, T.A. Simonyan, A.G. Matevosyan</i>	On one problem of quadrocopter control with given intermediate values of different parts of coordinates	29
<i>E.O. Burlakov, V.M. Verkhlyutov, I.N. Malkov</i>	On well-posedness of a mathematical model of evoked activity in the primary visual cortex	43
<i>A.A. Volkov, A.F. Izmailov, E.I. Uskov</i>	Reduced Hessian methods as a perturbed Newton–Lagrange method	51
<i>M.R. Langarshoev</i>	The best approximation of analytic in a unit circle functions in the Bergman weight space $\mathfrak{B}_{2,\mu}$	65
<i>L.I. Rodina</i>	On some classes of systems of differential equations	77
<i>A.M. Romanenkov</i>	On the solution of a mixed problem for the equation of vibrations of a moving viscoelastic web	86

From June 14, 1996 to May 27, 2019, the journal was published under the name
“Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences”. ISSN 1810-0198

Founder: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education
“Derzhavin Tambov State University”
(OGPH 1026801156689) (33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region)

EDITOR-IN-CHIEF: Dr., Prof. Zhukovskiy, Evgeny S. (Tambov, Russian Federation)

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL: Cand., Assoc. Prof. Panasenko, Elena A. (Scientific Editor) (Tambov, Russian Federation), Ilyina, Irina V. (Executive Editor) (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Arutyunov, Aram V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Assoc. Prof. Balashov, Maxim V. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Berezansky, Leonid (Beersheba, State of Israel), Dr., Prof. Kushner, Alexei G. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Laneev, Evgenii B. (Moscow, Russian Federation), Dr., Prof. Molchanov, Vladimir F. (Tambov, Russian Federation), Dr., Prof. Pevzner, Michael (Reims, French Republic), Dr., Prof. Ponosov, Arcady V. (Ås, Kingdom of Norway), Dr., Prof. Sumin, Vladimir I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Sumin, Mikhail I. (Nizhnii Novgorod, Russian Federation), Dr., Prof. Helminck, Gerard (Amsterdam, Netherlands), Corresponding Member of RAS, Dr., Prof. Chentsov, Alexander G. (Yekaterinburg, Russian Federation)

Editors address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region
Telephone number: +7(4752)-72-34-34 extension 0440
E-mail: zukovskys@mail.ru; ilina@tsutmb.ru
Web-site: <http://journals.tsutmb.ru/mathematics/>; <http://journals.tsutmb.ru/mathematics-en/>

The publication is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Media (Roskommadzor), extract from the register of registered mass media (register entry dated) 03.07.2019 ПИ no. ФЦ77-76133

ISSN 2686-9667 (Print) ISSN 2782-3342 (Online)

Subscription index in the catalogue of LLC “Ural-Press” is 83372

Editors: M.I. Filatova, M.A. Senina
English texts editors: M.S. Pustovalova, D.G. Samodurov
Technical editor Y.A. Biryukova
Technical secretary M.V. Borzova
Web-site administrator M.I. Filatova

For citation:

Russian Universities Reports. Mathematics. 2024. Vol. 29, no. 145. 120 p. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145>

Signed for printing 18.03.2024. Release date 08.04.2024
Format A4 (60×84 1/8). Typeface “Times New Roman”. Printed on risograph.
Pr. sheet 15,0. Conv. pr. sheet 13,9. Copies printed 1000. Order no. 24076. Free price

Publisher: FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”
Publisher’s address: 33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Tambov Region

Published basing on ready-to-print file in Instant Print Department of Publishing House “Derzhavinskiy” of FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”.
190g Sovetskaya St., Tambov 392008, Tambov Region. E-mail: izdat_tsu09@mail.ru



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution 4.0 License](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

© FSBEI of HE “Derzhavin Tambov State University”, 2024
© The journal “Russian Universities Reports. Mathematics”, 2024
While reprinting, citing materials, including in electronic media, a reference to the journal is required.
The author is responsible for the contents of publications

SCIENTIFIC ARTICLE

© M. J. Alves, E. V. Alves, J. S. P. Munembe, Yu. V. Nepomnyashchikh, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-5-19>

Linear integral operators in spaces of continuous and essentially bounded vector functions

Manuel J. ALVES¹, Elena V. ALVES², João S.P. MUNEMBE¹,
Yury V. NEPOMNYASHCHIKH¹

¹ Eduardo Mondlane University

Main Campus, P.O. Box 257, Maputo, Republic of Mozambique

² Higher Institute of Sciences and Technology of Mozambique

Street 1.194 no 332, Central C, Municipal District KaMpfumu, Maputo, Republic of Mozambique

Abstract. The well-established criterion for the action and boundedness of a linear integral operator K from the space L_∞ of essentially bounded functions to the space C of functions continuous on a compact set is extended to the case of functions taking values in Banach spaces.

The study further shows that if the operator K is active and bounded in the space C , it is also active and bounded in the space L_∞ , with the norms of K in C and L_∞ being identical. A precise expression for the general value of the norm of the operator K in these spaces, expressed in terms of its operator kernel, is provided. Additionally, an example of an integral operator (for scalar functions) is given, active and bounded in each of the spaces C and L_∞ , but not acting from L_∞ into C .

Convenient conditions for checking the boundedness of the operator K in C and L_∞ are discussed. In the case of the Banach space Y of the image function values of K being finite-dimensional, these conditions are both necessary and sufficient. In the case of infinite-dimensionality of Y , they are sufficient but not necessary (as proven).

For $\dim Y < \infty$, unimprovable estimates for the norm of the operator K are provided in terms of a 1-absolutely summing constant $\pi_1(Y)$, determined by the geometric properties of the norm in Y . Specifically, it is defined as the supremum over finite sets of nonzero elements of Y of the ratio of the sum of the norms of these elements to the supremum (over functionals with unit norm) of the sums of absolute values of the functional on these elements.

Keywords: Banach space, linear integral operator, norm of linear operator, 1-absolutely summing constant

Acknowledgements: The work is supported by SIDA under the subprogram “Capacity Building in Mathematics, Statistics and Its Applications” (Subprogram 1.4.2).

Mathematics Subject Classification: 47B38.

For citation: Alves M.J., Alves E.V., Munembe J.S.P., Nepomnyashchikh Yu.V. Linear integral operators in spaces of continuous and essentially bounded vector functions. *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 5–19. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-5-19>

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Алвес М.Ж., Алвес Е.В., Мунембе Ж.С.П., Непомнящих Ю.В., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-5-19>

УДК 517.983.23



Линейные интегральные операторы в пространствах непрерывных и существенно ограниченных вектор-функций

Мануэль Жоаким АЛВЕС¹, Елена Владимировна АЛВЕС²,
Жоао Себастьян Паулу МУНЕМБЕ¹, Юрий Витальевич НЕПОМНЯЩИХ¹

¹ «Университет Эдуардо Мондлане»

1100, Республика Мозамбик, г. Мапуто, Главный кампус, П.Я. 257

² «Высший институт наук и технологий Мозамбика»

1100, Республика Мозамбик, г. Мапуто, улица 1.194 No 332,
центральный С, Муниципальный район КаМпфуму

Аннотация. Известный критерий действия и ограниченности линейного интегрального оператора K из пространства L_∞ существенно ограниченных функций в пространство C непрерывных на компакте функций обобщается на случай функций со значениями в банаховых пространствах.

В работе также доказано, что из действия и ограниченности оператора K в пространстве C вытекает его действие и ограниченность в пространстве L_∞ , причем нормы оператора K , рассматриваемого в C и L_∞ , совпадают. Приводится точное выражение общего значения нормы оператора K в этих пространствах в терминах ядра оператора. В дополнение к этому, приводится пример интегрального оператора (для скалярных функций), который действует и ограничен в каждом из пространств C и L_∞ , но не действует из L_∞ в C .

Также обсуждаются удобные для проверки условия ограниченности оператора K в C и L_∞ . В случае конечномерности банахова пространства Y значений функций образа оператора K эти условия являются одновременно необходимыми и достаточными. В случае бесконечномерности Y они являются достаточными, но не являются необходимыми (это доказывается).

В случае $\dim Y < \infty$ приводятся наилучшие оценки для нормы оператора K в терминах 1-абсолютно суммирующей константы $\pi_1(Y)$, определяемой геометрическими свойствами нормы в Y , более точно, как супремум по конечным наборам ненулевых элементов Y отношения суммы норм этих элементов и супремума (по функционалам с единичной нормой) сумм абсолютных значений функционала на этих элементах.

Ключевые слова: банахово пространство, линейный интегральный оператор, норма линейного оператора, 1-абсолютно суммирующая константа

Благодарности: Работа выполнена при поддержке SIDA в рамках подпрограммы «Наращивание потенциала в области математики, статистики и ее приложений» (Подпрограмма 1.4.2).

Для цитирования: Алвес М.Ж., Алвес Е.В., Мунембе Ж.С.П., Непомнящих Ю.В. Линейные интегральные операторы в пространствах непрерывных и существенно ограниченных вектор-функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 5–19. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-5-19> (In Engl., Abstr. in Russian)

Introduction

The criteria governing the action, continuity, and compactness of the Fredholm linear integral operator K within function spaces underwent comprehensive and thorough examination during the 20th century. These considerations are extensively documented in classical monographs on functional analysis, as exemplified by references such as [1, 2]. The monograph [3, p. 100] formulates necessary and sufficient conditions for the action and boundedness of K from the space of essentially bounded functions to the space of continuous functions on a compact set. This work also provides expressions for the norm of the operator K in terms of its kernel.

In this paper, we extend and partially generalize these findings, building upon the characteristics of the integral functional derived in the study [4]. We outline the principal directions of advancement in our work concerning the well-established classical aspects of the operator K within the space of continuous functions.

- We establish necessary and sufficient conditions for the action and boundedness of the operator K from spaces of continuous functions, as well as from the space of essentially bounded functions to the space of bounded functions, when the functions from these spaces take values in Banach spaces.
- We demonstrate that the action and boundedness of the operator K in the space of continuous functions imply the action and boundedness in the space of essentially bounded functions, with the norms of both operators being equal.
- We provide an expression for the norm of the operator K in terms of its kernel.
- In the scenario of finite-dimensionality of the function value space, we establish an optimal estimate for the norm of the operator K in terms of a convenient expression through the kernel of the operator using 1-absolutely summing constant.

1. Key notations and concepts

We will use the following notations:

Ω is closed bounded set in $\mathbb{R}^n$ with the classical Lebesgue measure μ in σ -algebra Σ Lebesgue measurable subsets of Ω .

χ_E is characteristic function of a set $E \subset \Omega$ ($\chi_E(s) = 1$ if $s \in E$ and $\chi_E(s) = 0$ if $s \notin E$).

X and Y are real separable Banach spaces with norms $\|\cdot\|_X$ and $\|\cdot\|_Y$, accordingly, moreover Y contains no copy of c_0 ($Y \not\supset c_0$), in particular, Y reflexively.

X^* is the dual space of X with a norm $\|\cdot\|_{X^*}$; value of a functional $f \in X^*$ in the point $x \in X$ we will denote by $f[x]$ or $\langle x, f \rangle$.

$B(X, Y)$ — the space of linear bounded operators from X to Y with the natural norm.

By $B_1(Z)$, we denote the closed unit ball centered at zero in the Banach space Z , that is $B_1(Z) = \{x \in Z: \|x\|_Z \leq 1\}$.

$T(X)$ is Banach space consisting of bounded functions $u: \Omega \rightarrow X$, with the sup-norm

$$\|u\|_\infty = \sup_{t \in \Omega} \|u(t)\|_X.$$

A function $u : \Omega \rightarrow X$ is called measurable if the preimage of any Borel set in X is Lebesgue measurable. The set of all measurable functions $u : \Omega \rightarrow X$ is denoted by $L_0(X)$.

By $L_\infty(X)$, $L_\infty^c(X)$, $C(X)$ and $P(X)$ we will denote the linear subspaces of the space $T(X)$, consisting of measurable bounded functions, measurable compact-valued functions, continuous functions, and measurable finite-valued functions, respectively, equipped with the sup-norm. It is clear that the first three of these linear subspaces are closed, hence they are Banach spaces. Let's note that $P(X) \cup C(X) \subset L_\infty^c(X) \subset L_\infty(X) \subset T(X)$ and in the case of finite-dimensionality of X we have $L_\infty^c(X) = L_\infty(X)$. In particular $X = \mathbb{R}$ in the notations of the introduced functional spaces, we will omit the notation of the function value space: $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R})$, $C = C(\mathbb{R})$ and etc.

By $L_\infty(X)$ we will denote the factor space of space $L_\infty(X)$, consisting of classes μ -equivalent to essentially bounded functions with the essential supremum norm

$$\|u\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in \Omega} \|u(t)\|_X.$$

The closed subspace $L_\infty^c(X)$ of the Banach space $L_\infty(X)$ is defined similarly.

If the function $v : \Omega \rightarrow Y$ is such, that $\forall g \in Y^*$ (which is equivalent to, $\forall g \in B_1(Y^*)$) the real function $\langle v(\cdot), g \rangle$ is Lebesgue integrable on Ω , then there exists a unique element $I \in Y$ such that

$$\langle I, g \rangle = \int_\Omega \langle v(s), g \rangle ds \quad (\forall g \in Y^*) \quad (1.1)$$

(see, for example, [5, p. 54]). In this case, the function v is called Pettis integrable on Ω , and I is called the Pettis integral of the function v on Ω , denoted by

$$I = (P) \int_\Omega v(s) ds.$$

From the separability of Y it follows that any Pettis integrable function is measurable (see [5, p. 42, 53]).

Note that in the case when Y contains a subspace isomorphic to c_0 , from Lebesgue integrability on Ω the functions $\langle v(\cdot), g \rangle$ for each $\forall g \in Y^*$, in general, it does not follow that there exists $I \in Y$ satisfying (1.1). For an arbitrary Banach space Y , the concept of the Danford integral (which is an element of the second dual space Y^{**}) is known, which generalizes the concept of the Pettis integral [5, p. 52]. To avoid complicating the results in the direction related to different definitions of integrals, we assume in the paper that $Y \not\supset c_0$.

If the function $v : \Omega \rightarrow Y$ is measurable and the real-valued function $\|v(\cdot)\|_Y$ is Lebesgue integrable on Ω , then the function v is called Bochner integrable on Ω . The definition of the Bochner integral is analogous to the definition of the Lebesgue integral for real-valued functions (see [5, p. 44]). For the Bochner integral we will use the notation $(B) \int_\Omega v(s) ds$.

If the function $v : \Omega \rightarrow Y$ is Bochner integrable, then it is Pettis integrable and the values of the integrals coincide. The reciprocal statement holds true if and only if Y is finite-dimensional [5]. For the Lebesgue integral of real functions, instead of $(P) \int$ and $(B) \int$, we will write $\int$.

2. Some auxiliary results

Lemma 2.1. *The set $P(X)$ is dense in $L_\infty^c(X)$.*

P r o o f. Let's now fix arbitrary $u \in L_\infty^c(X)$ and $\varepsilon > 0$. Let's choose for the relatively compact set $u(\Omega)$ a finite ε -net $z_1, z_2, \dots, z_m \subset u(\Omega)$ and let's define

$$\begin{aligned} A_i &= \{s \in \Omega : \|u(s) - z_i\|_X \leq \varepsilon\} \quad (i = 1, 2, \dots, m), \\ E_1 &= A_1, \quad E_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \quad (i = 2, 3, \dots, m). \end{aligned}$$

Then $u_\varepsilon = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i} z_i \in P(X)$ and $\|u - u_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. $\square$

The next two lemmas follow directly from [4, Lemma 2.1 and Assertion 2.1].

Lemma 2.2. *Let $D \subset X$ be a convex and closed set, and let $u : \Omega \rightarrow Y$ be some measurable function with values in D . Then there exists a sequence of functions $u_n \in C(X)$ with values in D that converges in measure to u .*

Lemma 2.3. *Let the function $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the Carathéodory conditions, which means that the function $f(\cdot, x)$ is measurable for each $x \in X$, and the function $f(s, \cdot)$ is continuous for each $s \in \Omega$. Then the function $\psi : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ defined by $\psi(s) = \sup_{x \in B_1(X)} |f(s, x)|$ is measurable, and*

$$\sup_{u \in B_1(L_\infty(X))} \int_\Omega |f(s, u(s))| ds = \int_\Omega \sup_{x \in B_1(X)} |f(s, x)| ds.$$

To prove the main results about the linear integral operator, we will need the criterion for the action and boundedness of the linear integral functional, as well as one of its properties established in the work [4], which we will present here without proofs.

Let $a : \Omega \rightarrow X^*$. The functional H will be formally defined by the equation

$$H[u] = \int_\Omega a(s)[u(s)] ds. \quad (2.1)$$

If the finite integral (2.1) exists for all functions $u : \Omega \rightarrow X$ from a certain linear subspace V of the space $L_0(X)$, then expression (2.1) defines a linear functional $H : V \rightarrow \mathbb{R}$.

Function $a(\cdot) : \Omega \rightarrow X^*$ is said weak*-measurable (see [5, p. 41]), if $\forall x \in X$ the real function $a(\cdot)[x]$ is measurable.

Assertion 2.1. (see [4, Theorem 4.1]) *The following conditions a), b), and c) are equivalent to each other:*

- a) $H \in (C(X))^*$, in other words, the functional H acts from $C(X)$ to $\mathbb{R}$ and is bounded;
- b) $H \in (L_\infty(X))^*$;
- c) Function $a(\cdot)$ weak*-measurable and $\|a\|_1 \stackrel{\text{def.}}{=} \int_\Omega \|a(s)\|_{X^*} ds < \infty$.

When any of these conditions is satisfied

$$\|H\|_{(C(X))^*} = \|H\|_{(L_\infty(X))^*} = \|a\|_1.$$

Assertion 2.2. (see [4, Corollary 4.2]) *If $H \in (C(X))^*$, then for any bounded sequence $u_n \subset L_\infty(X)$ converging in measure to some $u \in L_\infty(X)$, it holds that $H[u_n] \rightarrow H[u]$.*

3. Definition of an integral operator and conditions on its kernel

Let $k : \Omega^2 \rightarrow B(X, Y)$. Let's consider the linear Fredholm integral operator K with the kernel k , defined by equality

$$(Ku)(t) = (P) \int_{\Omega} k(t, s)u(s) ds, \quad t \in \Omega.$$

Under certain conditions on the kernel k , the operator K transforms functions $u : \Omega \rightarrow X$ into functions $Ku : \Omega \rightarrow Y$.

For fixed $(t, s) \in \Omega^2$, let $k_*(t, s)$ denote the adjoint operator of $k(t, s)$, so that $k_* : \Omega^2 \rightarrow B(Y^*, X^*)$ (the asterisk notation as a subscript is used to avoid confusion with the adjoint kernel $k^*(t, s) = k(s, t)$).

Let's introduce certain constants expressed in terms of the kernel k of the operator K and consider certain conditions on the kernel k that will be used in the following sections.

Let's define, for now formally, the quantities $\|k\|_u$ and $\|k\|_w$ by:

$$\|k\|_u \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} \|k(t, s)\|_{B(X, Y)} ds, \quad \|k\|_w \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{t \in \Omega; g \in B_1(Y^*)} \int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} ds.$$

and the conditions:

- (a₀) For all $t \in \Omega$ and $x \in X$ function $k(t, \cdot)x$ is measurable;
- (a_c) For all $A \in \Sigma$ and $x \in X$ holds $\int_A k(\cdot, s)x ds \in C(Y)$;
- (b_u) Exists and is finite the quantity $\|k\|_u$;
- (b_w) Exists and is finite the quantity $\|k\|_w$.

Let's emphasize that we have introduced notations for a series of conditions but do not assume them to be a priori satisfied.

Assertion 3.1. *Under the condition (a₀), the following properties hold:*

- 1) For any $t \in \Omega$ and $u \in L_0(X)$, the function $k(t, \cdot)u(\cdot) : \Omega \rightarrow Y$ is measurable;
- 2) For any $t \in \Omega$, the function $\|k(t, \cdot)\|_{B(X, Y)} : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ is measurable;
- 3) For any $t \in \Omega$, $u \in L_0(X)$, and $g \in Y^*$, the function $\langle k(t, \cdot)u(\cdot), g \rangle : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ is measurable;
- 4) For any $t \in \Omega$ and $g \in Y^*$, the function $\|k_*(t, \cdot)g\|_{X^*} : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ is measurable.

P r o o f. Properties 3) and 4) follow from Lemma 2.3, applied at fixed $t \in \Omega$ to the function $f : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ defined as $f(s, x) = \langle k(t, s)x, g \rangle$. In particular, for 4), we use the equality

$$\|k_*(t, s)g\|_{X^*} = \sup_{x \in B_1(X)} |\langle x, k_*(t, s)g \rangle| = \sup_{x \in B_1(X)} |\langle k(t, s)x, g \rangle| = \sup_{x \in B_1(X)} |f(s, x)|. \quad (3.1)$$

Property 1) follows from theorems 2 and 3 of the paper [6].

Finally, property 2) follows from Lemma 2.3 applied at fixed $t \in \Omega$ to the function $\tilde{f} : \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $\tilde{f}(s, x) = \|k(t, s)x\|_Y$, taking into account the equality $\|k(t, s)\|_{B(X, Y)} = \sup_{x \in B_1(X)} |\tilde{f}(s, x)|$. $\square$

From Assertion 3.1, in particular, it follows that under condition (a₀), the quantities $\|k\|_u$ and $\|k\|_w$ are well-defined, which can take finite non-negative values or the value $+\infty$.

4. The criterion for the action and boundedness of the operator K from $C(X)$ and from $L_\infty(X)$ to $T(Y)$

Theorem 4.1. *The following conditions A) to D) are equivalent to each other:*

- A) $K \in B(C(X), T(Y))$ (the operator K acts from $C(X)$ to $T(Y)$ and is bounded);
- B) $K \in B(L_\infty^c(X), T(Y))$;
- C) $K \in B(L_\infty(X), T(Y))$;
- D) The conditions (a_0) and (b_w) are satisfied.

Moreover, if $K \in B(C(X), T(Y))$, then

$$\|K\|_{C(X) \rightarrow T(Y)} = \|K\|_{L_\infty^c(X) \rightarrow T(Y)} = \|K\|_{L_\infty(X) \rightarrow T(Y)} = \|k\|_w. \quad (4.1)$$

P r o o f. 1^0 step. Let it be fair D). We will prove that $K \in B(L_\infty(X), T(Y))$ and

$$\|K\|_{L_\infty(X) \rightarrow T(Y)} \leq \|k\|_w. \quad (4.2)$$

Let's fix arbitrary $u \in L_\infty(X)$ and $t \in \Omega$. Due to condition (b_w) , taking into account Assertion 3.1, for any $g \in Y^*$ with a norm $\|g\|_{Y^*} \leq 1$, we have

$$\int_{\Omega} |\langle k(t, s)u(s), g \rangle| ds = \int_{\Omega} |\langle u(s), k_*(t, s)g \rangle| ds \leq \|u\|_{\infty} \|k\|_w < \infty, \quad (4.3)$$

therefore, there exists an integral $(P) \int_{\Omega} k(t, s)u(s) ds \in Y$.

Furthermore, for any $u \in L_\infty(X)$ and $t \in \Omega$, we have, due to (b_w) , taking into account (4.3):

$$\|Ku(t)\|_Y = \sup_{g \in B_1(Y^*)} |\langle Ku(t), g \rangle| = \sup_{g \in B_1(Y^*)} \left| \int_{\Omega} \langle u(s), k_*(t, s)g \rangle ds \right| \leq \|k\|_w \|u\|_{\infty}.$$

Therefore, the operator K acts from $L_\infty(X)$ to $T(Y)$, is bounded and holds (4.2).

2^0 step. Let $K \in B(C(X), T(Y))$. We will prove that property D) holds and the equality

$$\|K\|_{C(X) \rightarrow T(Y)} = \|k\|_w. \quad (4.4)$$

From the condition $K : C(X) \rightarrow T(Y)$ and the fact that constant functions are continuous, condition (a_0) follows.

Let us fix arbitrary $t \in \Omega$ and $g \in Y^*$. We define the function $a : \Omega \rightarrow X^*$ as follows by

$$a(s)[x] = \langle k(t, s)x, g \rangle, \quad s \in \Omega, x \in X \quad (4.5)$$

and let us consider the functional H , defined by equation (2.1). From the condition $K \in B(C(X), T(Y))$, it follows that $H \in (C(X))^*$. According to Assertion 3.1, taking into account equation (3.1), we have, using the notation $C_1 = B_1(C(X))$,

$$\int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} ds = \int_{\Omega} \|a(s)\|_{X^*} ds = \|F\|_{(C(X))^*} = \sup_{u \in C_1} \left| \int_{\Omega} a(s)[u(s)] ds \right|. \quad (4.6)$$

By the definition of the Pettis integral

$$\sup_{u \in C_1} \left| \int_{\Omega} a(s)u(s) ds \right| = \sup_{u \in C_1} \left| \int_{\Omega} \langle k(t, s)u(s), g \rangle ds \right| = \sup_{u \in C_1} \left| \left\langle \int_{\Omega} k(t, s)u(s) ds, g \right\rangle \right|. \quad (4.7)$$

From equations (4.6) and (4.7), it follows that

$$\sup_{u \in C_1} \left| \left\langle \int_{\Omega} k(t, s) u(s) ds, g \right\rangle \right| = \int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} ds.$$

Taking the supremum over all $t \in \Omega$ and $g \in B_1(Y^*)$ in this equality, we obtain equation (4.4). From this equation and the inequality $\|K\|_{C(X) \rightarrow T(Y)} < \infty$, condition (b_w) follows.

From the properties established in steps 1⁰ and 2⁰, the statement of the theorem follows. $\square$

5. Integral operator with values in the space of continuous functions

The following theorem provides necessary and sufficient conditions for the action and boundedness of the operator K from $L_{\infty}^c(X)$ to $C(Y)$ in terms of the norm expression of K using the kernel k . It also establishes the equality of norms of the operator considered from $L_{\infty}^c(X)$ to $C(Y)$ and from $C(X)$ to $C(Y)$. This theorem partially generalizes Theorem 1.1 in [3, p. 100], for the case of $p = \infty$.

Theorem 5.1. *$K \in B(L_{\infty}^c(X), C(Y))$ if and only if the conditions (a_c) and (b_w) hold. Moreover, if $K \in B(L_{\infty}^c(X), C(Y))$, then*

$$\|K\|_{C(X) \rightarrow C(Y)} = \|K\|_{L_{\infty}^c(X) \rightarrow C(Y)} = \|k\|_w. \quad (5.1)$$

P r o o f. 1) Let the conditions (a_c) and (b_w) be satisfied.

Its clear that condition (a_0) is fair, and by virtue of Theorem 4.1 $K \in B(L_{\infty}^c(X), T(Y))$.

Each function $v \in P(X)$ has a representation $v(s) = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(s)x_k$ for some positive integer n , some $x_i \in X$, and pairwise disjoint sets $A_i \in \Sigma$. The linearity and additivity properties of the Pettis integral [5] and the condition (a_c) imply

$$(P) \int_{\Omega} k(t, s) u(s) ds = \sum_{i=1}^n (P) \int_{A_i} k(t, s) x_i ds$$

moreover, each of the integrals in the right-hand side exists and is a continuous function of t . Therefore, the integral on the left-hand side and the equality itself will be valid. Thus, it is proven that $K(P(X)) \subset C(Y)$.

From the continuity of the operator $K : L_{\infty}^c(X) \rightarrow T(Y)$, the inclusion $K(P(X)) \subset C(Y)$, and Lemma 2.1, it follows straightforwardly that $K \in B(L_{\infty}^c(X), C(Y))$.

2) Let $K \in B(L_{\infty}^c(X), C(Y))$. For any $A \in \Sigma$ and $x \in X$, we have $v = \chi_A x \in L_{\infty}^c(X)$, thus $(Kv)(\cdot) = (P) \int_A k(\cdot, s) x ds \in C(Y)$. Thus, condition (a_c) is satisfied. Condition (b_w) and equality (5.1) follow from Theorem 4.1. $\square$

The following theorem provides necessary and sufficient conditions for the boundedness of the operator K when it operates from $C(X)$ to $C(Y)$, expressing its norm in terms of the kernel k . This theorem generalizes the equality for the norm when $p = \infty$ in Theorem 1.2 from [3, p. 100].

Theorem 5.2. *Let the operator K acts from $C(X)$ to $C(Y)$. In order for K to be bounded, it is necessary and sufficient to satisfy condition (b_w) .*

Moreover, if $K \in B(C(X), C(Y))$, then we have $\|K\|_{C(X) \rightarrow C(Y)} = \|k\|_w$.

P r o o f. From the condition $K : C(X) \rightarrow C(Y)$, condition (a_0) of Theorem 4.1 follows. Taking this into account, the statement of the theorem straightforwardly follows from Theorem 4.1. $\square$

As noted in [3, p. 101], a linear integral operator acting from C to C can also be considered as acting from L_∞ to L_∞ . The following theorem asserts this fact in the case of function spaces with values in Banach spaces.

Theorem 5.3. *If $K \in B(C(X), C(Y))$, then $K \in B(L_\infty(X), L_\infty(Y))$ and*

$$\|K\|_{C(X) \rightarrow C(Y)} = \|K\|_{L_\infty(X) \rightarrow L_\infty(Y)} = \|k\|_w.$$

P r o o f. According to Theorem 4.1, from the condition $K \in B(C(X), C(Y))$, it follows that $K \in B(L_\infty(X), T(Y))$ and equality (4.1) holds. Thus, it is sufficient to prove that for every $u \in L_\infty(X)$, the function Ku is measurable.

Let $u \in L_\infty(X)$. We choose a closed ball $D \supset u(\Omega)$, and according to Lemma 2.2, we find a sequence of functions $u_n \in C(X)$ with values in D that converges to u in measure. Fix arbitrary $t \in \Omega$ and $g \in Y^*$, and define the function $a : \Omega \rightarrow X^*$ by (4.5). We consider the functional H defined by equality (2.1). From the condition $K \in B(C(X), C(Y))$, it follows that $H \in (C(X))^*$. By Assertion 2.2, $H[u_n] \rightarrow H[u]$, which means that $\langle Ku_n(t), g \rangle \rightarrow \langle Ku(t), g \rangle$.

Since $K : C(X) \rightarrow C(Y)$ and $C(Y) \subset L_0(Y)$, the real-valued functions $\langle Ku_n(\cdot), g \rangle$ are measurable. Then, the function $\langle Ku(\cdot), g \rangle$ is also measurable as the pointwise limit of measurable functions. Thus, we have shown that for any $g \in Y^*$, the function $\langle Ku(\cdot), g \rangle$ is measurable (this property is commonly referred to as weak μ -measurability of the function Ku , see, for example, [5, p. 41]). Then, by Theorem 2 in [5, p. 42], combined with the separability of Y , it follows that the function Ku is measurable. $\square$

R e m a r k 5.1. Among the theorems in this section, there are no simultaneously necessary and sufficient conditions in terms of the kernel for the action and continuity of the operator K from $C(X)$ to $C(Y)$ (Theorem 5.1 provides a close result by replacing $C(X)$ with $L_\infty^c(X)$, and Theorem 5.2 gives a close result about the boundedness of K under the prior assumption of its action). Currently, we are unaware of a corresponding result even for the case $X = Y = \mathbb{R}$.

As for Theorem 5.3, it can be accurately stated that the condition $K \in B(C(X), C(Y))$ implies $K \in B(L_\infty(X), L_\infty(Y))$ (with equality of norms). However, it does not generally imply either the action of the operator K from $L_\infty^c(X)$ to $C(Y)$ or the validity of condition (a_c) from Theorem 5.1, even in the case of $X = Y = \mathbb{R}$. We provide a corresponding counterexample obtained in the works [7, 8].

E x a m p l e 5.1. Let $X = Y = \mathbb{R}$ and $\Omega = [0; 1]$. We define the sets

$$E(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [1 - (1-t)^{n-1} - t^2(1-t)^{n-1}; 1 - (1-t)^{n-1}] \quad (0 < t < 1)$$

and let's consider a linear integral operator K with a kernel $k : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$k(t, s) = \begin{cases} t^{-1} \chi_{E(t)}(s) & \text{if } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{if } t \in \{0; 1\}. \end{cases}$$

Then, we have $K \in B(C, C)$ and $K \in B(L_\infty, L_\infty)$. Furthermore, for any $u \in L_\infty$, the function Ku is continuous on the interval $(0; 1]$. However, the operator K does not act from L_∞ to C , and there exists a Lebesgue measurable set $A \subset [0; 1]$ such that $\int_A k(\cdot, s) ds \notin C$.

6. A convenient sufficient condition for the boundedness of an integral operator

The main results of the work (Theorems 4.1 and 5.1–5.3) utilize a constant $\|k\|_w$ expressed in terms of the kernel k and represents the exact value of the norm of the operator K in a series of pairs of functional spaces. However, the constant $\|k\|_w$ the constant uses the supremum over all functionals in the unit sphere of the space Y^* , which is not very convenient for application. In this regard, it makes sense to analyze the possibility of replacing the constant in the main results $\|k\|_w$ with a more convenient constant $\|k\|_u$, whose expression is a direct formal generalization of a well-known expression $\sup_{t \in \Omega} \int_{\Omega} |k(t, s)| ds$ for the norm of a linear integral operator in the space C (see, for example, [2, p. 183] and [3, p. 100]).

Theorem 6.1. *The following statements are true:*

- 1) *If the conditions are satisfied (a_0) and (b_u) , then $K \in B(L_\infty(X), T(Y))$.*
- 2) *If the conditions are satisfied (a_c) and (b_u) , then $K \in B(L_\infty^c(X), C(Y))$.*
- 3) *If $K : C(X) \rightarrow C(Y)$ and if the condition (b_u) is satisfied, then $K \in B(C(X), C(Y))$ and $K \in B(L_\infty(X), L_\infty(Y))$.*
- 4) *The norms of the operator K in all pairs of spaces considered in statements 1)–3) are equal $\|k\|_w$, and the estimation is valid*

$$\|K\| = \|k\|_w \leq \|k\|_u.$$

P r o o f. In the conditions of any of statements 1)–3), for any $t \in \Omega$ and $g \in Y^*$, we obtain, taking into account Assertion 3.1, the estimation

$$\int_{\Omega} \|k_*(t, s)g\|_{X^*} ds \leq \int_{\Omega} \|k_*(t, s)\|_{B(Y^*, X^*)} \|g\|_{Y^*} ds = \|g\|_{Y^*} \int_{\Omega} \|k(t, s)\|_{B(X, Y)} ds.$$

From this, it follows that

$$\|k\|_w \leq \|k\|_u. \quad (6.1)$$

From this inequality and Theorems 4.1, 5.1–5.3, all statements of the proven theorem follow in an obvious manner. $\square$

R e m a r k 6.1. For any infinite-dimensional space Y , the reciprocal propositions of 1)–3) in Theorem 6.1 do not hold. Specifically, the condition (b_u) , unlike (b_w) , is not necessary for the action and boundedness of the operator K in pairs of functional spaces as stated in the theorem. Let's demonstrate this.

It is known (see, for example, [9, p. 91]) that in every infinite-dimensional Banach space Y there exists a weakly summable sequence that is not strongly summable. In other words, there exists a sequence $(y_n)_n$ of elements in Y such that for every $g \in Y^*$, the series $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y_n, g \rangle|$ converges, while simultaneously $\sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y = \infty$.

Assuming $\dim Y = \infty$, let us fix some sequence $(y_n)_n$ satisfying the aforementioned property. Take an arbitrary countable measurable partition $\{E_n : n = 1, 2, \dots\}$ of the set Ω into sets E_n of positive measure, and define $v(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu E_n} \chi_{E_n}(s) y_n$. The constructed function $v : \Omega \rightarrow Y$ is clearly measurable. Moreover, it satisfies the following conditions:

$$\int_{\Omega} |\langle v(s), g \rangle| ds = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y_n, g \rangle| < \infty \quad (\forall g \in Y^*), \quad \int_{\Omega} \|v(s)\|_Y ds = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y = \infty.$$

Thus, the function v is integrable in the sense of Pettis, but not integrable in the sense of Bochner. Moreover, this follows from [5, p. 224],

$$M \stackrel{\text{def.}}{=} \sup_{g \in B_1(Y^*)} \int_{\Omega} |\langle v(s), g \rangle| ds < \infty.$$

Let's now consider $X = \mathbb{R}$ and define a function $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow B(\mathbb{R}, Y)$ by the equation $k(t, s)[x] = xv(s)$ ($x \in \mathbb{R}$). We then examine the linear operator K with this kernel k . It is evident that condition (a_0) is satisfied, and

$$\|k\|_w = \sup_{g \in B_1(Y^*)} \int_{\Omega} |\langle k(t, s), g \rangle| ds = M < \infty.$$

So, condition (b_w) holds. According to Theorem 4.1, we have $K \in B(L_{\infty}, T(Y))$. Moreover, it is evident that for any $u \in L_{\infty}$, the function $Ku(\cdot)$ is constant. Hence, $K \in B(L_{\infty}, C(Y))$. By Theorem 4.1, we obtain $\|K\|_{L_{\infty} \rightarrow C(Y)} = \|K\|_{C \rightarrow C(Y)} = \|k\|_w = M$. On the other hand,

$$\|k\|_u = \int_{\Omega} \|v(s)\|_Y ds = \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|_Y = \infty.$$

Therefore, condition (b_u) is not satisfied.

R e m a r k 6.2. In contrast to the property established in Remark 6.1 for any infinite-dimensional Y , we note that in the case of $\dim Y < \infty$, on the contrary, conditions (b_u) and (b_w) are equivalent. Therefore, all the necessary and sufficient conditions from Theorems 4.1 and 5.1–5.3 will remain valid if we replace the condition (b_w) with the condition (b_u) (but without replacing the constant $\|k\|_u$ in these theorems!).

In the case of $\dim Y < \infty$, not only does the estimate (6.1) hold, but there is also a two-sided estimate that can be expressed using a special constant of the finite-dimensional space Y , which depends on the choice of norm in Y .

Dedicating the following section of the work to establishing these properties of the operator K in the case of finite dimension Y .

7. Action and boundedness criteria of the integral operator and norm estimation in the case of $\dim Y < \infty$

D e f i n i t i o n 7.1. (see [10–12]) The quantity

$$\pi_1(Y) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|y_k\|_Y / \sup_{g \in B_1(Y^*)} \sum_{k=1}^n |\langle y_k, g \rangle| : n \in \{1, 2, \dots\}, y_1, \dots, y_n \in Y \setminus \{0\} \right\} \quad (7.1)$$

is called the 1-absolutely summing constant of the norm space Y of nonzero dimension.

R e m a r k 7.1. 1) Equality (7.1) correctly defines the constant $\pi_1(Y)$ (taking a finite positive value or the value $+\infty$) for any norm space Y of nonzero dimension. Moreover, $\pi_1(Y) < \infty$ if and only $\dim Y < \infty$. Note that $\pi_1(Y) = \infty$ in every infinite-dimensional Banach space Y , a consequence of the existence of a weakly summable sequence that is not strongly summable (see Remark 6.1).

2) In finite-dimensional spaces of the same dimension equipped with different norms (which, as known, are equivalent), the values of 1-absolutely summing constants, in general, are different and are related to the “geometric properties” of the space that depend on the norm.

3) In [10–12], the p -absolutely summing constant $\pi_p(Y)$ was introduced any $p \in [1; \infty)$, but in our work, it will be needed only for the case $p = 1$.

Throughout this section we assume that the $0 < \dim Y < \infty$.

We will denote the linear space $\mathbb{R}^n$ equipped with the norm $\|\cdot\|_p$ defined by

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$$

as $\mathbb{R}_p^n$ (for any $p \in [1; \infty]$).

We will present, without proof, some properties of the constant $\pi_1(Y)$ established in [11], [12]. Additionally, we will provide values of $\pi_1(Y)$ for certain specific spaces in the table.

Assertion 7.1. [properties of the constant $\pi_1(Y)$]

$$1. \quad [\dim Y = n] \Rightarrow [\sqrt{n} \leq \pi(Y) \leq n];$$

$$2. \quad \pi(\mathbb{R}_1^n) = \frac{2^n n}{\sum_{k=0}^n C_k^n |n - 2k|}, \quad \pi(\mathbb{R}_2^n) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}, \quad \pi(\mathbb{R}_\infty^n) = n, \quad \text{in particular,}$$

$$\pi(\mathbb{R}_1^{2n-1}) = \pi(\mathbb{R}_2^{2n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ and}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi_1(\mathbb{R}_1^n)$	1	2	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{128}{35}$	$\frac{128}{35}$	$\frac{256}{63}$
$\pi_1(\mathbb{R}_2^n)$	1	$\frac{\pi}{2}$	2	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{15\pi}{16}$	$\frac{16}{5}$	$\frac{35\pi}{32}$	$\frac{128}{35}$	$\frac{315\pi}{256}$

For any measurable function $v : \Omega \rightarrow Y$, let us define

$$\|v\|_1 = \int_{\Omega} \|v(s)\|_Y ds, \quad \|v\|_* = \sup_{g \in B_1(Y^*)} \int_{\Omega} |\langle v(s), g \rangle| ds.$$

In this case, if the function v is non-integrable (recall that integrability in terms of Bochner and Pettis are equivalent due to the finite-dimensionality of Y), then $\|v\|_1 = \|v\|_* = \infty$, and if it is integrable, both quantities are finite. Moreover (see, for example, [5, p. 50, 224]), on the linear space $L_1(Y)$ consisting of integrable functions $u : \Omega \rightarrow Y$ (or more precisely, their classes of μ -equivalence), the quantities $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_*$ are norms.

Assertion 7.2. *The following inequality fulfilled:*

$$\|v\|_* \leq \|v\|_1 \leq \pi_1(Y) \|v\|_*, \quad v \in L_1(Y), \quad (7.2)$$

in particular, in $L_1(Y)$ the norms $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_$ are equivalent.*

Moreover, the inequality (7.2) is unimprovable, that is

$$\inf_{v \in L_1(Y), \|v\|_* \neq 0} \frac{\|v\|_1}{\|v\|_*} = 1, \quad \sup_{v \in L_1(Y), \|v\|_* \neq 0} \frac{\|v\|_1}{\|v\|_*} = \pi_1(Y).$$

P r o o f. Clearly, $\|v\|_* \leq \|v\|_1$, and this bound is unimprovable, as for any constant function v we have $\|v\|_* = \|v\|_1$.

Let $v \in L_1(Y)$ and $\varepsilon > 0$ be arbitrary. Let us find, by definition of the Bochner integral [5, p. 44], a function $v_\varepsilon(\cdot) = \sum_{k=1}^m \chi_{E_k}(\cdot) y_k \in P(Y)$ (where sets $E_k \in \Sigma$ are pairwise disjoint and $y_k \in Y$), such that $\|v - v_\varepsilon\|_1 \leq \varepsilon$. Then, by the definition of the constant $\pi_1(Y)$, we have

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &\leq \|v_\varepsilon\|_1 + \varepsilon = \sum_{k=1}^m \|y_k\|_Y \cdot \mu(E_k) + \varepsilon \leq \pi_1(Y) \sup_{g \in B_1(Y^*)} \sum_{k=1}^m |\langle y_k, g \rangle| \mu(E_k) + \varepsilon \\ &= \pi_1(Y) \|v_\varepsilon\|_* + \varepsilon \leq \pi_1(Y) (\|v\|_* + \varepsilon) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Due to the arbitrariness of $\varepsilon > 0$ and $v \in L_1(Y)$, this inequality implies the estimation

$$\|v\|_1 \leq \pi_1(Y)\|v\|_*, \quad v \in L_1(Y). \quad (7.3)$$

Let's prove the unimprovability of the estimation (7.3). Fix an arbitrary $\delta > 0$ and find, according to the definition of $\pi_1(Y)$, such $n \in \mathbb{N}$ and elements $z_1, z_2, \dots, z_n \in Y$, that

$$\sum_{k=1}^n \|z_k\|_Y \Big/ \sup_{g \in B_1(Y^*)} \sum_{k=1}^n |\langle z_k, g \rangle| > \pi_1(Y) - \delta.$$

Let's take arbitrary measurable sets $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Sigma$ with positive measure that are pairwise disjoint, and consider the function $w(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mu(A_k)} \chi_{A_k}(s) z_k$. By construction,

$$\|w\|_1 = \sum_{k=1}^n \|z_k\|_Y > (\pi_1(Y) - \delta) \sup_{g \in B_1(Y^*)} \sum_{k=1}^n |\langle z_k, g \rangle| = (\pi_1(Y) - \delta)\|w\|_*.$$

The unimprovability of the estimation (7.3) is proven. $\square$

Note that inequality (7.2) is known and follows, for example, from Proposition 2.4 in [9, p. 96], formulated in terms of a random element and the p -absolutely summing operator induced by it. However, we preferred a direct proof.

Assertion 7.3. *If condition (a₀) is satisfied, then*

$$\pi(Y)^{-1}\|k\|_u \leq \|k\|_w \leq \|k\|_u, \quad (7.4)$$

in particular, conditions (b_u) and (b_w) are equivalent.

The inequality (7.4) is unimprovable (in both directions) for $X = \mathbb{R}$ in the class of all functions $k : \Omega^2 \rightarrow B(\mathbb{R}, Y)$ satisfying condition (a₀).

P r o o f. The inequality $\|k\|_w \leq \|k\|_u$ follows from Theorem 6.1. To prove its unimprovability, it is sufficient to consider the case $X = \mathbb{R}$ and take an arbitrary nonzero element $y_0 \in Y$ and define the kernel $k : \Omega^2 \rightarrow B(\mathbb{R}, Y)$ by the equation $k(t, s)[x] = xy_0$. In this case, it is obvious that $\|k\|_w = \|k\|_u = \|y_0\|\mu\Omega$.

Proof of the inequality

$$\pi(Y)^{-1}\|k\|_u \leq \|k\|_w \quad (7.5)$$

we proceed separately for two cases.

1⁰ step. Let $\|k\|_u < \infty$. Fix arbitrary $t \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, and according to Lemma 2.3, let's find a function $u \in L_\infty(X)$ with values in $B_1(X)$ such that

$$\int_\Omega \|k(t, s)\|_{B(X, Y)} ds \leq \int_\Omega \|k(t, s)u(s)\|_Y ds + \varepsilon = \|v\|_1 + \varepsilon \quad (7.6)$$

where $v : \Omega \rightarrow Y$ defined by $v(s) = k(t, s)u(s)$. According to Assertion 7.2,

$$\begin{aligned} \pi(Y)^{-1}\|v\|_1 &\leq \|v\|_* = \sup_{g \in B_1(Y^*)} \int_\Omega |\langle k(t, s)u(s), g \rangle| ds \\ &\leq \sup_{g \in B_1(Y^*)} \int_\Omega \sup_{x \in B_1(X)} |\langle k(t, s)x, g \rangle| ds = \sup_{g \in B_1(Y^*)} \int_\Omega \|k_*(t, s)g\|_{Y^*} ds \leq \|k\|_w. \end{aligned} \quad (7.7)$$

From (7.6) and (7.7) follows

$$\pi_1(Y)^{-1} \int_\Omega \|k(t, s)\|_{B(X, Y)} ds \leq \|k\|_w + \pi_1(Y)^{-1}\varepsilon.$$

By taking the supremum over $t \in \Omega$ and the infimum over $\varepsilon > 0$ in this inequality, we obtain the estimate (7.5).

2^o step. Let $\|k\|_u = \infty$. Fix arbitrary $R > 0$ and according to Lemma 2.3, let's find $t \in \Omega$ and a function $u \in L_\infty(X)$ with values in $B_1(X)$ such that $\int_\Omega \|k(t, s)u(s)\|_Y ds > R$. By Assertion 7.2, we obtain similarly (7.7):

$$R < \int_\Omega \|k(t, s)u(s)\|_Y ds \leq \pi_1(Y) \sup_{g \in B_1(Y^*)} \int_\Omega |\langle k(t, s)u(s), g \rangle| ds \leq \pi_1(Y) \|k\|_w.$$

By taking the supremum over all $t \in \Omega$ and $R > 0$ in this inequality, we obtain $\|k\|_w = \infty$. Thus, inequality (7.5) is proven.

To prove the unimprovability of the estimate (7.5), it is sufficient to consider the case when $\|k\|_u < \infty$. Fix an arbitrary $\delta > 0$ and according to Assertion 7.2, let's find a function $v \in L_1(Y)$ such that $\|v\|_1 > (\pi_1(Y) - \delta)\|v\|_*$. We define the kernel $k : \Omega^2 \rightarrow B(\mathbb{R}, Y)$ by the equation $k(t, s)[x] = xv(s)$. In this case, it is obvious that

$$\|k\|_u = \|v\|_1 > (\pi_1(Y) - \delta)\|v\|_* = (\pi_1(Y) - \delta)\|k\|_w.$$

Thus, the assertion is proven. $\square$

The main result concerning a linear integral operator in the case of a finite-dimensional Y follows directly from Theorems 4.1, 5.1–5.3 and Assertion 7.3.

Theorem 7.1. *Let $0 < \dim Y < \infty$. The following statements are true:*

- 1) $(a_0) \wedge (b_u) \Leftrightarrow (a_0) \wedge (b_w) \Leftrightarrow K \in B(C(X), T(Y)) \Leftrightarrow K \in B(L_\infty(X), T(Y))$.
- 2) $(a_c) \wedge (b_u) \Leftrightarrow (a_c) \wedge (b_w) \Leftrightarrow K \in B(L_\infty^c(X), C(Y))$.
- 3) *If K acts from $C(X)$ to $C(Y)$, then*
 $(b_u) \Leftrightarrow (b_w) \Leftrightarrow K \in B(C(X), C(Y)) \Rightarrow K \in B(L_\infty(X), L_\infty(Y))$.
- 4) *The norms of the operator K in all the pairs of spaces considered in statements 1)–3) are equal to $\|k\|_w$, and additionally, the following estimate holds*

$$\pi_1(Y)^{-1} \|k\|_u \leq \|K\| = \|k\|_w \leq \|k\|_u,$$

which is unimprovable in the class of bounded operators acting from $C(X)$ to $T(Y)$.

References

- [1] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis, I, II*, Dover Publications, Mineola–New York, 1957, 1961.
- [2] L. V. Kantorovich, G. P. Akilov, *Functional Analysis*, 2nd ed., Pergamon Press Ltd. & “Nauka” Publishers, Oxford–New York–Toronto–Sydney–Paris–Frankfurt, 1982.
- [3] P. P. Zabrejko, A. I. Koshelev, M. A. Krasnosel'skii, S. G. Mikhlin, L. S. Rakovshchik, V. J. Stecenko, *Integral Equations*, Noordhoff, Leyden, 1975.
- [4] M. J. Alves, E. V. Alves, J. P. S. Munembe, Y. V. Nepomnyashchikh, “Linear and nonlinear integral functionals on the space of continuous vector functions”, *Vestnik Rossiyskikh Universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 111–124 (In Russian).
- [5] J. Diestel, J. J. Uhl, *Vector Measures*, Math. Surveys, **15**, AMS, Providence, 1977.
- [6] I. V. Shragin, “Superposition measurability”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1975, № 1, 82–92 (In Russian).

- [7] Y. V. Nepomnyashchikh, *Properties of the Uryson Operator in Spaces of Uniformly Continuous and Almost Periodic Functions*, Dep VINITI, no. 2787–B92, PSU, Perm, 1992 (In Russian).
- [8] Y. V. Nepomnyashchikh, T. A. Sambo, “One example in the theory of linear integral operator”, *Actual Problems of Mechanics, Mathematics, Computer Science*, Book of Abstracts, Proceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation (Perm, 2010), Perm State University, Perm, 2010, 282 (In Russian).
- [9] N. N. Vakhania, V. I. Tarieladze, S. A. Chobanyan, *Probability Distributions on Banach Spaces*, Mathematics and its Applications, **14**, Springer Dordrecht, Holland, 1987.
- [10] Y. Gordon, “On p -absolutely summing constants of Banach spaces”, *Isr. J. Math.*, **7**:2 (1969), 151–163.
- [11] M. G. Snobar, “On p -absolutely summing constants”, *Theory of functions, functional analysis and their applications*, **16** (1972), 39–41.
- [12] M. I. Kadets, “The geometry of normed spaces”, *J. Sov. Math.*, **7** (1977), 953–973.

Information about the authors

Manuel J. Alves, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Eduardo Mondlane University, Maputo, Republic of Mozambique.
E-mail: mjalves.moz@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3713-155X>

Elena V. Alves, PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor of the School of Economy and Business Administration, Higher Institute of Sciences and Technology of Mozambique, Maputo, Republic of Mozambique.
E-mail: ealves@isctem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-1452-2553>

João S. P. Munembe, PhD of Physics and Mathematics, Full Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Eduardo Mondlane University, Maputo, Republic of Mozambique.
E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0380-6734>

Yury V. Nepomnyashchikh, PhD of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Informatics, Eduardo Mondlane University, Maputo, Republic of Mozambique. E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1374-4283>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Yury V. Nepomnyashchikh
E-mail: yuvn2@yandex.ru

Received 04.12.2023
Reviewed 29.02.2024
Accepted for press 11.03.2024

Информация об авторах

Алвес Мануэль Жоаким, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Республика Мозамбик. E-mail: mjalves.moz@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3713-155X>

Алвес Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент Школы экономики и делового администрирования, Высший институт наук и технологий Мозамбика, г. Мапуто, Республика Мозамбик. E-mail: ealves@isctem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0009-0000-1452-2553>

Мунембе Жоао Себастьян Паулу, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики и информатики, Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Республика Мозамбик. E-mail: jmunembe3@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0380-6734>

Непомнящих Юрий Витальевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики, Университет Эдуардо Мондлане, г. Мапуто, Республика Мозамбик. E-mail: yuriy.nepomnyashchikh@uem.ac.mz
ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1374-4283>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Непомнящих Юрий Витальевич
E-mail: yuvn2@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.12.2023 г.
Поступила после рецензирования 29.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Баротов Д.Н., Баротов Р.Н., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-20-28>

УДК 519.85, 517.518.244



Конструирование гладких выпуклых продолжений булевых функций

Достонжон Нумонжонович БАРОТОВ¹, Рузибой Нумонжонович БАРОТОВ²

¹ ФГБОУ ВО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации»

125167, Российская Федерация, г. Москва, пр-т Ленинградский, 49/2

² Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова

735700, Республика Таджикистан, г. Худжанд, проезд Мавлонбекова, 1

Аннотация. Системы булевых уравнений широко используются в математике, компьютерных и прикладных науках. В связи с этим, с одной стороны, для таких систем разрабатываются новые методы и алгоритмы исследования, а с другой — совершенствуются существующие методы и алгоритмы решения таких систем. Один из методов заключается в том, что, во-первых, система булевых уравнений, заданная над кольцом булевых полиномов, трансформируется в систему уравнений над полем действительных чисел, а во-вторых, трансформированная система сводится либо к задаче численной минимизации соответствующей целевой функции, либо к задаче MILP или QUBO, либо к системе полиномиальных уравнений, решаемой на множестве целых чисел, либо к эквивалентной системе полиномиальных уравнений, решаемой символьными методами. Имеется много способов, позволяющих трансформировать систему булевых уравнений в задачу непрерывной минимизации, поскольку принципиальное отличие таких методов от «переборных» алгоритмов локального поиска — на каждой итерации алгоритма сдвиг по антиградиенту производится по всем переменным одновременно. Но одна из основных проблем, возникающая при применении этих способов, состоит в том, что минимизируемая целевая функция в искомой области может иметь множество локальных минимумов, что значительно усложняет их практическое использование. В работе строится неотрицательное выпуклое и непрерывно дифференцируемое продолжение произвольной булевой функции, которое применяется к решению произвольной системы булевых уравнений. Утверждается, что задача решения произвольной системы булевых уравнений может быть конструктивно сведена к задаче минимизации функции, любой локальный минимум которой в искомой области является глобальным минимумом.

Ключевые слова: глобальная оптимизация, выпуклая функция, булева функция, продолжение булевой функции, локальный минимум

Для цитирования: Баротов Д.Н., Баротов Р.Н. Конструирование гладких выпуклых продолжений булевых функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 20–28. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-20-28>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. N. Barotov, R. N. Barotov, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-20-28>



Construction of smooth convex extensions of Boolean functions

Dostonjon N. BAROTOV¹, Ruziboy N. BAROTOV²

¹ Financial University under the Government of the Russian Federation
49/2 Leningradsky Prospekt, Moscow 125167, Russian Federation

² Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov
1 Mavlonbekova, Khujand 735700, Republic of Tajikistan

Abstract. Systems of Boolean equations are widely used in mathematics, computer science, and applied sciences. In this regard, on the one hand, new research methods and algorithms are being developed for such systems, and on the other hand, existing methods and algorithms for solving such systems are being improved. One of these methods is that, firstly, the system of Boolean equations given over the ring of Boolean polynomials is transformed into a system of equations over the field of real numbers, and secondly, the transformed system is reduced either to the problem of numerical minimization of the corresponding objective function, to a MILP or QUBO problem, to a system of polynomial equations solved on the set of integers, or to an equivalent system of polynomial equations solved by symbolic methods. There are many ways to transform a system of Boolean equations into a continuous minimization problem, since the fundamental difference between such methods and “brute force” local search algorithms is that at each iteration of the algorithm, the shift along the antigradient is performed on all variables simultaneously. But one of the main problems that arise when applying these methods is that the objective function to be minimized in the desired area can have many local minima, which greatly complicates their practical use. In this paper, a non-negative convex and continuously differentiable extension of any Boolean function is constructed, which is applied to solving an arbitrary system of Boolean equations. It is argued that the problem of solving an arbitrary system of Boolean equations can be constructively reduced to the problem of minimizing a function, any local minimum of which in the desired domain is a global minimum.

Keywords: global optimization, convex function, Boolean function, extension of a Boolean function, local minimum

Mathematics Subject Classification: 65K05, 90C25, 46N10.

For citation: Barotov D.N., Barotov R.N. Construction of smooth convex extensions of Boolean functions. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 20–28. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-20-28>
(In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

На протяжении многих десятилетий в истории цифровой науки булевы переменные были основными переменными, используемыми в большинстве компьютерных операций. Встречается много основных задач, связанных с булевыми переменными, а некоторые задачи, несмотря на зрелость области, не имеют удовлетворительных методов решения. Среди них проблема решения булевых и систем булевых уравнений [1]. Эта задача имеет множество приложений, таких как синтез, моделирование и тестирование цифровых сетей и систем СБИС, кодирование выходных данных и назначение состояний конечных автоматов, временной анализ и генерация тестов с задержкой-сбоем для комбинационных схем, автоматическая генерация тестовых шаблонов, определение начального состояния в схемах, содержащих петли обратной связи. В области криптографии булевы уравнения находят применение при анализе и взломе блочных шифров, поскольку их можно свести к проблеме решения крупномасштабной системы булевых уравнений [1–3]. И в настоящее время теория булевых функций — увлекательная область исследований в области дискретной математики с приложениями к криптографии и теории кодирования [4]. Булевы функции с высокой нелинейностью могут быть использованы для внесения путаницы в алгоритмы блочного шифрования [4, 5]. В связи с этим развивается множество новых направлений исследования и алгоритмов решения систем булевых уравнений. Одно из направлений заключается в том, что, во-первых, система булевых уравнений, заданная над кольцом булевых полиномов, преобразуется в систему уравнений над полем действительных чисел, а во-вторых, преобразованная система сводится либо к задаче численной минимизации соответствующей целевой функции [6–8], либо к задаче MILP или QUBO [9], либо к системе полиномиальных уравнений, решаемой на множестве целых чисел [1], либо к эквивалентной системе полиномиальных уравнений, решаемой символьными методами [10].

Имеется много способов, позволяющих преобразовать систему булевых уравнений в задачу непрерывной минимизации, поскольку принципиальное отличие таких методов от «переборных» алгоритмов локального поиска — на каждой итерации алгоритма сдвиг по антиградиенту производится по всем переменным одновременно [2, 3, 6–8, 11–14]. Но одна из основных проблем, возникающая при применении этих способов, заключается в том, что минимизируемая целевая функция в искомой области может иметь множество локальных минимумов, что значительно усложняет их практическое использование [2, 3, 6–8, 11, 12]. По теореме Д. Н. Баротова, полилинейное продолжение булевой функции играет важную роль в том числе и для уменьшения числа локальных минимумов целевой функции [3, 11]. Недавно в работе [11] были найдены явные формы полилинейных продолжений для произвольных функций, определенных на множестве вершин n -мерного единичного куба, произвольного куба и параллелепипеда, и в каждом конкретном случае была доказана единственность соответствующего полилинейного продолжения.

В данной работе конструируется неотрицательное выпуклое и непрерывно дифференцируемое продолжение любой булевой функции и вследствие утверждается, что задача решения произвольной системы булевых уравнений может быть конструктивно сведена к задаче минимизации функции, любой локальный минимум которой в искомой области является глобальным минимумом.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbf{B}^n = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) : b_1, b_2, \dots, b_n \in \{0, 1\}\}$ — множество всевозможных двоичных слов (булевых векторов) длины n , $\mathbf{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]\}$ — n -мерный куб, натянутый на булевы векторы длины n , $\text{int}(\mathbf{K}^n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)\}$ — внутренность куба $\mathbf{K}^n$, $\mathbf{FK}_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n : (2b_1 - 1)x_1 + (2b_2 - 1)x_2 + \dots + (2b_n - 1)x_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n - 1\}$ — фрагмент куба $\mathbf{K}^n$, противолежащий вершине $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Функцию $f : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{R}$ назовем неотрицательной выпуклой функцией на $\mathbf{K}^n$, если для любых $x, y \in \mathbf{K}^n$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ выполняется

$$0 \leq f(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y) \leq \alpha \cdot f(x) + (1 - \alpha) \cdot f(y).$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Функцию $p_C : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{R}$ назовем неотрицательным выпуклым продолжением на $\mathbf{K}^n$ булевой функции $p : \mathbf{B}^n \rightarrow \{0, 1\}$, если выполнены два следующих условия:

- a) функция p_C является выпуклой и неотрицательной на $\mathbf{K}^n$,
- b) $p_C(b_1, b_2, \dots, b_n) = p(b_1, b_2, \dots, b_n) \quad \forall (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n$.

2. Основные результаты

Лемма 2.1. Для булевой функции $K_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$, заданной формулой

$$K_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{b_1} \wedge x_2^{b_2} \wedge \dots \wedge x_n^{b_n},$$

существует выпуклое неотрицательное продолжение $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ на $\mathbf{K}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для конструирования искомого продолжения заданной булевой функции сначала покажем, что если $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ — неотрицательное выпуклое продолжение на $\mathbf{K}^n$ функции $K_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$, то для любого вектора $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{FK}_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}^n$ выполнено $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0$.

Включение $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{FK}_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}^n$ означает, что

$$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \setminus \{(b_1, b_2, \dots, b_n)\}} \lambda_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}^* \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где $\lambda_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}^* \geq 0$ и $\sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \setminus \{(b_1, b_2, \dots, b_n)\}} \lambda_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}^* = 1$. Теперь, с одной стороны, $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{K}^n$ и функция $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неотрицательна на $\mathbf{K}^n$ и, следовательно, $0 \leq f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, с другой стороны, в силу неравенства Йенсена [15]

$$\begin{aligned} f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) &= f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)} \left(\sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \setminus \{(b_1, b_2, \dots, b_n)\}} \lambda_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}^* \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) \right) \\ &\leq \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \setminus \{(b_1, b_2, \dots, b_n)\}} \lambda_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}^* \cdot f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &= \sum_{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \setminus \{(b_1, b_2, \dots, b_n)\}} \lambda_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}^* \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Из двух полученных неравенств $0 \leq f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \leq 0$ следует, что

$$f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = 0 \quad \forall (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{FK}_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}^n. \quad (2.1)$$

Теперь, пусть $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \in \mathbf{K}^n \setminus \mathbf{FK}_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}^n$. В этой точке значение функции $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ определим формулой

$$f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \left(1 + \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k^* - b_k)\right)^2. \quad (2.2)$$

Заметим, что

$$f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(b_1, b_2, \dots, b_n) = \left(1 + \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)b_k - b_k)\right)^2 = \left(1 - \sum_{k=1}^n 2b_k(1 - b_k)\right)^2 = 1. \quad (2.3)$$

Таким образом, из равенств (2.1)–(2.3) следует, что сконструированная выше функция $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ неотрицательна и

$$\begin{aligned} f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \begin{cases} 0, & \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n \setminus \{(b_1, b_2, \dots, b_n)\}, \\ 1, & \text{если } (a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n), \end{cases} \\ &= K_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(a_1, a_2, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство, остается показать, что функция $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ является выпуклой на $\mathbf{K}^n$. Объединив (2.1), (2.2), получим

$$f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 + \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) \leq 0, \\ \left(1 + \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k)\right)^2, & \text{если } 1 + \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) \geq 0. \end{cases}$$

Правая часть этого равенства может быть записана в следующем виде

$$\frac{1}{4} \left[\left(1 + \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k)\right) + \left|1 + \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k)\right| \right]^2. \quad (2.4)$$

Используя (2.4), для любых $x, y \in \mathbf{K}^n$ и $\alpha \in [0, 1]$ получаем

$$\begin{aligned} f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= \frac{1}{4} \left[\sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)(\alpha x_k + (1 - \alpha)y_k) - b_k) + 1 \right. \\ &\quad \left. + \left| \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)(\alpha x_k + (1 - \alpha)y_k) - b_k) + 1 \right| \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[\alpha \left(\sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 \right) + (1 - \alpha) \left(\sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + \left| \alpha \left(\sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 \right) + (1 - \alpha) \left(\sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 \right) \right| \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{4} \left[\alpha \left(\sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 \right) + (1 - \alpha) \left(\sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. + \alpha \left| \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 \right| + (1 - \alpha) \left| \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 \right| \right]^2 \\
 &= \frac{1}{4} \left[\alpha \left\{ \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 + \left| \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 \right| \right\} \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \alpha) \left\{ \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 + \left| \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 \right| \right\} \right]^2 \\
 &\leq \frac{1}{4} \left[\alpha \left\{ \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 + \left| \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k - b_k) + 1 \right| \right\}^2 \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \alpha) \left\{ \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 + \left| \sum_{k=1}^n ((2b_k - 1)y_k - b_k) + 1 \right| \right\}^2 \right] \\
 &= \alpha f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x) + (1 - \alpha) f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(y).
 \end{aligned}$$

Таким образом, функция $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ является выпуклой на $\mathbf{K}^n$. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Неотрицательное выпуклое продолжение на $\mathbf{K}^n$ булевой функции $K_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ является не единственным. Например, если $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$ является таким продолжением, то и функция, имеющая значения $(f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n))^2$, также будет неотрицательным выпуклым продолжением на $\mathbf{K}^n$ функции $K_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$.

Теорема 2.1. Для произвольной булевой функции $p : \mathbf{B}^n \rightarrow \{0, 1\}$ существует выпуклое неотрицательное продолжение p_C на $\mathbf{K}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задана булева функция $p : \mathbf{B}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Используя подходы, предложенные в [11, теорема 2], зададим функцию $p_C : \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{R}$ формулой

$$p_C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n} p(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.5)$$

где функция $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$, являющаяся выпуклым неотрицательным продолжением булевой функции $K_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$, определена в лемме 2.1. Докажем, что функция (2.5) является требуемым продолжением булевой функции p .

Сначала заметим, что в силу определения функция p_C выпукла на множестве $\mathbf{K}^n$, так как является суммой выпуклых функций.

Остается проверить, что для любого $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{B}^n$ выполнено $p_C(a_1, a_2, \dots, a_n) = p(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Действительно, в силу леммы 2.1 имеем:

$$\begin{aligned}
 p_C(a_1, a_2, \dots, a_n) &= \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)} p(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &\quad + \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n \setminus (a_1, a_2, \dots, a_n)} p(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &= p(a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot f_{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \\
 &\quad + \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n \setminus (a_1, a_2, \dots, a_n)} p(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot 0 = p(a_1, a_2, \dots, a_n).
 \end{aligned}$$

Итак, доказано, что функция (2.5) является выпуклым неотрицательным продолжением на $\mathbf{K}^n$ булевой функции p . $\square$

З а м е ч а н и е 2.2. Если для булевой функции p выполнено $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, то ее неотрицательное выпуклое продолжение p_C на $\mathbf{K}^n$ определяется единственным образом, причем в этом случае $p_C(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. Действительно, для $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ выполнено

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_C(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_C((1-x_1) \cdot 0 + x_1 \cdot 1, x_2, \dots, x_n) \\ &= p_C((1-x_1) \cdot 0 + x_1 \cdot 1, (1-x_1) \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2, \dots, (1-x_1) \cdot x_n + x_1 \cdot x_n) \\ &\leq (1-x_1) \cdot p_C(0, x_2, \dots, x_n) + x_1 \cdot p_C(1, x_2, \dots, x_n) \\ &\leq \dots \leq \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n} p_C(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot \prod_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k + 1 - b_k) \\ &= \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n} p(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot \prod_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k + 1 - b_k) = \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n} 0 \cdot \prod_{k=1}^n ((2b_k - 1)x_k + 1 - b_k) = 0. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2.3. Если для булевой функции p выполнено $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \not\equiv 0$, то ее неотрицательное выпуклое продолжение p_C на $\mathbf{K}^n$ не является единственным. Это прямо следует из неединственности функции $f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}$, через которую формулой (2.5) определяется функция p_C (см. замечание 2.1).

3. Применение выпуклого продолжения булевой функции к решению системы булевых уравнений

Рассмотрим систему булевых уравнений

$$p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, p_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (3.1)$$

Трансформируем эту систему в соответствующую систему выпуклых уравнений

$$p_{C1}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, p_{Cm}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (3.2)$$

где функция p_{Ci} — выпуклое продолжение булевой функции p_i , $i = \overline{1, m}$, т. е., как показано при доказательстве теоремы 2.1, может быть определена формулой

$$p_{Ci}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{B}^n} p_i(b_1, b_2, \dots, b_n) \cdot f_{(b_1, b_2, \dots, b_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Задача решения системы (3.2), очевидно, сводится к задаче минимизации функции $\bar{p}_C$, определяемой соотношением

$$\bar{p}_C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n p_{Ci}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Перечислим некоторые свойства функции $\bar{p}_C$, полезные при решении задачи минимизации (в частности, с точки зрения уменьшения количества локальных минимумов).

С в о й с т в о 3.1. На множестве $\mathbf{K}^n$ функция $\bar{p}_C$ выпуклая и непрерывно дифференцируемая.

С в о й с т в о 3.2. На множестве $\mathbf{K}^n$ любой локальный минимум функции $\bar{p}_C$ является также и глобальным минимумом.

С в о й с т в о 3.3. Если вектор $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbf{B}^n$ является решением системы (3.1), то он будет являться решением системы (3.2) и $\bar{p}_C(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0$.

С в о й с т в о 3.4. Вектор $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbf{K}^n$ будет решением системы (3.2) в том и только в том случае, когда $\bar{p}_C(r_1, r_2, \dots, r_n) = 0$.

Справедливость свойств 3.1–3.4 следует из определения функции $\bar{p}_C$.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за полезные замечания и нахождение ряда недостатков, исправление которых помогло улучшить содержание статьи.

References

- [1] A. H. Abdel-Gawad, A. F. Atiya, N. M. Darwish, “Solution of systems of Boolean equations via the integer domain”, *Information Sciences*, **180**:2 (2010), 288–300.
- [2] D. N. Barotov, R. N. Barotov, “Polylinear transformation method for solving systems of logical equations”, *Mathematics*, **10**:6 (2022), 918.
- [3] D. N. Barotov, “Target function without local minimum for systems of logical equations with a unique solution”, *Mathematics*, **10**:12 (2022), 2097.
- [4] J. A. Armario, “Boolean functions and permanents of Sylvester Hadamard matrices”, *Mathematics*, **9**:2 (2021), 177.
- [5] L. G. Valiant, “The complexity of computing the permanent”, *Theoretical Computer Science*, **8**:2 (1979), 189–201.
- [6] Р. Т. Файзуллин, В. И. Дулькейт, Ю. Ю. Огородников, “Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации”, Тр. ИММ УрО РАН, **19**, 2013, 285–294. [R. T. Faizullin, V. I. Dul’keit, Yu. Yu. Ogorodnikov, “Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **19**:2 (2013), 285–294 (In Russian)].
- [7] J. Gu, “Global optimization for satisfiability (SAT) problem”, *IEEE Transactions on Knowledge and DataEngineering*, **6**:3 (1994), 361–381.
- [8] J. Gu, Q. Gu, D. Du, “On optimizing the satisfiability (SAT) problem”, *Journal of Computer Science and Technology*, **14**:1 (1999), 1–17.
- [9] A. I. Pakhomchik, V. V. Voloshinov, V. M. Vinokur, G. B. Lesovik, “Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO penalties for cryptanalysis”, *Algorithms*, **15**:2 (2022), 33.
- [10] D. N. Barotov, R. N. Barotov, V. Soloviev, V. Feklin, D. Muzafarov, T. Ergashboev, Kh. Egamov, “The development of suitable inequalities and their application to systems of logical equations”, *Mathematics*, **10**:11 (2022), 1851.
- [11] D. N. Barotov, R. N. Barotov, “Polylinear continuations of some discrete functions and an algorithm for finding them”, *Numerical Methods and Programming (Vychislitel’nye Metody i Programirovanie)*, **24**:1 (2023), 10–23.
- [12] D. N. Barotov, A. Osipov, S. Korchagin, E. Pleshakova, D. Muzafarov, R. Barotov, D. Serdechnyy, “Transformation method for solving system of Boolean algebraic equations”, *Mathematics*, **9**:24 (2021), 3299.
- [13] G. Owen, “Multilinear extensions of games”, *Management Science*, **18**:(5-part-2) (1972), 64–79.
- [14] D. M. Wittmann, J. Krumsiek, J. Saez-Rodriguez, D. A. Lauffenburger, S. Klamt, F. J. Theis, “Transforming Boolean models to continuous models: methodology and application to T-cell receptor signaling”, *BMC Systems Biology*, **3** (2009), 98(2009).
- [15] J. L. W. V. Jensen, “Sur les fonctions convexes et les inegalites entre les valeurs moyennes”, *Acta Mathematica*, **30** (1906), 175–193.

Информация об авторах

Баротов Достонжон Нумонжонович, старший преподаватель департамента анализа данных и машинного обучения, Финансовый университет при Правительстве РФ, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: DNBarotov@fa.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5047-7710>

Баротов Рузибой Нумонжонович, докторант, кафедра математического анализа имени профессора А. Мухсинова, Худжандский государственный университет имени академика Б. Гафурова, г. Худжанд, Республика Таджикистан. E-mail: ruzmet.tj@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3729-6143>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Баротов Достонжон Нумонжонович
E-mail: DNBarotov@fa.ru

Поступила в редакцию 09.07.2023 г.
Поступила после рецензирования 13.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the authors

Dostonjon N. Barotov, Senior Lecturer, Data Analysis and Machine Learning Department, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation. E-mail: DNBarotov@fa.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5047-7710>

Ruziboy N. Barotov, Doctoral Student, Mathematical Analysis named after Professor A. Mukhsinov Department, Khujand State University named after academician Bobojon Gafurov, Khujand, Republic of Tajikistan. E-mail: ruzmet.tj@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3729-6143>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Dostonjon N. Barotov
E-mail: DNBarotov@fa.ru

Received 09.07.2023
Reviewed 13.02.2024
Accepted for press 11.03.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42>

УДК 519.71, 517.935, 623.746



Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат

Ваня Рафаелович БАРСЕГЯН^{1,2}, Тамара Алексановна СИМОНЯН²,
Арам Гагикович МАТЕВОСЯН²

¹ Институт механики НАН Армении

0019, Республика Армения, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24Б

² Ереванский государственный университет

0025, Республика Армения, г. Ереван, ул. Алека Манукяна, 1

Аннотация. Работа посвящена вопросам математического моделирования пространственного движения квадрокоптера и построению законов программного управления, обеспечивающих полет с заданными в промежуточные моменты времени значениями части координат фазового вектора. Используется структурная схема квадрокоптера с четырьмя винтовыми двигателями, позволяющая осуществлять перемещение в пространстве, вертикальный взлет и посадку. На основе законов теоретической механики получена система дифференциальных уравнений, описывающих пространственное движение такого квадрокоптера. Для линеаризованной математической модели движения квадрокоптера решена задача построения законов программного управления с заданными начальными и конечными значениями фазового вектора, а также значениями части координат фазового вектора в два промежуточных момента времени. Получено необходимое и достаточное условие существования программного управления и описано соответствующее движение квадрокоптера. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения. В качестве иллюстрации полученных результатов для конкретных начальных, конечных и промежуточных значений получены явные выражения функции программного управления, программного движения и построены соответствующие графики.

Ключевые слова: математическая модель движения квадрокоптера, управление полетом, многоточечные промежуточные условия, фазовые траектории

Для цитирования: Барсегян В.Р., Симонян Т.А., Матевосян А.Г. Об одной задаче управления квадрокоптером с заданными промежуточными значениями разных частей координат // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 29–42. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42>

SCIENTIFIC ARTICLE

© V. R. Barseghyan, T. A. Simonyan, A. G. Matevosyan, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42>

On one problem of quadcopter control with given intermediate values of different parts of coordinates

Vanya R. BARSEGHYAN^{1,2}, Tamara A. SIMONYAN², Aram G. MATEVOSYAN²¹ Institute of Mechanics of National Academy of Science of the Republic of Armenia

24B Marshal Baghramyan Ave., Yerevan 0019, Republic of Armenia

² Yerevan State University

1 Alec Manukyan St., Yerevan 0025, Republic of Armenia

Abstract. The work is devoted to the issues of mathematical modeling of the spatial motion of a quadcopter and the construction of program control laws that ensure flight with the values of part of the coordinates of the phase vector specified at intermediate times. A structural diagram of a quadcopter with four propeller engines is used, which allows for movement in space, vertical takeoff and landing. Based on the laws of theoretical mechanics, a system of differential equations is obtained that describes the spatial motion of such a quadcopter. For a linearized mathematical model of quadcopter motion, the problem of constructing program control laws with given initial and final values of the phase vector, as well as the values of part of the coordinates of the phase vector at two intermediate moments of time, has been solved. A necessary and sufficient condition for the existence of program control is obtained and the corresponding movement of the quadcopter is described. Control functions and corresponding phase trajectories of motion are constructed. To illustrate the results obtained, for specific initial, final and intermediate values, explicit expressions of the program control function, program motion are obtained and the corresponding graphs are constructed.

Keywords: mathematical model of quadcopter motion, flight control, multi-point intermediate conditions, phase trajectories

Mathematics Subject Classification: 93C05, 93C85, 70Q05.

For citation: Barseghyan V.R., Simonyan T.A., Matevosyan A.G. On one problem of quadcopter control with given intermediate values of different parts of coordinates. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 29–42. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-29-42> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Все большую популярность получают беспилотные летательные аппараты в виде многовинтовых устройств, а чаще — квадрокоптеров. Квадрокоптеры обладают рядом преимуществ, таких как надежность и простота конструкции, большая стабильность, компактность и маневренность, малая взлетная масса. Область применения квадрокоптеров достаточно широка и не ограничена военной отраслью (см. [1–3]). Например, квадрокоптеры могут быть использованы как недорогое и эффективное средство для получения фото- и видеоизображений с воздуха. Квадрокоптер хорошо подходит для наблюдения и контроля объектов, территорий и зон, доступ к которым затруднен, или в условиях, непригодных для человека (см. [2–4]). Исследованиям различных задач, связанных с полетом (эксплуатацией) квадрокоптеров, посвящены, в частности, работы [5–7]. В [8] предложен способ управления квадрокоптером, оснащенным манипулятором. В [9–11] изложены основы моделирования и алгоритмы управления квадрокоптером.

В прикладных задачах при моделировании и проектировании движений различных механических систем, в частности, движения квадрокоптеров, возникают задачи управления движением с многоточечными промежуточными условиями (см. [12–14]). В подобных задачах управления наряду с классическими краевыми (начальное и конечное) условиями необходимо также учитывать многоточечные промежуточные условия (см. [15–17]). Эти задачи управления имеют важное прикладное и теоретическое значение.

В работе рассматривается пространственное движение квадрокоптера. Он имеет шесть степеней свободы и четыре управляющих воздействия. Управляющие силы и моменты формируются с помощью четырех двигателей, вращающих установленные на их роторах воздушные винты. Перемещение квадрокоптера в пространстве без вращения вокруг одной из осей, т. е. без наклона квадрокоптера невозможно. Для выполнения требуемого наклона квадрокоптера необходимо изменить крутящий момент относительно одной из осей. Математическая модель квадрокоптера с четырьмя двигателями незаменима при последующем моделировании алгоритма управления и движения. В математической модели полета в форме дифференциальных уравнений Ньютона–Эйлера учитываются особенности динамики системы. Для линеаризованной математической модели движения квадрокоптера рассмотрена задача построения законов управления с заданными начальными, конечными значениями фазового вектора и промежуточными значениями части координат в некоторые моменты времени. Построены функции управления и соответствующие фазовые траектории движения, учитывающие промежуточные значения части координат в заданные моменты времени. В качестве приложения предложенного подхода для конкретных численных значений определены явные выражения функции управления, соответствующие фазовые траектории и построены графики полученных функций.

1. Математическая модель динамики квадрокоптера и постановка задачи

В качестве динамического объекта управления рассматривается модель геометрического симметричного беспилотного летательного аппарата (БПЛА) — квадрокоптера, построенного по классической четырехвинтовой схеме, структура которого представлена на рис. 1.

Положение квадрокоптера с массой m в пространстве характеризуется координатами x, y, z центра масс аппарата в неподвижной декартовой системе координат и тремя углами (углы Эйлера) φ, ϑ, ψ поворота вокруг осей системы координат, жестко связанной

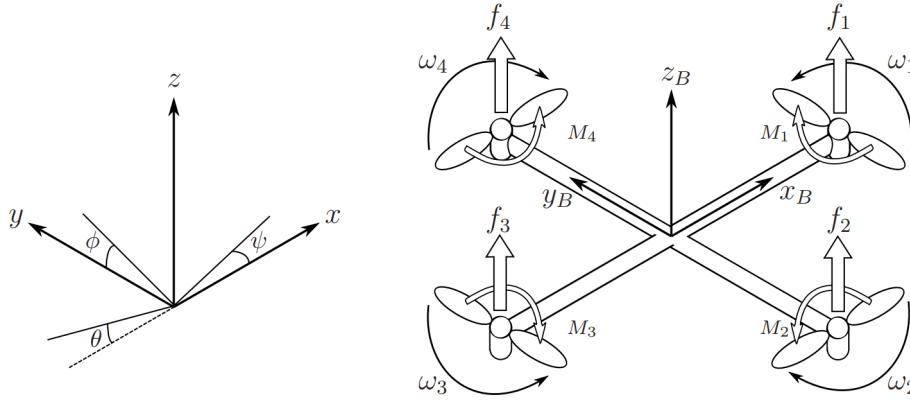


Рис. 1. Структурная схема БПЛА

с аппаратом, причем начало координат совпадает с центром масс аппарата. Здесь φ — угол тангажа (т. е. угол наклона квадрокоптера относительно оси Ox), ϑ — угол крена (т. е. угол наклона БПЛА относительно оси Oy), ψ — угол рыскания (т. е. угол наклона квадрокоптера относительно оси Oz). Движение квадрокоптера в задачах динамики управления полетом рассматривается как сложное — движение центра масс и движение вокруг центра масс [9–11]. Для составления математической модели квадрокоптера приняты следующие допущения [1–3]:

- квадрокоптер симметричен относительно осей x и y ;
- рама квадрокоптера и его винты абсолютно жесткие;
- каждый двигатель располагается на конце стержня;
- тяга, создаваемая каждым винтом, перпендикулярна плоскости xu .

Движение квадрокоптера осуществляется благодаря четырем винтам. Каждый из винтов имеет свой привод (электродвигатель), придающий ему вращение вокруг вертикальной оси. Таким образом, каждый из двигателей создает тягу и момент вращения. Движение управляемого квадрокоптера основано на создании изменяемых по величине и направлению сил и моментов, влияющих на квадрокоптер.

Описанная динамическая система имеет четыре управляющих воздействия, соответствующих угловым скоростям четырех винтов.

Угловые скорости винтов обозначим через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, силы тяги, создаваемые вращением винтов — через f_1, f_2, f_3, f_4 , а моменты, которые образуются в результате вращения винтов — через M_1, M_2, M_3, M_4 . Для получения математической модели динамики квадрокоптера введем неподвижную систему координат $Oxyz$, а в центре масс O_B квадрокоптера закрепим неподвижную систему координат $O_B x_B y_B z_B$. Обозначим через x, y, z координаты центра масс квадрокоптера относительно системы координат $Oxyz$. Опишем вращательное движение квадрокоптера в инерциальной системе координат $Oxyz$, используя углы Эйлера φ, ϑ, ψ . Тогда пространственное положение квадрокоптера описывается двумя векторами

$$\xi = (x, y, z)^T, \quad \eta = (\varphi, \vartheta, \psi)^T.$$

Здесь и далее буква « T » в верхнем индексе означает операцию транспонирования. В системе координат $O_B x_B y_B z_B$ запишем векторы линейной скорости V_B и угловой скорости v

$$V_B = (V_{Bx}, V_{By}, V_{Bz})^T, \quad v = (p, q, r)^T.$$

А матрица поворота системы координат $O_B x_B y_B z_B$ относительно неподвижной инерциальной системы координат $Oxyz$ будет:

$$R = \begin{pmatrix} C_\psi C_\vartheta & C_\psi S_\vartheta S_\varphi - S_\psi C_\varphi & C_\psi S_\vartheta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi C_\vartheta & S_\psi S_\vartheta S_\varphi + C_\psi C_\varphi & S_\psi S_\vartheta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ -S_\vartheta & C_\vartheta S_\varphi & C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix},$$

где $C_\alpha = \cos \alpha$, $S_\alpha = \sin \alpha$, $\alpha = \varphi, \vartheta, \psi$.

Легко проверить, что матрица R ортогональна, следовательно, $R^{-1} = R^T$, и является матрицей перехода из инерциальной системы координат $Oxyz$ в систему $O_B x_B y_B z_B$.

Матрицы R и R^{-1} используются для получения проекций вектора V_B в инерциальной системе координат.

Матрица W преобразования из инерциальной системы координат $Oxyz$ в систему $O_B x_B y_B z_B$ и матрица W^{-1} обратного преобразования для вектора угловой скорости v в данном случае имеют вид

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & C_\vartheta S_\varphi \\ 0 & -S_\varphi & C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix}$$

и

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & S_\varphi T_\vartheta & C_\varphi T_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & \frac{S_\varphi}{C_\vartheta} & \frac{C_\varphi}{C_\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Здесь $T_\alpha = \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha = \varphi, \vartheta, \psi$. Заметим, что матрица W обратима тогда и только тогда, когда $\vartheta \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Теперь, используя матрицу преобразования W и ее обратную W^{-1} , получаем

$$\dot{\eta} = W^{-1}v, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & S_\varphi T_\vartheta & C_\varphi T_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & \frac{S_\varphi}{C_\vartheta} & \frac{C_\varphi}{C_\vartheta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

и

$$v = W_\eta \dot{\eta}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\vartheta \\ 0 & C_\varphi & C_\vartheta S_\varphi \\ 0 & -S_\varphi & C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Благодаря указанному на рис. 1 выбору системы координат $O_B x_B y_B z_B$, квадрокоптер расположен симметрично относительно осей $O_B x_B$ и $O_B y_B$. Следовательно, инерционная матрица I будет диагональной

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix},$$

где I_{xx} , I_{yy} и I_{zz} — моменты инерции квадрокоптера относительно осей Ox , Oy и Oz , соответственно, и $I_{xx} = I_{yy}$.

Угловая скорость ω_i винта i ($i = \overline{1,4}$) создает силу тяги f_i ($i = \overline{1,4}$), направленную по оси винта. Угловая скорость ω_i , ($i = \overline{1,4}$) и угловое ускорение $\dot{\omega}_i$, ($i = \overline{1,4}$) винта i ($i = \overline{1,4}$) также создают крутящий момент M_i ($i = \overline{1,4}$) вокруг оси винта. Сила тяги и крутящий момент определяются по формулам

$$f_i = k\omega_i^2, \quad M_i = b\omega_i^2 + I_M\dot{\omega}_i, \quad i = \overline{1,4},$$

где k — постоянная подъемной силы, b — постоянная сопротивления (т. е. k и b — коэффициенты пропорциональности, характеризующие особенности роторов), I_M — момент инерции винта (одинаковый для всех винтов). Влияние углового ускорения $\dot{\omega}_i$ ($i = \overline{1,4}$) настолько мало, что им можно пренебречь. Суммарная сила тяги f сил f_1, f_2, f_3, f_4 направлена вдоль оси $O_B z_B$. Обозначим τ_B — вектор крутящего момента, который включает крутящие моменты $\tau_\varphi, \tau_\vartheta, \tau_\psi$, соответствующие углам Эйлера φ, ϑ, ψ . Сила тяги и крутящий момент определяются по формулам

$$f = \sum_{i=1}^4 f_i = k \sum_{i=1}^4 \omega_i^2, \quad F_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad \tau_B = \begin{pmatrix} \tau_\varphi \\ \tau_\vartheta \\ \tau_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} lk(-\omega_2^2 + \omega_4^2) \\ lk(-\omega_1^2 + \omega_3^2) \\ \sum_{i=1}^4 M_i \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где l — расстояние от осей винта (т. е. центра роторов) до центра масс квадрокоптера.

Физический смысл формул (1.2) очевиден. Можно изменить угловые скорости четвертого и второго винтов, тем самым изменить угол крена. Таким же образом можно изменить угол наклона (тангажа), изменяя скорости вращения первого и третьего винтов. Для изменения угла рыскания можно уменьшить скорости вращения двух диагональных винтов (второго и четвертого) и увеличить скорости вращения двух других (первого и третьего) или наоборот, увеличить скорости вращения двух диагональных винтов (второго и четвертого) и уменьшить скорости вращения двух других (первого и третьего).

Для получения дифференциальных уравнений движения квадрокоптера воспользуемся вторым законом Ньютона и динамическими уравнениями Эйлера. Таким образом, относительно системы координат $O_B x_B y_B z_B$ получим (подробнее см. [9–11]) уравнения

$$m\dot{V}_B + v \times mV_B = R^T G + F_B,$$

где $G = (0, 0, -g)^T$, g — ускорение свободного падения. А относительно системы координат $Oxyz$ будем иметь

$$m\ddot{\xi} = G + RF_B,$$

или

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \frac{f}{m} \begin{pmatrix} C_\psi S_\vartheta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi S_\vartheta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ C_\vartheta C_\varphi \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

В системе координат $O_B x_B y_B z_B$ сумма углового ускорения инерции $I\dot{v}$, центробежных сил $v \times Iv$ и гироскопических сил Γ равна внешнему крутящему моменту

$$I\dot{v} + v \times (Iv) + \Gamma = \tau_B, \quad (1.4)$$

где

$$\Gamma = I_r \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_\Gamma, \quad \omega_\Gamma = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4.$$

Здесь I_r — момент инерции квадрокоптера относительно его мгновенной оси вращения. Таким образом, из (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \dot{v} &= I^{-1} \left(- \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_{xx}p \\ I_{yy}q \\ I_{zz}r \end{pmatrix} - I_r \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \omega_\Gamma + \tau_B \right), \\ \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{(I_{yy}-I_{zz})qr}{I_{xx}} \\ \frac{(I_{zz}-I_{xx})pr}{I_{yy}} \\ \frac{(I_{xx}-I_{yy})pq}{I_{zz}} \end{pmatrix} - I_r \begin{pmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{pmatrix} \omega_\Gamma + \begin{pmatrix} \frac{\tau_\varphi}{I_{xx}} \\ \frac{\tau_\vartheta}{I_{yy}} \\ \frac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Имея угловые ускорения в системе координат $O_Bx_By_Bz_B$, можно получить угловые ускорения в системе координат $Oxyz$, используя матрицу преобразования W^{-1} и ее производную по времени.

$$\begin{aligned} \ddot{\eta} &= \frac{d}{dt} (W^{-1}v) = \frac{d}{dt} (W^{-1}) v + W^{-1}\dot{v} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi}C_\varphi T_\vartheta + \frac{\dot{\vartheta}S_\varphi}{C_\vartheta^2} & -\dot{\varphi}S_\varphi C_\vartheta + \frac{\dot{\vartheta}C_\varphi}{C_\vartheta^2} \\ 0 & -\dot{\varphi}S_\varphi & -\dot{\varphi}C_\varphi \\ 0 & \frac{\dot{\varphi}C_\varphi}{C_\vartheta} + \frac{\dot{\varphi}S_\varphi T_\vartheta}{C_\vartheta} & -\frac{\dot{\varphi}S_\varphi}{C_\vartheta} + \frac{\dot{\vartheta}C_\varphi T_\vartheta}{C_\vartheta} \end{pmatrix} v + W^{-1}\dot{v}. \end{aligned}$$

Из (1.1), (1.3), (1.5) получим следующую систему уравнений относительно компонент векторов:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{f}{m}C_\psi S_\vartheta C_\varphi + \frac{f}{m}S_\psi S_\varphi, \quad \ddot{y} = \frac{f}{m}S_\psi S_\vartheta C_\varphi - \frac{f}{m}C_\psi S_\varphi, \quad \ddot{z} = -g + \frac{f}{m}C_\vartheta C_\varphi, \\ \dot{\varphi} &= p + \frac{S_\varphi S_\vartheta}{C_\vartheta}q + \frac{C_\varphi S_\vartheta}{C_\vartheta}r, \quad \dot{\vartheta} = C_\varphi q - S_\varphi r, \quad \dot{\psi} = \frac{S_\varphi}{C_\vartheta}q + \frac{C_\varphi}{C_\vartheta}r, \\ \dot{p} &= \frac{(I_{yy}-I_{zz})qr}{I_{xx}} - I_r \frac{q}{I_{xx}}\omega_\Gamma + \frac{\tau_\varphi}{I_{xx}}, \quad \dot{q} = \frac{(I_{zz}-I_{xx})pr}{I_{yy}} - I_r \frac{p}{I_{yy}}\omega_\Gamma + \frac{\tau_\vartheta}{I_{yy}}, \\ \dot{r} &= \frac{(I_{xx}-I_{yy})pq}{I_{zz}} - I_r \frac{q}{I_{zz}}\omega_\Gamma + \frac{\tau_\psi}{I_{zz}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Линеаризуем математическую модель квадрокоптера (1.6). Линеаризацию произведем в окрестности начала координат, считая, что углы φ, ϑ, ψ — малы, соответствующие синусы равны нулю и косинусы равны единице. Далее введя обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = \dot{x}, \quad x_3 = y, \quad x_4 = \dot{y}, \quad x_5 = z, \quad x_6 = \dot{z}, \\ x_7 &= \varphi, \quad x_8 = \vartheta, \quad x_9 = \psi, \quad x_{10} = p, \quad x_{11} = q, \quad x_{12} = r, \end{aligned}$$

окончательно получим систему линеаризованных уравнений, описывающих динамику линейной модели квадрокоптера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = gx_8, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -gx_7, \quad \dot{x}_5 = x_6, \quad \dot{x}_6 = u_1, \\ \dot{x}_7 &= x_{10}, \quad \dot{x}_8 = x_{11}, \quad \dot{x}_9 = x_{12}, \quad \dot{x}_{10} = \frac{u_2}{I_{xx}}, \quad \dot{x}_{11} = \frac{u_3}{I_{yy}}, \quad \dot{x}_{12} = \frac{u_4}{I_{zz}}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $u_1 = \frac{f}{m} - g$, $u_2 = \tau_\varphi$, $u_3 = \tau_\vartheta$, $u_4 = \tau_\psi$ — управляющие воздействия. Далее будем обозначать $U(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^T$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что система (1.7) является вполне управляемой (см. [18, гл. 6]).

Пусть заданы начальное (при $t = t_0$) и конечное (при $t = T$) состояния системы (1.7)

$$x(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_{12}(t_0))^T, \quad x(T) = (x_1(T), \dots, x_{12}(T))^T, \quad (1.8)$$

а также значения

$$x_5(t_1), x_1(t_2), x_3(t_2) \quad (1.9)$$

части координат фазового вектора в заданные промежуточные моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ ($t_0 < t_1 < t_2 < T$).

Рассмотрим следующую задачу: требуется найти условия, при которых существует программное управляющее воздействие $U(t)$, $t \in [t_0, T]$ и программное движение $x(t)$, удовлетворяющие системе (1.7) и условиям (1.8) и (1.9), а также построить их.

2. Решение задачи

Решение уравнения (1.7) с помощью формулы Коши запишем следующим образом (см. [18, § 5], [19, с. 13]):

$$x[t] = X[t, t_0] x(t_0) + \int_{t_0}^t H[t, \tau] U(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

где $X[t, \tau]$ — нормированная фундаментальная матрица решения однородной части уравнения (1.7), а $H[t, \tau]$ — импульсно-переходная матрица, которая имеет вид:

$$H[t, \tau] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & t - \tau & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{g(t-\tau)^3}{6I_{xx}} & -\frac{g(t-\tau)^2}{2I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{t-\tau}{I_{xx}} & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ \frac{g(t-\tau)^3}{6I_{yy}} & \frac{g(t-\tau)^2}{2I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t-\tau}{I_{yy}} & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t-\tau}{I_{zz}} & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{pmatrix}^T.$$

Применяя подходы, приведенные в работах [15], [16, гл. 3], [17], для определения законов управления с учетом условий (1.8) и (1.9) получим следующие интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \frac{g(T-t)^3}{6I_{yy}} u_3(t) dt &= C_1, \quad \int_{t_0}^T \frac{g(T-t)^2}{2I_{yy}} u_3(t) dt = C_2, \quad \int_{t_0}^T -\frac{g(T-t)^3}{6I_{xx}} u_2(t) dt = C_3, \\ \int_{t_0}^T -\frac{g(T-t)^2}{2I_{xx}} u_2(t) dt &= C_4, \quad \int_{t_0}^T (T-t) u_1(t) dt = C_5, \quad \int_{t_0}^T u_1(t) dt = C_6, \\ \int_{t_0}^T \frac{T-t}{I_{xx}} u_2(t) dt &= C_7, \quad \int_{t_0}^T \frac{T-t}{I_{yy}} u_3(t) dt = C_8, \quad \int_{t_0}^T \frac{T-t}{I_{zz}} u_4(t) dt = C_9, \\ \int_{t_0}^T \frac{1}{I_{xx}} u_2(t) dt &= C_{10}, \quad \int_{t_0}^T \frac{1}{I_{yy}} u_3(t) dt = C_{11}, \quad \int_{t_0}^T \frac{1}{I_{zz}} u_4(t) dt = C_{12}, \\ \int_{t_0}^{t_2} \frac{g(t_2-t)^3}{6I_{yy}} u_3(t) dt &= C_{13}, \quad \int_{t_0}^{t_2} -\frac{g(t_2-t)^2}{6I_{xx}} u_2(t) dt = C_{14}, \quad \int_{t_0}^{t_1} (t_1-t) u_1(t) dt = C_{15}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
C_1 &= x_1(T) - x_1(t_0) - x_2(t_0)(T - t_0) - \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_8(t_0) - \frac{g}{6}(T - t_0)^3 x_{11}(t_0), \\
C_2 &= x_2(T) - x_2(t_0) - x_8(t_0)g(T - t_0) - \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_{11}(t_0), \\
C_3 &= x_3(T) - x_3(t_0) - x_4(t_0)(T - t_0) + \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_7(t_0) + \frac{g}{6}(T - t_0)^3 x_{10}(t_0), \\
C_4 &= x_4(T) - x_4(t_0) + x_7(t_0)g(T - t_0) + \frac{g}{2}(T - t_0)^2 x_{10}(t_0), \\
C_5 &= x_5(T) - x_5(t_0) - x_6(t_0)(T - t_0), \\
C_j &= x_j(T) - x_j(t_0), \quad j = 6, 10, 11, 12, \\
C_7 &= x_7(T) - x_7(t_0) - x_{10}(t_0)(T - t_0), \quad C_8 = x_8(T) - x_8(t_0) - x_{11}(t_0)(T - t_0), \\
C_9 &= x_9(T) - x_9(t_0) - x_{12}(t_0)(T - t_0), \\
C_{13} &= x_1(t_2) - x_1(t_0) - x_2(t_0)(t_2 - t_0) - \frac{g}{2}(t_2 - t_0)^2 x_8(t_0) - \frac{g}{6}(t_2 - t_0)^3 x_{11}(t_0), \\
C_{14} &= x_3(t_2) - x_3(t_0) - x_4(t_0)(t_2 - t_0) + \frac{g}{2}(t_2 - t_0)^2 x_7(t_0) + \frac{g}{6}(t_2 - t_0)^3 x_{10}(t_0), \\
C_{15} &= x_5(t_1) - x_5(t_0) - (t_1 - t_0)x_6(t_0).
\end{aligned}$$

В векторно-матричной форме полученные интегральные соотношения будут иметь вид

$$\int_{t_0}^T H(t) U(t) dt = \sigma(t_0, t_1, t_2, T), \quad (2.2)$$

где $\sigma(t_0, t_1, t_2, T) = (C_1, \dots, C_{15})^T$; элементы 15×4 матрицы $H(t) = H[T, t]$ определяются формулами

$$\begin{aligned}
h_1^{(3)}[T, t] &= \frac{g(T-t)^3}{6I_{yy}}, \quad h_2^{(3)}[T, t] = \frac{g(T-t)^2}{2I_{yy}}, \quad h_3^{(2)}[T, t] = -\frac{g(T-t)^3}{6I_{xx}}, \\
h_4^{(2)}[T, t] &= -\frac{g(T-t)^2}{2I_{xx}}, \quad h_5^{(1)}[T, t] = (T-t), \quad h_6^{(1)}[T, t] = 1, \quad h_7^{(2)}[T, t] = \frac{T-t}{I_{xx}}, \\
h_8^{(3)}[T, t] &= \frac{T-t}{I_{yy}}, \quad h_9^{(4)}[T, t] = \frac{T-t}{I_{zz}}, \quad h_{10}^{(2)}[T, t] = \frac{1}{I_{xx}}, \quad h_{11}^{(3)}[T, t] = \frac{1}{I_{yy}}, \\
h_{12}^{(4)}[T, t] &= \frac{1}{I_{zz}}, \quad h_{13}^{(1)}[t_1, t] = \begin{cases} t_1 - t & \text{при } t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < t \leq T \end{cases}, \\
h_{14}^{(3)}[t_2, t] &= \begin{cases} -\frac{g(t_2-t)^3}{6I_{yy}} & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}, \quad h_{15}^{(2)}[t_2, t] = \begin{cases} -\frac{g(t_2-t)^3}{6I_{xx}} & \text{при } t_0 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{при } t_2 < t \leq T \end{cases}
\end{aligned}$$

(нижний индекс j функции $h_j^{(i)}$ обозначает номер строки, а верхний индекс i — номер столбца матрицы), все остальные не приведенные элементы матрицы $H(t)$ равны нулю.

Из (2.2) следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Система (1.7) с условиями (1.8) и (1.9) вполне управляема тогда и только тогда, когда для любого вектора $\sigma(t_0, t_1, t_2, T)$ можно найти управление $U(t)$, $t \in [t_0, T]$, удовлетворяющее условию (2.2).

Управляющее воздействие $U(t)$, удовлетворяющее интегральному соотношению (2.2), представим в виде (см. [16, с. 116–118], [19, § 2])

$$U(t) = H^T(t)Q^{-1}\sigma(t_0, t_1, t_2, T) + e(t), \quad (2.3)$$

где

$$Q = \int_{t_0}^T H(t)H^T(t)dt, \quad (2.4)$$

а вектор-функция $e(t)$ удовлетворяет соотношению $\int_{t_0}^T H(t)e(t)dt = 0$.

Таким образом, решение задачи можно сформулировать в виде следующей теоремы, аналогичной теореме, доказанной в [19, гл. I].

Теорема 2.1. *Для того чтобы существовало программное управление (2.3) и соответствующее ему решение системы (1.7), удовлетворяющее условиям (2.1) (или (2.2)), необходимо и достаточно, чтобы определяемая соотношением (2.4) матрица Q была не особой или чтобы ранги матрицы Q и расширенной матрицы $\{Q, \sigma\}$ совпадали.*

Здесь матрица Q имеет размерность (15×15) и

$$\det Q = \frac{g^{12}T^{23}(T-t_1)^3 t_1^3 (T-t_2)^{14} t_2^{14}}{20808145575327301632000000 I_{xx}^{10} I_{yy}^{10} I_{zz}^4}.$$

Отсюда видно, что матрица Q не особая.

Подставляя выражение для функции управления $U(t)$ в формулу Коши (2.1), получим соответствующее программное движение. Затем, если найденные выражения функции управления $U(t)$ подставить в (1.7) и проинтегрировать эти уравнения при заданных начальном и промежуточных значениях фазового вектора на каждом промежутке времени, получим законы движения.

Иллюстрацией вышеизложенного служит следующий пример.

Пример 2.1. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 = 2$, $t_2 = 6$, $T = 12$,

$$x(0) = (0, 2, 0, 5, 0, 4, 6, 2, 1, 1, 3, 1, 0, 0, 0)^T,$$

$$x(T) = (0, 5, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 50, 80, 100)^T,$$

$$x_5(t_1) = 50, \quad x_1(t_2) = 80, \quad x_3(t_2) = 100.$$

По вышеприведенным формулам вычислим значения элементов матриц $H^T(t)$, Q^{-1} и вектора σ и подставим их значения в формулы (2.3). Для простоты предполагая, что $e(t) = 0$, получим явные выражения для управляющих воздействий в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \begin{cases} \frac{116}{3} - \frac{53t}{2} & \text{при } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{284}{15} + \frac{23t}{10} & \text{при } 2 < t \leq 12 \end{cases}, \\ u_2(t) &= \begin{cases} -\frac{22021}{1512} + \frac{2935t}{168} - \frac{172535t^2}{36288} + \frac{33445t^3}{93312} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{8719}{72} - \frac{76145t}{1512} + \frac{79235t^2}{12096} - \frac{176125t^3}{653184} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases}, \\ u_3(t) &= \begin{cases} -\frac{149225}{10584} + \frac{41539t}{3528} - \frac{646183t^2}{254016} + \frac{15107t^3}{93312} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{29327}{1176} - \frac{81967t}{10584} + \frac{20017t^2}{28224} - \frac{1757t^3}{93312} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases}, \\ u_4(t) &= -\frac{25}{8} + \frac{31t}{48}. \end{aligned}$$

Графики управляющих воздействий приведены ниже (см. рис. 2–5).

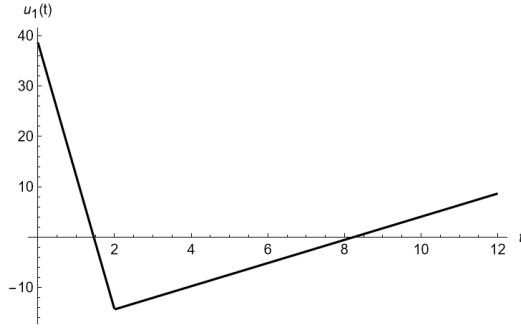


Рис. 2. График функции управления $u_1(t)$

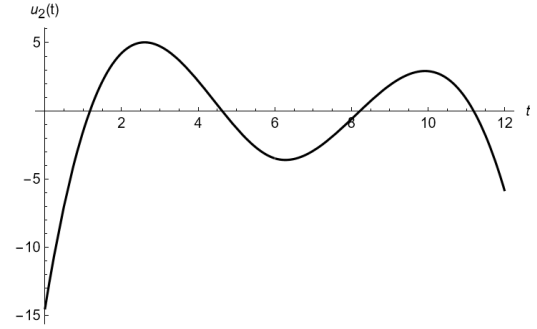


Рис. 3. График функции управления $u_2(t)$

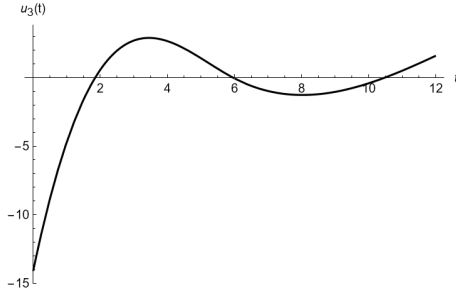


Рис. 4. График функции управления $u_3(t)$

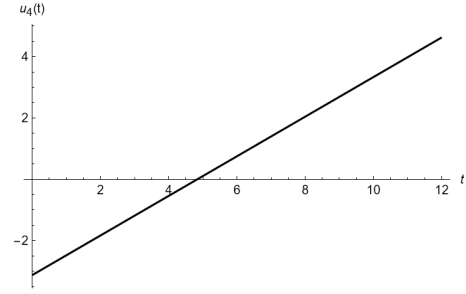


Рис. 5. График функции управления $u_4(t)$

Если подставить найденные выражения функции управления $U(t)$ в уравнения (1.7) и проинтегрировать эти уравнения при заданных начальном и промежуточных значениях фазового вектора на каждом промежутке времени, получим законы фазового вектора. Считаем целесообразным привести только законы движения для геометрических координат, которые имеют следующие явные виды:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= \begin{cases} 2t + \frac{49t^2}{5} + \frac{49t^3}{10} - \frac{29845t^4}{10368} + \frac{41539t^5}{86400} - \frac{646183t^6}{18662400} + \frac{105749t^7}{111974400} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ \frac{7378}{25} - \frac{25673t}{75} + \frac{27293t^2}{150} - \frac{23177t^3}{540} + \frac{29327t^4}{5760} - \frac{81967t^5}{259200} + \\ + \frac{20017t^6}{2073600} - \frac{12299t^7}{111974400} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases}, \\
 x_3(t) &= \begin{cases} 5t - \frac{147t^2}{5} - \frac{49t^3}{30} + \frac{154147t^4}{25920} - \frac{4109t^5}{2880} + \frac{241549t^6}{1866240} - \frac{46823t^7}{11197440} & \text{при } 0 \leq t \leq 6 \\ -\frac{10256}{5} + \frac{35971t}{15} - \frac{18389t^2}{15} + \frac{89299t^3}{270} - \frac{427231t^4}{8640} + \\ + \frac{106603t^5}{25920} - \frac{110929t^6}{622080} + \frac{7045t^7}{2239488} & \text{при } 6 < t \leq 12 \end{cases}, \\
 x_5(t) &= \begin{cases} \frac{1}{12} (48t + 232t^2 - 53t^3) & \text{при } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{60} (-2304 + 3696t - 568t^2 + 23t^3) & \text{при } 2 < t \leq 12 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Графики фазовой вектор-функции $x(t)$ по геометрическим координатам $x_1(t)$, $x_3(t)$ и $x_5(t)$ при $t \in [0, 12]$ представлены на рис. 6–8. Траектория движения изображена на рис. 9.

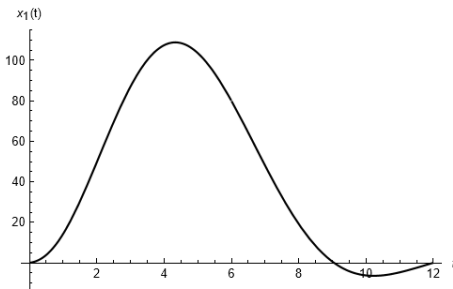
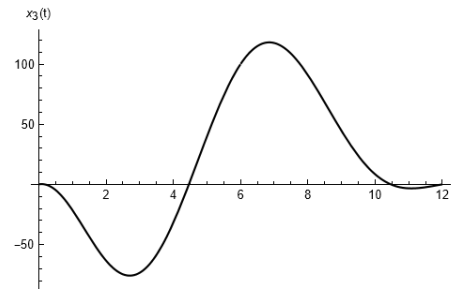
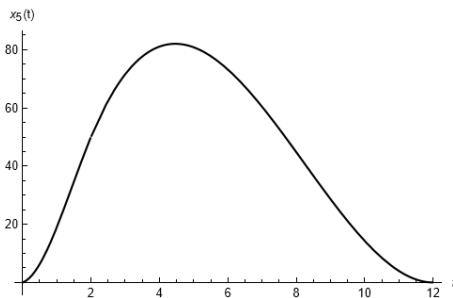
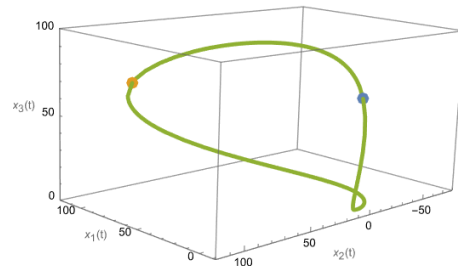
Рис. 6. График функции $x_1(t)$ Рис. 7. График функции $x_3(t)$ Рис. 8. График функции $x_5(t)$ 

Рис. 9. Траектория движения

References

- [1] Д. В. Ситников, Ю. А. Бурьян, Г. С. Русских, “Автопилот мультикоптера”, *Известия Тульского государственного университета. Технические науки*, 2012, № 7, 213–221. [D. V. Sitnikov, Y. A. Burian, G. S. Russkih, “Motion control system of multicopter”, *Proceedings Of The Tula States University. Technical sciences*, 2012, № 7, 213–221 (In Russian)].
- [2] Д. Т. Рубин, В. Н. Конев, А. В. Стариковский, А. А. Шептунов, А. С. Смирнов, А. М. Толстая, “Разработка квадрокоптеров со специальными свойствами для проведения разведывательных операций”, *Спецтехника и связь*, 2012, № 1, 28–30. [D. T. Rubin, V. N. Konev, A. V. Starikovskiy, A. A. Sheptunov, A. S. Smirnov, A. M. Tolstaya, “Development of special quadcopters for survey works”, *Special Machinery and Communications*, 2012, № 1, 28–30 (In Russian)].
- [3] М. И. Эпов, И. Н. Злыгостев, “Применение беспилотных летательных аппаратов в аэрогеофизической разведке”, *Интерэкспо Гео-Сибирь*, 2:3 (2012), 22–27. [M. I. Epov, I. N. Zlygostev, “Application of unmanned aerial vehicles in airborne geophysical reconnaissance”, *Interekspos GEO-Sibir*, 2:3 (2012), 22–27 (In Russian)].
- [4] С. В. Телухин, В. В. Матвеев, “Беспилотный летательный аппарат как объект управления”, *Мехатроника, автоматизация, управление*, 2008, № 10, 7–10. [S. V. Telukhin, V. V. Matveev, “Unmanned aerial vehicle as an object management”, *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2008, № 10, 7–10 (In Russian)].
- [5] T. Chettibi, M. Haddad, “Dynamic modelling of a quadrotor aerial robot”, *Journées D’etudes Nationales de Mécanique*, 2007, 22–27.
- [6] A. Mokhtari, A. Benallegue, “Dynamic feedback controller of Euler angles and wind parameters estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle”, *IEEE International Conference on Robotics and Automation. V. 3, Proceedings of the International Conference ICRA ’04 (New Orleans, LA USA, 26 April 2004 – 01 May 2004)*, IEEE, 2004, 2359–2366.
- [7] L. Derafa, T. Madani, A. Benallegue, “Dynamic modelling and experimental identification of four rotors helicopter parameters”, *IEEE International Conference on Industrial Technology. V. Art.*

- 4237837, Proceedings of the International Conference (Mumbai, India, 15–17 December 2006), IEEE, 2006, 1834–1839.
- [8] А. А. Маргун, К. А. Зименко, Д. Н. Базылев и др., “Система управления беспилотным летательным аппаратом, оснащенный робототехническим манипулятором”, *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2014, №6 (94), 54–62. [A. A. Margun, K. A. Zimenko, D. N. Bazylev, A. A. Bobtsov, A. S. Kremlev, D. D. Ibraev, “Control system for unmanned aircraft equipped with robotics arm”, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2014, №6 (94), 54–62 (In Russian)].
- [9] Т. Luukkonen, “Modelling and control of quadcopter”, 2011. URL: https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf.
- [10] T. Puls, A. Hein, “3D trajectory control for quadrocopter”, *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Proceedings of the International Conference (Taipei, Taiwan, 18–22 October 2010), IEEE, 2010, 640–645.
- [11] Z. Benić, P. Piljek and D. Kotarski, “Mathematical modelling of unmanned aerial vehicles with four rotors”, *Interdisciplinary Description of Complex Systems*, **14**:1 (2016), 88–100.
- [12] Л. Т. Ащепков, “Оптимальное управление системой с промежуточными условиями”, *Прикладная математика и механика*, **45**:2 (1981), 215–222; англ. пер.: L. T. Ashchepkov, “Optimal control of a system with intermediate conditions”, *J. Appl. Math. Mech.*, **45**:2 (1981), 153–158.
- [13] В. А. Дыхта, О. Н. Самсонок, “Принцип максимума для гладких задач оптимального импульсного управления с многоточечными фазограничениями”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **49**:6, 981–997; англ. пер.: V. A. Dykhta, O. N. Samsonyuk, “A maximum principle for smooth optimal impulsive control problems with multipoint state constraints”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **49**:6 (2009), 942–957.
- [14] В. Р. Барсегян, “Управление линейными динамическими системами с ограничениями на значения частей координат фазового вектора в промежуточные моменты времени”, *Доклады НАН РА*, **110**:3 (2010), 251–260. [V. R. Barseghyan, “Controlling of linear dynamic systems with restrictions on values of parts of coordinates of a phase vector in the intermediate moments of time”, *Reports NAS RA*, **110**:3 (2010), 251–260 (In Russian)].
- [15] V. R. Barseghyan, T. V. Barseghyan, “On an approach to the problems of control of dynamic system with nonseparated multipoint intermediate conditions”, *Automation and Remote Control*, **76**:4 (2015), 549–559.
- [16] В. Р. Барсегян, *Управление составных динамических систем и систем с многоточечными промежуточными условиями*, Наука, М., 2016, 230 с. [V. R. Barseghyan, *Control of Composite Dynamic Systems and Systems with Multipoint Intermediate Conditions*, Nauka Publ., Moscow, 2016 (In Russian), 230 pp.]
- [17] V. Barseghyan, S. Solodusha, “On one problem in optimal boundary control for string vibrations with a given velocity of points at an intermediate moment of time”, *IEEE International Russian Automation Conference (RusAutoCon)*, Proceedings of the International Conference (Sochi, Russian Federation, 05–11 September 2021), IEEE, 2021, 343–349.
- [18] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением*, Наука, М., 1968, 476 с. [N. N. Krasovskii, *Theory of Control of Motion*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 476 pp.]
- [19] В. И. Zubov, *Лекции по теории управления*, Наука, М., 1975, 496 с. [V. I. Zubov, *Lectures on Control Theory*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 496 pp.]

Информация об авторах

Барсегян Ваня Рафаелович, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт механики НАН Республики Армения; профессор кафедры математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения. E-mail: barseghyan@sci.am

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Information about the authors

Vanya R. Barseghyan, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Leading Scientific Researcher of Institute of Mechanics of NAS of RA; Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia. E-mail: barseghyan@sci.am

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6518-3694>

Симонян Тамара Алексановна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения. E-mail: simtom09@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0434-6183>

Матевосян Арам Гагикович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математики и механики, Ереванский государственный университет, г. Ереван, Республика Армения. E-mail: matevosaram@gmail.com, amatevosyan@ysu.am
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3432-2253>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Барсегян Ваня Рафаелович
E-mail: barseghyan@sci.am

Поступила в редакцию 13.07.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Tamara A. Simonyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. Associate Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia. E-mail: simtom09@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0434-6183>

Aram G. Matevosyan, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor. Associate Professor of Mathematics and Mechanics Department, Yerevan State University, Yerevan, Republic of Armenia. E-mail: matevosaram@gmail.com, amatevosyan@ysu.am
ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3432-2253>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Vanya R. Barseghyan
E-mail: barseghyan@sci.am

Received 13.07.2023
Reviewed 07.02.2024
Accepted for press 11.03.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Бурлаков Е.О., Верхлютов В.М., Мальков И.Н., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50>

УДК 517.988, 517.968, 51-76



О корректности математической модели вызванной активности первичной зрительной коры

Евгений Олегович БУРЛАКОВ^{1,2}, Виталий Михайлович ВЕРХЛЮТОВ³,
Иван Николаевич МАЛЬКОВ^{1,2}

¹ ФГАОУ ВО «Тюменский государственный университет»

625003, Российская Федерация, г. Тюмень, ул. Володарского, 6

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

³ ФГБУН «Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН»

117485, Российская Федерация, г. Москва, ул. Бутлерова, 5А

Аннотация. В работе предлагается математическая модель, формализующая макро- и мезоуровневую динамику электрических потенциалов в первичной зрительной коре испытуемых, отвечающую предъявлению им визуальных стимулов. В основе математического аппарата лежит двухслойная модель нейронного поля, представленная системой интегро-дифференциальных уравнений, в которой глубинный слой нейронного поля моделирует электрическую активность, не зависящую напрямую от пространственной ориентации визуальных стимулов, а активность поверхностного слоя чувствительна к пространственно ориентированным стимулам. Схема эксперимента по предъявлению серии визуальных стимулов описывается в настоящем исследовании с помощью задачи импульсного управления для упомянутой двухслойной модели нейронного поля. Предлагается специальное метрическое пространство, с помощью которого показывается однозначная разрешимость задачи управления в стандартных для математической нейробиологии предположениях относительно функций, входящих в моделирующие уравнения. Формулируются достаточные условия непрерывной зависимости решений от импульсных управляющих воздействий.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, нелинейные интегральные уравнения, двухслойная модель нейронного поля, импульсное управление, корректность

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-00756, <https://rscf.ru/project/22-21-00756/>).

Для цитирования: Бурлаков Е.О., Верхлютов В.М., Мальков И.Н. О корректности математической модели вызванной активности первичной зрительной коры // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 43–50.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50>

SCIENTIFIC ARTICLE

© E. O. Burlakov, V. M. Verkhlyutov, I. N. Malkov, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50>

On well-posedness of a mathematical model of evoked activity in the primary visual cortex

Evgenii O. BURLAKOV^{1,2}, Vitaly M. VERKHLIUTOV³, Ivan N. MALKOV^{1,2}¹ Tyumen State University

6 Volodarskogo St., Tyumen 625003, Russian Federation

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

³ Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology of RAS

5A Butlerova St., Moscow 117485, Russian Federation

Abstract. We propose a mathematical model that formalizes the macro- and meso-level dynamics of electrical potentials in the primary visual cortex of subjects, which corresponds to the presentation of visual stimuli to them. The mathematical framework is based on a two-layer neural field model, represented by a system of integro-differential equations, where the deep layer of the neural field models electrical activity that does not depend directly on the spatial orientation of the visual stimuli, whereas the activity of the superficial layer is sensitive to spatially oriented stimuli. The experimental design of presenting a series of visual stimuli is formalised in the present study in terms of an impulse control problem for the aforementioned two-layer neural field model. We propose a special metric space for construction of a unique solution to the control problem under standard assumptions for mathematical neurobiology regarding the functions involved in the modeling equations. We formulate sufficient conditions for continuous dependence of the solutions on the impulse control.

Keywords: integro-differential equations, nonlinear integral equations, bi-laminar neural field model, impulsive control, well-posedness

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 22-21-00756, <https://rscf.ru/en/project/22-21-00756/>).

Mathematics Subject Classification: 37N25, 34K35.

For citation: Burlakov E.O., Verkhlyutov V.M., Malkov I.N. On well-posedness of a mathematical model of evoked activity in the primary visual cortex. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 43–50.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-43-50> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Зрительная кора является одной из наиболее изученных нейрофизиологами структур головного мозга. «Зрительный путь» начинается от светочувствительных и ганглионарных клеток сетчатки и, продолжаясь в колленчатые ядра зрительных бугров, заканчивается в первичной зрительной коре.

Функциональная микроструктура первичной зрительной коры была открыта Д. Хьюбелом и Т. Визелем [1], получившими за это в 1981 году Нобелевскую премию. Несмотря на существенную по времени историю вопроса, до сих пор продолжаются исследования структуры и функций зрительной коры. Открытие Хьюбелом и Визелем ориентационных колонок, отвечающих за избирательное восприятие направленных линий, расположенных параллельно корковой поверхности, позже было дополнено идентификацией объединяющих их гиперколонок. Если активность нейронов ориентационных колонок возможно регистрировать внутриклеточными электродами, то гиперколонки можно идентифицировать только при оптическом картировании [2].

Наряду с визуализацией гиперколонок, оптическое картирование выявило синхронную работу больших популяций нейронов в виде электрической активации, распространяющейся вдоль поверхности коры [3]. Подобная активация обладает богатой пространственно-временной динамикой, включающей сложные и разнообразные волновые паттерны, такие как бегущие и спиральные волны [4]. Ввиду обусловленности данной активности синхронизацией нейронов на значительных площадях коры, она может быть зарегистрирована макроэлектродами (ЭЭГ) или магнитными датчиками (МЭГ). Таким образом, имеется возможность судить о работе функциональной микроструктуры зрительной коры, например, на основании взаимодействия с ней двумерных волн электрических потенциалов, регистрируемых МЭГ и ЭЭГ [5].

Целью данной работы является построение математической модели динамики электрических потенциалов в первичной зрительной коре испытуемых при предъявлении им визуальных стимулов (в том числе задействующих ориентационные колонки пространственно ориентированных стимулов).

Основой используемого математического аппарата является следующая модель двухслойного нейронного поля, формализующая электрическую активность первичной зрительной коры головного мозга, предложенная в работе [6] и изученная с математической точки зрения в [7]:

$$\begin{aligned} \partial_t u_d(t, x) &= -\tau_d u_d(t, x) + \int_{\Omega} \omega_d(x, y) f_d(u_d(t, y)) dy + \nu_d \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f_s(u_s(t, x, \psi)) d\psi, \\ \partial_t u_s(t, x, \varphi) &= -\tau_s u_s(t, x, \varphi) + \int_{\Omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \omega_s(x, \varphi, y, \psi) f_s(u_s(t, y, \psi)) d\psi dy + \nu_s f_d(u_d(t, x)). \end{aligned} \quad (0.1)$$

Здесь $u_d(t, x)$ и $u_s(t, x, \varphi)$ — уровни активности, соответственно, ориентационно-независимого глубокого слоя и ориентационно-зависимого поверхностного слоя зрительной коры. Скорости процессов активации в слоях определяются временными константами τ_d и τ_s , связи нейронов внутри каждого из слоев формализуются при помощи функций ω_d и ω_s . Степень воздействия активности глубокого слоя на активность поверхностного слоя

представлена коэффициентом ν_d , степень обратно направленного воздействия — коэффициентом ν_s . Функции f_d, f_s — вероятностные функции активации в глубоком и поверхностном слоях модели, соответственно. В математической нейробиологии стандартно предполагается, что функции связи ω_i являются экспоненциально убывающими функциями расстояния в нейронном поле (или линейными комбинациями таких функций), функции активации f_i представлены непрерывными функциями сигмоидальной формы ($i = d, s$).

Рассмотрим формализацию воздействия на активность функциональной микроструктуры зрительной коры в виде следующей задачи импульсного управления в задаче Коши для системы (0.1) с начальным условием $(u_d(0, x), u_s(0, x, \varphi)) = (\hat{u}_d(x), \hat{u}_s(x, \varphi))$:

$$\begin{aligned} u_d(t, x) &= \hat{u}_d(x) + \int_0^t \int_{\Omega} e^{-\tau_d(t-s)} \omega_d(x, y) f_d(u_d(t, y)) dy ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau_d(t-s)} \nu_d f_s(u_s(t, x, \psi)) d\psi ds, \\ u_s(t, x, \varphi) &= \hat{u}_s(x, \varphi) + \int_0^t \int_{\Omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\tau_s(t-s)} \omega_s(x, \varphi, y, \psi) f_s(u_s(t, y, \psi)) d\psi dy ds \\ &\quad + \int_0^t e^{-\tau_s(t-s)} \nu_s f_d(u_d(t, x)) ds + \mathcal{U}(t, x, \varphi). \end{aligned} \tag{0.2}$$

Здесь $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t, x, \varphi)$ — импульсное управление, которое может иметь разрывы по переменной времени t .

В данной работе получены результаты об однозначной разрешимости системы (0.2) и непрерывной зависимости решения от управления $\mathcal{U}$.

1. Основной результат

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, через $\mathbb{R}^n$ — n -мерное вещественное векторное пространство с нормой $|\cdot|$. Для компакта $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2)$ пространство непрерывных функций $v : \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию $\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} v(\cdot, \varphi) \equiv v(\cdot, \frac{\pi}{2})$, с нормой $\|v\|_{C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2)} = \max_{x \in \Omega, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |v(x, \varphi)|$.

Относительно системы (0.2) будем предполагать, что

(A _{ω}) Функции связи $\omega_d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\omega_s : \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, функция ω_s интегрируема (по Лебегу) по четвертому аргументу и удовлетворяет условию $\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \omega_s(\cdot, \varphi, \cdot, \cdot) \equiv \omega_s(\cdot, \frac{\pi}{2}, \cdot, \cdot)$.

(A _{f}) Функции активации $f_d, f_s : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ липшицевы.

(A _{$\mathcal{U}$}) Управление $\mathcal{U}$ имеет вид: $\mathcal{U}(t, x, \varphi) = \sum_{\forall k} \chi_{A_k}(t) \vartheta_k(x, \varphi)$, $A_k \subset [0, \infty)$ — полуинтервалы вида $A_k = [a_k, b_k)$, такие что $b_k \leq a_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$; χ_{A_k} — характеристическая функция множества A_k ; функции $\vartheta_k \in C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$, $\vartheta_k(\cdot, \cdot) \not\equiv 0$,

$k \in \mathbb{N}$, формализуют импульсные воздействия (естественным образом предполагаем, что если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ имеет место $b_k = a_{k+1}$, то $\vartheta_k \neq \vartheta_{k+1}$); при этом для любого $T > 0$ существует такое $k_T \in \mathbb{N}$, что $\max\{k : A_k \cap [0, T] \neq \emptyset\} \leq k_T$.

Определим множество $\mathcal{M}_\infty = \mathcal{M}_\infty([0, \infty), C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2))$ функций, имеющих вид $u = (\xi, \zeta + \eta)^T$, где функции $\xi : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\zeta : [0, \infty) \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны, функция $\eta : [0, \infty) \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$, $\eta(t, x, \varphi) = \sum_{\forall k} \chi_{A_k}(t) \vartheta_k(x, \varphi)$, удовлетворяет условию $(\mathbf{A}_u)$.

Для произвольного $T > 0$ обозначим через $\mathcal{M}_T = \mathcal{M}_T([0, T], C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R}^2))$ множество сужений на $[0, T]$ функций из $\mathcal{M}_\infty$. Покажем, что множество $\mathcal{M}_T$ образует полное метрическое пространство относительно метрики

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{M}([0, T])}(u^1, u^2) &= \|\xi^1 - \xi^2\|_{C([0, T] \times \Omega, \mathbb{R})} + \|\zeta^1 - \zeta^2\|_{C([0, T] \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})} \\ &+ \int_0^T \left\| \sum_{k: A_k^1 \cap [0, T] \neq \emptyset} \chi_{A_k^1}(t) \vartheta_k^1(\cdot, \cdot) - \sum_{k: A_k^2 \cap [0, T] \neq \emptyset} \chi_{A_k^2}(t) \vartheta_k^2(\cdot, \cdot) \right\|_{C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})} dt. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Будем говорить, что $\kappa \in C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ является существенным значением отображения $\mathcal{U} : [0, T] \rightarrow C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$, если найдется такое $t_0 \in [0, T]$, что $\kappa = \mathcal{U}(t_0)$, и существует такое $\delta > 0$, что $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t_0)$ для всех $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, T]$.

По определению, каждое управление задается совокупностью полуинтервалов A_k (отвечающих временным интервалам предъявления стимулов) и соответствующих им ненулевых существенных значений ϑ_k отображения $\mathcal{U} : [0, T] \rightarrow C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ (характеризующих предъявляемые стимулы). Пусть отображение $\mathcal{U}_{(K+1)} : [0, T] \rightarrow C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ имеет $K + 1$ ненулевых существенных значений на отрезке $[0, T]$. Покажем, что оно не может быть пределом последовательности управлений, имеющих не более K ненулевых существенных значений на отрезке $[0, T]$. Выберем $\varepsilon < d\mathfrak{M}$, где

$$\begin{aligned} d &= \min \left\{ \min_{i=1, \dots, K} (\|\vartheta_i - \vartheta_{i+1}\|_{C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})}), \min_{i=1, \dots, K+1} (\|\vartheta_i\|) \right\}, \\ \mathfrak{M} &= \min \left\{ \min_{k=1, \dots, K+1} (\mu(A_k)), \min_{\forall i} (\mu(D_i)) \right\}, \end{aligned}$$

где $D_i \subset [0, T] \setminus \bigcup_{k=1}^{K+1} A_k$. Мы получаем, что для любого отображения $\mathcal{U}_{\leq K} : [0, T] \rightarrow C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$, имеющего не более K ненулевых существенных значений на отрезке $[0, T]$, выполнено неравенство $\int_0^T \|\mathcal{U}_{(K+1)}(t) - \mathcal{U}_{\leq K}(t)\|_{C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})} dt > \varepsilon$.

Следовательно, отображение, имеющее на $[0, T]$ ровно $K + 1$ ненулевых существенных значений, не может быть пределом последовательности отображений, имеющих не более K ненулевых существенных значений на $[0, T]$, и множество $\mathcal{M}_T$ образует полное метрическое пространство относительно метрики (1.1).

Последнее означает, что множество $\mathcal{M}_\infty$ можно снабдить топологией сходимости по метрике (1.1) на каждом из его подмножеств $\mathcal{M}_T$, $T > 0$.

Будем считать глобальным решением системы (0.2) вектор-функцию $u \in \mathcal{M}_\infty$, компоненты которой удовлетворяют уравнениям (0.2). Для всякого $T > 0$ назовем T -локальным решением (0.2) функцию $u_T \in \mathcal{M}_T$, удовлетворяющую уравнениям (0.2) на множестве $[0, T] \times \Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условия $\mathbf{A}_f$ и $\mathbf{A}_\omega$. Тогда для любого управления $\mathcal{U}$, удовлетворяющего условию $\mathbf{A}_\mathcal{U}$, существует единственное глобальное решение системы (0.2), и всякое T -локальное решение (0.2) является его частью. Пусть также при всех $T > 0$ выполнено условие

$$\int_0^T \max_{x \in \Omega, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |\mathcal{U}^i(t, x, \varphi) - \mathcal{U}^0(t, x, \varphi)| dt \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty.$$

Тогда последовательность решений u^i , соответствующих управлениям $\mathcal{U}^i$, сходится в топологии пространства $\mathcal{M}_\infty$ к решению u^0 , соответствующему управлению $\mathcal{U}^0$.

Доказательство. Перепишем систему (0.2) в виде:

$$u(t, x, \varphi) = \hat{u}(x, \varphi) + \int_0^t \int_\Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t, s, x, y, \varphi, \psi) F(u(s, y, \psi)) d\psi dy ds + \lambda(t, x, \varphi),$$

где

$$u(t, x, \varphi) = \begin{pmatrix} u_d(t, x) \\ u_s(t, x, \varphi) \end{pmatrix}, \quad \hat{u}(x, \varphi) = \begin{pmatrix} \hat{u}_d(x) \\ \hat{u}_s(x, \varphi) \end{pmatrix},$$

$$\lambda(t, x, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{k: A_k \cap [0, T] \neq \emptyset} \chi_{A_k}(t) \vartheta_k(x, \varphi) \end{pmatrix}, \quad F(u) = \begin{pmatrix} f_d(u_d) \\ f_s(u_s) \end{pmatrix},$$

$$W(t, s, x, y, \varphi, \psi) = \begin{pmatrix} e^{-\tau_d(t-s)} & 0 \\ 0 & e^{-\tau_s(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_d(x, y)/\pi & \nu_s \delta(x - y) \\ \nu_d \delta(x - y) & \omega_s(x, \varphi, y, \psi)/\pi \end{pmatrix},$$

где символом $\delta(\cdot)$ обозначена дельта-функция Дирака.

Зафиксируем произвольное $T > 0$. Определим оператор $\mathcal{F} : \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_T \rightarrow \mathcal{M}_T$,

$$(\mathcal{F}(u, \lambda))(t, x, \varphi) = \hat{u}(x, \varphi) + \int_0^t \int_\Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t, s, x, y, \varphi, \psi) F(u(s, y, \psi)) d\psi dy ds + \lambda(t, x, \varphi)$$

и при произвольном $\lambda \in \mathcal{M}_T$ рассмотрим операторное уравнение (относительно неизвестного $u \in \mathcal{M}_T$)

$$u = \mathcal{F}(u, \lambda). \quad (1.2)$$

Покажем справедливость следующих утверждений.

1. Существуют такие $q < 1$, $\sigma > 0$, что для любого $\hat{t} \in [0, T]$ и всех $u^1, u^2 \in \mathcal{M}_T$, $u^1(\hat{t}, \cdot, \cdot) \equiv u^2(\hat{t}, \cdot, \cdot)$ имеет место

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [\hat{t}, \hat{t} + \sigma], x \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left| \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + \sigma} \int_\Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t, s, x, y, \varphi, \psi) F(u^1(s, y, \psi)) d\psi dy ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + \sigma} \int_\Omega \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t, s, x, y, \varphi, \psi) F(u^2(s, y, \psi)) d\psi dy ds \right| \\ & \leq q \max_{t \in [\hat{t}, \hat{t} + \sigma], x \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |u^1(t, x, \varphi) - u^2(t, x, \varphi)|. \end{aligned}$$

2. Для произвольного $u \in \mathcal{M}_T$ отображение $\mathcal{F} : \mathcal{M}_T \times \mathcal{M}_T \rightarrow \mathcal{M}_T$ непрерывно в точке (u, λ_0) .

Покажем, что первое утверждение справедливо. Имеем

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [\hat{t}, \hat{t} + \sigma], x \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left| \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + \sigma} \int_{\Omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t, s, x, y, \varphi, \psi) F(u^1(s, y, \psi)) d\psi dy ds \right. \\ & \quad \left. - \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + \sigma} \int_{\Omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} W(t, s, x, y, \varphi, \psi) F(u^2(s, y, \psi)) d\psi dy ds \right| \\ & \leq \int_{\hat{t}}^{\hat{t} + \sigma} \int_{\Omega} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \max_{t \in [0, T], x \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} (W(t, s, x, y, \varphi, \psi)) \\ & \quad \times \max_{t \in [\hat{t}, \hat{t} + \sigma], x \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \left| F(u^1(s, y, \psi)) - F(u^2(s, y, \psi)) \right| d\psi dy ds \\ & \leq \sigma G \ell \max_{t \in [\hat{t}, \hat{t} + \sigma], x \in \mathbb{R}, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} |u^1(t, x, \varphi) - u^2(t, x, \varphi)|, \end{aligned}$$

где ℓ — константа Липшица отображения $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

За счет выбора $\sigma > 0$ для $q = \sigma G \ell$ можно достичь неравенства $q < 1$, следовательно, утверждение 1 доказано.

В силу задания метрики пространства $\mathcal{M}_T$ равенством (1.1) для любого $u \in \mathcal{M}_T$ имеет место $\rho_{\mathcal{M}_T}(\mathcal{F}(u, \lambda_i), \mathcal{F}(u, \lambda_0)) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$. То есть, утверждение 2 также справедливо.

Определим семейство v отношений эквивалентности $v(\gamma)$, $\gamma \in [0, 1]$, на множестве $\mathcal{M}_T$ как равенство функций $u : [0, T] \rightarrow C(\Omega \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \mathbb{R}^2)$ на отрезках $[0, \gamma T]$. С учетом этого определения, утверждения 1 и 2 позволяют применить к операторному уравнению (1.2) теорему 2.2 работы [8], гарантирующую существование единственного решения этого операторного уравнения и, соответственно, системы (0.2), а также сходимость последовательности решений u^i к решению u^0 при сходимости соответствующих функций управления $\mathcal{U}^i$ к функции $\mathcal{U}^0$. $\square$

References

- [1] D. H. Hubel, T. N. Wiesel, “Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat’s visual cortex”, *The Journal of Physiology*, **160**:1 (1962), 106–154.
- [2] D. Y. Ts’o, R. D. Frostig, E. E. Lieke, A. Grinvald, “Functional organization of primate visual cortex revealed by high resolution optical imaging”, *Science*, **249**:4967 (1990), 417–420.
- [3] T. D. Fehervari, Y. Okazaki, H. Sawai, T. Yagi, “In vivo voltage-sensitive dye study of lateral spreading of cortical activity in mouse primary visual cortex induced by a current impulse”, *PLoS ONE*, **10**:7 (2015), e0133853.
- [4] Y. Liang, J. Liang, C. Song, M. Liu, T. Knopfel, P. Gong, C. Zhou, “Complexity of cortical wave patterns of the wake mouse cortex”, *Nature Communications*, **14**:1434 (2023), 1434(2023).
- [5] P. C. Bressloff, J. D. Cowan, “An amplitude equation approach to contextual effects in visual cortex”, *Neural Computation*, **14**:3 (2002), 493–525.
- [6] P. C. Bressloff, “Spatiotemporal dynamics of continuum neural fields”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **45**:3 (2012), 033001.

- [7] E. Burlakov, I. Malkov, “On Bi-Laminar Neural Field Models of Electrical Activity in the Primary Visual Cortex”, *Advances in Systems Science and Applications*, **23**:3 (2023), 177–190.
- [8] E. O. Burlakov, E. S. Zhukovskiy, “On well-posedness of neural field equations with impulsive control”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **21**:1 (2016), 16–27.

Информация об авторах

Бурлаков Евгений Олегович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник института X-BIO, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7286-9456>

Верхлютов Виталий Михайлович, кандидат медицинских наук, старший научный сотрудник лаборатории высшей нервной деятельности человека, Институт высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: verkhliutov@ihna.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8353-6884>

Мальков Иван Николаевич, аспирант, институт математики и компьютерных наук, Тюменский государственный университет, г. Тюмень, Российская Федерация. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5845-5591>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Бурлаков Евгений Олегович
E-mail: eb_@bk.ru

Поступила в редакцию 20.09.2023 г.
Поступила после рецензирования 25.11.2023 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the authors

Evgenii O. Burlakov, PhD, Researcher at the Insitute X-BIO, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: eb_@bk.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7286-9456>

Vitaly M. Verkhlyutov, MD, Senior Researcher of Laboratory of Human Higher Nervous Activity, Institute of Higher Nervous Activity and Neurophysiology of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: verkhliutov@ihna.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8353-6884>

Ivan N. Malkov, Post-Graduate Student, Institute of Mathematics and Computer Science, Tyumen State University, Tyumen, Russian Federation. E-mail: i.n.malkov@yandex.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5845-5591>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Evgenii O. Burlakov
E-mail: eb_@bk.ru

Received 20.09.2023
Revieweud 25.11.2023
Accepted for press 11.03.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Волков А.А., Измаилов А.Ф., Усков Е.И., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-51-64>

УДК 519



Методы с суженной матрицей Гессе как возмущенный метод Ньютона–Лагранжа

Андрей Андреевич ВОЛКОВ¹, Алексей Ферилович ИЗМАИЛОВ¹,
Евгений Иванович УСКОВ²

¹ ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»
119992, ГСП-2, Российская Федерация, г. Москва, Ленинские горы, 1

² ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

Аннотация. Для задачи оптимизации с ограничениями-равенствами обсуждается возможность интерпретации методов последовательного квадратичного программирования, использующих суженную на ядро матрицы Якоби ограничений матрицу Гессе функции Лагранжа, как возмущенного метода Ньютона–Лагранжа. Показано, что такая интерпретация с нужными оценками на возмущения возможна для определенных последовательностей, генерируемых вариантами метода с поправками второго порядка. Это позволяет с общих позиций установить сверхлинейную скорость сходимости таких последовательностей, вообще говоря отсутствующую для основных последовательностей рассматриваемых методов.

Ключевые слова: задача оптимизации с ограничениями-равенствами, последовательное квадратичное программирование, суженная матрица Гессе функции Лагранжа, схема возмущенного метода Ньютона–Лагранжа, поправки второго порядка, сверхлинейная сходимость

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 24-21-00015, <https://rscf.ru/project/24-21-00015/>).

Для цитирования: Волков А.А., Измаилов А.Ф., Усков Е.И. Методы с суженной матрицей Гессе как возмущенный метод Ньютона–Лагранжа // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 51–64. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-51-64>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. A. Volkov, A. F. Izmailov, E. I. Uskov, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-51-64>

Reduced Hessian methods as a perturbed Newton–Lagrange method

Andrey A. VOLKOV¹, Alexey F. IZMAILOV¹, Evgeniy I. USKOV²¹ Lomonosov Moscow State University

1 Leninskiye Gory, Moscow 119991, Russian Federation

² Derzhavin Tambov State University

33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

Abstract. For an equality-constrained optimization problem, we consider the possibility to interpret sequential quadratic programming methods employing the Hessian of the Lagrangian reduced to the null space of the constraints' Jacobian, as a perturbed Newton–Lagrange method. We demonstrate that such interpretation with required estimates on perturbations is possible for certain sequences generated by variants of these methods making use of second-order corrections. This allows to establish, from a general perspective, superlinear convergence of such sequences, the property generally missing for the main sequences of the methods in question.

Keywords: equality-constrained optimization problem, sequential quadratic programming, reduced Hessian of the Lagrangian, perturbed Newton–Lagrange method framework, second-order corrections, superlinear convergence

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-21-00015, <https://rscf.ru/en/project/24-21-00015/>).

Mathematics Subject Classification: 47J05, 65K15.

For citation: Volkov A.A., Izmailov A.F., Uskov E.I. Reduced Hessian methods as a perturbed Newton–Lagrange method. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 51–64. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-51-64> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Методы последовательного квадратичного программирования, использующие вместо настоящей (полной) матрицы Гессе функции Лагранжа ее суженную на ядро матрицы Якоби ограничений версию, направлены на снижения стоимости итерации таких методов, и являются важным инструментом практической условной оптимизации. В данной работе обсуждается возможность интерпретации таких методов как возмущенного метода Ньютона для системы уравнений Лагранжа. Будет показано, что такая интерпретация с нужными оценками на возмущения возможна для определенных последовательностей, генерируемых вариантами метода с поправками второго порядка. Это позволяет с общих позиций установить сверхлинейную скорость сходимости таких последовательностей, вообще говоря отсутствующую для основных последовательностей рассматриваемых методов.

Рассматривается задача оптимизации с ограничениями-равенствами

$$f(x) \rightarrow \min, \quad h(x) = 0, \quad (0.1)$$

где $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ дважды дифференцируемы вблизи $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Метод последовательного квадратичного программирования для задачи (0.1) состоит в следующем [1, разд. 18.1], [2, разд. 4.3.1, 4.4.1], [3, разд. 4.1.1]: для текущего приближения $(x^k, \lambda^k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ следующее приближение определяется как (x^{k+1}, λ^{k+1}) , где $x^{k+1} = x^k + \xi^k$, ξ^k является стационарной точкой квадратичной задачи

$$\langle f'(x^k), \xi \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi, \xi \right\rangle \rightarrow \min, \quad h(x^k) + h'(x^k) \xi = 0, \quad (0.2)$$

а λ^{k+1} — отвечающим этой стационарной точке множителем Лагранжа. Здесь $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Лагранжа задачи (0.1):

$$L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, h(x) \rangle.$$

Система уравнений Лагранжа задачи (0.2), характеризующая ее стационарные точки и отвечающие им множители, имеет вид

$$f'(x^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi + (h'(x^k))^T \lambda = 0, \quad h(x^k) + h'(x^k) \xi = 0. \quad (0.3)$$

Отсюда следует, что итерация метода последовательного квадратичного программирования есть ни что иное, как итерация метода Ньютона–Лагранжа, т. е. метода Ньютона, применяемого к системе уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \lambda) = 0, \quad h(x) = 0 \quad (0.4)$$

исходной задачи (0.1): уравнения в (0.3) получаются линеаризацией в текущем приближении (x^k, λ^k) уравнений из (0.4).

Методы последовательного квадратичного программирования обладают характерной для ньютоновских методов сверхлинейной локальной сходимостью в естественных предположениях, и относятся к числу наиболее эффективных вычислительных технологий

для задач условной оптимизации, и являются основой многих успешных оптимизационных солверов общего назначения. Однако, в своей базовой форме, итерация этих методов может быть весьма затратной, в частности, в связи с необходимостью вычисления полной матрицы Гессе функции Лагранжа, либо ее все более точных (по мере роста номера итерации) аппроксимаций.

Точнее, согласно [3, предложение 4.4], для сохранения сверхлинейной скорости сходимости генерируемой прямой последовательности $\{x^k\}$ к стационарной точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ задачи (0.1) (при наличии сходимости прямодвойственной последовательности $\{(x^k, \lambda^k)\}$ к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, где $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ — некоторый отвечающий $\bar{x}$ множитель Лагранжа) должны удовлетворять итерационной системе

$$f'(x^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)(x - x^k) + (h'(x^k))^\top \lambda + \omega_1^k = 0, \quad h(x^k) + h'(x^k)(x - x^k) + \omega_2^k = 0, \quad (0.5)$$

возмущенного метода Ньютона–Лагранжа, получаемой добавлением к уравнениям в (0.3) параметров возмущения $\omega_1^k \in \mathbb{R}^n$ и $\omega_2^k \in \mathbb{R}^l$, которые должны удовлетворять оценкам

$$P\omega_1^k = o(\|x^{k+1} - x^k\| + \|x^k - \bar{x}\|), \quad (0.6)$$

$$\omega_2^k = o(\|x^{k+1} - x^k\| + \|x^k - \bar{x}\|) \quad (0.7)$$

при $k \rightarrow \infty$; см. [3, (4.12), (4.13)]. Здесь P — оператор ортогонального проектирования на $\ker h'(\bar{x})$. Более того, при выполнении в стационарной точке $\bar{x}$ с множителем $\bar{\lambda}$ достаточного условия второго порядка оптимальности оценки (0.6), (0.7) являются и достаточными для сверхлинейной сходимости.

Методы с суженной матрицей Гессе, рассматриваемые в данной работе, позволяют избежать необходимости вычисления полной матрицы Гессе функции Лагранжа, поскольку на их итерациях используется только вводимая в разд. 1. так называемая суженная матрица Гессе, размерность которой определяется размерностью $\ker h'(x^k)$, что может быть (и обычно является) гораздо меньшим числом, чем n . Интерпретация этих методов как возмущенного метода Ньютона–Лагранжа не позволяет получить оценки (0.6), (0.7), и действительно, как демонстрирует пример, предложенный в [4] (см. пример 2.1 ниже), эти методы, вообще говоря, обладают лишь двухшаговой сверхлинейной скоростью сходимости, что является более слабым свойством, чем обычная (одношаговая) сверхлинейная скорость сходимости. (Отметим также аналогичный пример, построенный в [5]. Однако, корректность его конструкции и приведенные численные результаты вызывают определенные сомнения, главным образом в связи с очевидной ошибочностью выражений для производных по первой переменной в (2.14).)

Вместе с тем, как будет показано в разд. 2., если снабдить метод так называемыми поправками второго порядка, предназначенными для того, чтобы генерируемые прямые приближения были ближе к допустимому множеству задачи (0.1), то получаемый процесс можно интерпретировать как возмущенный метод Ньютона–Лагранжа с требуемыми оценками (0.6), (0.7), но не для основной последовательности метода, а для некоторой последовательности вспомогательных приближений, также генерируемых методом. Это позволяет получить новое общее понимание результата о сверхлинейной скорости сходимости последовательности таких вспомогательных приближений, доказанного в [6].

1. Методы с суженной матрицей Гессе

Обозначим через P_k оператор ортогонального проектирования на $\ker h'(x^k)$, и для всякого $\xi \in \mathbb{R}^n$ будем использовать разложение $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 = (I - P_k)\xi$, $\xi_2 = P_k\xi$. Тогда ограничение в (0.2) принимает вид

$$h(x^k) + h'(x^k)\xi_1 = 0, \quad (1.1)$$

и если $\text{rank } h'(x^k) = l$ (условие, которое всюду далее предполагается выполненным), то это уравнение однозначно определяет

$$\xi_1^k = -(h'(x^k))^\top (h'(x^k)h'(x^k))^\top)^{-1} h(x^k) \quad (1.2)$$

как единственное нормальное решение уравнения в ограничении задачи (0.2). Фиксируя это ξ_1^k , из (0.2) получаем задачу для определения ξ_2^k :

$$\left\langle f'(x^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)\xi_1^k, \xi_2 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)\xi_2, \xi_2 \right\rangle \rightarrow \min, \quad \xi_2 \in \ker h'(x^k). \quad (1.3)$$

Ключевой момент в конструкции методов с суженной матрицей Гессе состоит в том, что слагаемое в (1.3), содержащее ξ_1^k и ξ_2 , опускается. Используя равенство $\xi_2 = P_k\xi$, так модифицированная задача (1.3) вместе с уравнением (1.1) сводится к задаче

$$\left\langle f'(x^k), \xi \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle P \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) P \xi, \xi \right\rangle \rightarrow \min, \quad h(x^k) + h'(x^k)\xi = 0, \quad (1.4)$$

записанной снова относительно исходной переменной ξ задачи (0.2).

Чтобы привести задачу (1.4) к более «практической» форме, потребуется конкретное представление проектора P_k . Пусть столбцы матрицы Z_k размеров $n \times (n - l)$ образуют некоторый базис линейного подпространства $\ker h'(x^k)$. (Напомним, что предполагается выполненным условие $\text{rank } h'(x^k) = l$, и значит, $\dim \ker h'(x^k) = n - l$.) Тогда, как нетрудно видеть, $P_k = Z_k(Z_k^\top Z_k)^{-1} Z_k^\top$, и задача (1.4) принимает вид

$$\left\langle f'(x^k), \xi \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle Z_k(Z_k^\top Z_k)^{-1} H_k(Z_k^\top Z_k)^{-1} Z_k^\top \xi, \xi \right\rangle \rightarrow \min, \quad h(x^k) + h'(x^k)\xi = 0, \quad (1.5)$$

где симметричная $(n - l) \times (n - l)$ матрица

$$H_k = Z_k^\top \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) Z_k \quad (1.6)$$

и есть *суженная матрица Гессе* функции Лагранжа.

Если столбцы матрицы Z_k образуют ортонормированную систему, то $Z_k^\top Z_k = I$, $P_k = Z_k Z_k^\top$, и задача (1.5) принимает вид

$$\left\langle f'(x^k), \xi \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle Z_k H_k Z_k^\top \xi, \xi \right\rangle \rightarrow \min, \quad h(x^k) + h'(x^k)\xi = 0. \quad (1.7)$$

Это в точности соответствует подзадаче, использованной в [7, (1.2)]. Заметим, что указанное свойство столбцов матрицы Z_k всегда выполняется, если матрица $(Y_k Z_k)$ с некоторой $n \times l$ матрицей Y_k получена QR-факторизацией $(h'(x^k))^\top$, что дает практический способ вычисления Z_k [1, разд. 15.3]. При этом столбцы Y_k образуют ортонормированный базис в $(\ker h'(x^k))^\perp$, и $I - P_k = Y_k Y_k^\top$.

Из сказанного выше ясно, что подзадача (1.4), а значит, и ее «практические» версии (1.5) и (1.7), отличаются от подзадачи (0.2) базового метода последовательного квадратичного программирования по существу только отсутствием в целевой функции слагаемого, содержащего оба ξ_1 и ξ_2 . В частности, эти методы совпадают, если для каждого k

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi_1, \xi_2 \right\rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

(факт, отмеченный в [7, с. 286]). Если же

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \xi_1, \xi_2 \right\rangle = 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

для предельной пары $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, то методы, вообще говоря, не совпадают, но методы с суженной матрицей Гессе могут быть интерпретированы как возмущенный метод Ньютона–Лагранжа с требуемыми оценками (0.6), (0.7) (см. разд. 2.), а значит, имеют в соответствующих предположениях сверхлинейную скорость сходимости (что соответствует сказанному в [5, с. 231]).

Обращаясь к работам, предшествовавшим [7, (1.2)], в [4] обсуждался вариант метода последовательного квадратичного программирования с подзадачами

$$\langle f'(x^k), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{H}_k \xi, \xi \rangle \rightarrow \min, \quad h(x^k) + h'(x^k) \xi = 0, \quad (1.9)$$

в которой используется матрица $\mathcal{H}_k$, задаваемая равенством

$$(Z_k \ Y_k)^\top \mathcal{H}_k (Z_k \ Y_k) = \begin{pmatrix} H_k & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где H_k введено в (1.6). Если столбцы Z_k и Y_k ортонормированы, то

$$(Z_k \ Y_k)(Z_k \ Y_k)^\top = Z_k Z_k^\top + Y_k Y_k^\top = I,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_k \xi, \xi \rangle &= \langle \mathcal{H}_k (Z_k \ Y_k) (Z_k \ Y_k)^\top \xi, (Z_k \ Y_k) (Z_k \ Y_k)^\top \xi \rangle \\ &= \langle (Z_k \ Y_k)^\top \mathcal{H}_k (Z_k \ Y_k) (Z_k \ Y_k)^\top \xi, (Z_k \ Y_k)^\top \xi \rangle = \langle (H_k Z_k^\top \xi, Y_k^\top \xi), (Z_k^\top \xi, Y_k^\top \xi) \rangle \\ &= \langle Z_k H_k Z_k^\top \xi, \xi \rangle + \langle Y_k^\top \xi, Y_k^\top \xi \rangle, \end{aligned} \quad (1.10)$$

причем

$$\langle Y_k^\top \xi, Y_k^\top \xi \rangle = \langle Y_k^\top Y_k Y_k^\top \xi, Y_k^\top \xi \rangle = \langle Y_k Y_k^\top \xi, Y_k Y_k^\top \xi \rangle = \|(I - P_k) \xi\|^2 = \|\xi_1\|^2.$$

Вспоминая, что, как обсуждалось выше, ξ_1^k однозначно определяется ограничением в (1.7), а значит и идентичным ему в (1.9), отсюда получаем, что второе слагаемое в правой части (1.10) не играет в целевой функции подзадачи (1.9) никакой роли, и эта подзадача сводится к (1.7).

Далее, умножением обеих частей первого уравнения в системе Лагранжа

$$f'(x^k) + Z_k H_k Z_k^\top \xi + (h'(x^k))^\top \lambda = 0, \quad h(x^k) + h'(x^k) \xi = 0 \quad (1.11)$$

задачи (1.7) на $Z_k^\top$, необходимые условия первого порядка оптимальности для этой задачи могут быть записаны в следующей «прямой» форме, не использующей λ :

$$Z_k^\top f'(x^k) + H_k Z_k^\top \xi = 0, \quad h(x^k) + h'(x^k)\xi = 0, \quad (1.12)$$

откуда следует выполнение равенства (1.2), а в дополнительном предположении о невырожденности H_k и равенства

$$Z_k^\top \xi_2^k = -H_k^{-1} Z_k^\top f'(x^k).$$

Последнее также можно записать в виде явного выражения

$$\xi_2^k = P_k \xi_2^k = Z_k Z_k^\top \xi_2 = -Z_k H_k^{-1} Z_k^\top f'(x^k). \quad (1.13)$$

Вместе с тем, умножая обе части первого уравнения в (1.11) на $Y_k^\top$, получаем

$$Y_k^\top f'(x^k) + Y_k^\top (h'(x^k))^\top \lambda = 0, \quad (1.14)$$

Дальнейшее умножение на Y_k приводит это уравнение к «инвариантному» виду

$$(I - P_k) f'(x^k) + (h'(x^k))^\top \lambda = 0$$

(поскольку $(I - P_k)(h'(x^k))^\top = (h'(x^k)(I - P_k))^\top = (h'(x^k))^\top$), не зависящему от выбора Y_k . Если взять, например, $Y_k = (h'(x^k))^\top$, что обеспечивается требуемую здесь базисность столбцов этой матрицы в $\ker h'(x^k)$ (но, разумеется, не их ортонормированность), то из (1.14) получаем уравнение

$$h'(x^k)^\top f'(x^k) + h'(x^k)(h'(x^k))^\top \lambda = 0. \quad (1.15)$$

Отсюда следует явное выражение

$$\lambda^{k+1} = -(h'(x^k)(h'(x^k))^\top)^{-1} h'(x^k) f'(x^k). \quad (1.16)$$

Это соответствует [7, (2.13)], где, правда, x^k заменяется на x^{k+1} : λ^{k+1} (и x^{k+1}) используются для определения H_{k+1} , и это возможно, поскольку здесь, в отличие от обычного метода Ньютона–Лагранжа, итерация естественным образом разделяется на прямую и двойственную фазы. Использование (1.16) также соответствует выбору λ^{k+1} как решения задачи квадратичной задачи безусловной оптимизации

$$\|f'(x^k) + (h'(x^k))^\top \lambda\|^2 \rightarrow \min$$

относительно $\lambda \in \mathbb{R}^l$. Существуют и другие способы задания λ^{k+1} , например [7, (2.14)], где, впрочем, этот способ приводится без объяснения его происхождения.

Уравнения (1.12) и (1.15), порождающие явные выражения (1.2), (1.13) и (1.16), характеризуют класс методов последовательного квадратичного программирования, в форме методов Ньютона–Лагранжа, с суженной матрицей Гессе. В частности, (1.12) соответствует методу в [5, (1.5), (1.6)], который, в свою очередь, был взят из [8, алгоритм 4.1], где, собственно, и была установлена двухшаговая сверхлинейная сходимость методов такого типа. См. также [9, (14.41), теорема 14.7]. Следует также упомянуть так называемый «горизонтально-вертикальный» алгоритм из [10], который также рассматривался в [4]

(см. также [9, (14.40)]): в нем используются выражения (1.2), (1.13), но только сначала вычисляется ξ_2^k согласно (1.13), и затем ξ_1^k согласно (1.2), где вместо $h(x^k)$ используется $h(x^k + \xi_2^k)$.

Разные варианты методов указанного класса могут отличаться способами выбора Z_k . Кроме того, важнейшее значение имеют методы, использующие не саму суженную матрицу Гессе из (1.6), а ее аппроксимации, и прежде всего квазиньютоновские. Эти вопросы обсуждаются [8] и в последующих цитированных публикациях, но здесь они не рассматриваются.

В некоторых изложениях (см., например, [1, разд. 18.3]) методов с суженной матрицей Гессе используют представления $\xi_1 = Y_k \eta$ и $\xi_2 = Z_k \zeta$, где $\eta \in \mathbb{R}^l$ и $\zeta \in \mathbb{R}^{n-l}$ однозначно определяются. Если столбцы Z_k ортонормированы, то, подставляя эти выражения в (1.12), получаем уравнения

$$Z_k^\top f'(x^k) + H_k \zeta = 0, \quad h(x^k) + h'(x^k) Y_k \eta = 0,$$

для определения η и ζ .

2. Методы с поправками второго порядка

Помимо метода из [10], обсуждавшегося в [4], в [6] рассматривается вариант метода последовательного квадратичного программирования с суженной матрицей Гессе, снабженный так называемыми поправками второго порядка [1, разд. 15.6], [2, разд. 5.4.2], [3, разд. 4.3.6, 6.2.2]. А именно, следующее приближение определяется равенством $x^{k+1} = x^k + \xi^k + \bar{\xi}^k$, где ξ^k — стационарная точка подзадачи (1.7), т. е. решение системы (1.12), а $\bar{\xi}^k$ — нормальное решение уравнения

$$h(x^k + \xi^k) + h'(x^k) \xi = 0, \quad (2.1)$$

т. е.

$$\bar{\xi}^k = -(h'(x^k))^\top (h'(x^k)(h'(x^k))^\top)^{-1} h(x^k + \xi^k). \quad (2.2)$$

Заметим, что при этом $\bar{\xi}^k \in \text{im}(h'(x^k))^\top = (\ker h'(x^k))^\perp$, т. е. $\bar{\xi}_2^k = 0$. Новое двойственное приближение λ^{k+1} по-прежнему определяется уравнением (1.15).

Лемма 2.1. Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и отображение $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ дважды непрерывно дифференцируемы вблизи точки $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\bar{x}$ является стационарной точкой задачи (0.1), а $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^l$ — отвечающим ей множителем Лагранжа, причем выполнено условие регулярности ограничений $\text{rank } h'(\bar{x}) = l$ и достаточное условие второго порядка оптимальности

$$\left\langle \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \xi, \xi \right\rangle > 0 \quad \forall \xi \in \ker h'(\bar{x}) \setminus \{0\}. \quad (2.3)$$

Пусть последовательность $\{(x^k, \lambda^k)\}$, сгенерированная описанной выше процедурой, сходится к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Тогда

$$\xi^k = O(\|x^k - \bar{x}\|), \quad (2.4)$$

$$h(x^k + \xi^k) = O(\|x^k - \bar{x}\|^2), \quad (2.5)$$

$$\bar{\xi}^k = O(\|x^k - \bar{x}\|^2), \quad (2.6)$$

при $k \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка (2.4) следует из (1.2) и (1.13), поскольку в сделанных предположениях матрицы $h'(x^k)(h'(x^k))^\top$ и H_k равномерно обратимы для (x^k, λ^k) достаточно близких к $(\bar{x}, \bar{\lambda})$.

Кроме того, в силу второго уравнения в (1.12),

$$h(x^k + \xi^k) = h(x^k) + h'(x^k)\xi^k + O(\|\xi^k\|^2) = O(\|\xi^k\|^2),$$

и поэтому, согласно (2.2),

$$\bar{\xi}^k = O(\|h(x^k + \xi^k)\|) = O(\|\xi^k\|^2).$$

Из последних двух оценок и из (2.4) следуют оценки (2.5), (2.6). $\square$

Согласно первому равенству в (0.5), используя представление $P_k = Z_k Z_k^\top$ и оценку (2.6), выводим

$$\begin{aligned} P_k \omega_1^k &= -P_k \left(f'(x^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)(\xi^k + \bar{\xi}^k) + (h'(x^k))^\top \lambda^{k+1} \right) \\ &= Z_k \left(Z_k^\top f'(x^k) + Z_k^\top \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) Z_k Z_k^\top \xi^k + Z_k^\top \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi_1^k \right) + O(\|x^k - \bar{x}\|^2) \\ &= P_k \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi_1^k + O(\|x^k - \bar{x}\|^2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где в последнем равенстве использовано определение H_k в (1.6) и первое уравнение в (1.12). Заметим, что в обеих частях этой оценки P_k можно заменить на P , поскольку

$$P_k - P = O(\|x^k - \bar{x}\|) \quad (2.8)$$

при $k \rightarrow \infty$. Это следует, например, из явного представления

$$P_k = (I - (h'(x^k))^\top (h'(x^k)(h'(x^k))^\top)^{-1} h'(x^k)) \quad (2.9)$$

и равномерной обратимости матриц $(h'(x^k)(h'(x^k))^\top)$ для x^k близких к $\bar{x}$.

Далее, согласно второму равенству в (0.5), используя второе уравнение в (1.12), (2.1), и оценку (2.5), выводим

$$\omega_2^k = -h(x^k) - h'(x^k)(\xi^k + \bar{\xi}^k) = -h'(x^k)\bar{\xi}^k = -h(x^k + \xi^k) = O(\|x^k - \bar{x}\|^2).$$

Таким образом, оценка (0.7) имеет место, а вот (0.6) можно гарантировать лишь при выполнении (1.8), причем эти рассуждения тем более проходят и при использовании $\bar{\xi}^k = 0$, т. е. сделанные выводы верны как для метода без поправок второго порядка, так и с такими поправками. В частности, гарантировать сверхлинейную скорость сходимости последовательности $\{x^k\}$ по-прежнему нельзя и для метода с поправками второго порядка.

Теперь обратимся к поведению последовательности $\{\tilde{x}^k\}$, генерируемой по правилу

$$\tilde{x}^{k+1} = x^k + \xi^k = x^{k-1} + \xi^{k-1} + \bar{\xi}^{k-1} + \xi^k = \tilde{x}^k + \bar{\xi}^{k-1} + \xi^k.$$

Иными словами, будем рассматривать следующий двухшаговый процесс:

$$\begin{aligned}
 & x^{k-1} \\
 & \downarrow \\
 & \tilde{x}^k = x^{k-1} + \xi^{k-1} \\
 & \downarrow \\
 & x^k = \tilde{x}^k + \bar{\xi}^{k-1} = x^{k-1} + \xi^{k-1} + \bar{\xi}^{k-1} \\
 & \downarrow \\
 & \tilde{x}^{k+1} = x^k + \xi^k = \tilde{x}^k + \bar{\xi}^{k-1} + \xi^k.
 \end{aligned}$$

Из оценок в лемме 2.1 вытекает, что последовательности $\{\tilde{x}^k\}$ сходятся к тому же пределу $\bar{x}$, что и последовательность $\{x^k\}$.

Помимо оценок из леммы 2.1, приведем некоторые дополнительные оценки на ингредиенты рассматриваемого итерационного процесса, следующие из [6, леммы 3.1, 3.3].

Лемма 2.2. В предположениях леммы 2.1

$$\bar{\xi}^{k-1} = O(\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|), \quad (2.10)$$

$$h'(x^k)\xi^k = o(\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|) \quad (2.11)$$

при $k \rightarrow \infty$.

Теорема 2.1. В предположениях леммы 2.1 для

$$\tilde{\omega}_1^k = -f'(x^k) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\tilde{x}^k, \lambda^k)(\tilde{x}^{k+1} - \tilde{x}^k) - (h'(\tilde{x}^k))^\top \lambda^{k+1} \quad (2.12)$$

и

$$\tilde{\omega}_2^k = -h(\tilde{x}^k) - h'(\tilde{x}^k)(\tilde{x}^{k+1} - \tilde{x}^k) \quad (2.13)$$

выполняются оценки

$$P\tilde{\omega}_1^k = o(\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|), \quad (2.14)$$

$$\tilde{\omega}_2^k = o(\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|) \quad (2.15)$$

при $k \rightarrow \infty$, и, в частности, последовательность $\{\tilde{x}^k\}$ сходится к $\bar{x}$ со сверхлинейной скоростью.

Последнее утверждение теоремы согласуется с [6, теорема 3.5].

Доказательство. Согласно (2.12), привлекая теорему о среднем, выводим

$$\begin{aligned}
 P_k \tilde{\omega}_1^k &= -P_k \left(f'(x^{k-1} + \xi^{k-1}) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^{k-1} + \xi^{k-1}, \lambda^k)(\bar{\xi}^{k-1} + \xi^k) + (h'(x^{k-1} + \xi^{k-1}))^\top \lambda^{k+1} \right) \\
 &= -P_k \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x^{k-1} + \xi^{k-1}, \lambda^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k)(\bar{\xi}^{k-1} + \xi^k) + (h'(x^k))^\top (\lambda^{k+1} - \lambda^k) \right) \\
 &\quad + O(\|\xi^k\| \|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| \|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\bar{\xi}^{k-1}\|^2) \\
 &= P_k \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x^{k-1} + \xi^{k-1} + \bar{\xi}^{k-1}, \lambda^k) - \frac{\partial L}{\partial x}(x^{k-1} + \xi^{k-1}, \lambda^k) - \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \bar{\xi}^{k-1} \right) \\
 &\quad - P_k \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x^{k-1} + \xi^{k-1} + \bar{\xi}^{k-1}, \lambda^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi^k \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +O(\|\xi^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\bar{\xi}^{k-1}\|^2) \\
& = -P_k \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x^k, \lambda^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi^k \right) \\
& +O(\|\xi^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\bar{\xi}^{k-1}\|^2) \\
& = -P_k \left(f'(x^k) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi^k + (h'(x^k))^\top \lambda^k \right) \\
& +O(\|\xi^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\bar{\xi}^{k-1}\|^2) \\
& = -P_k \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x^k, \lambda^k) \xi_1^k + O(\|\xi^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\bar{\xi}^{k-1}\|^2),
\end{aligned}$$

где последнее равенство выводится по аналогии с (2.7). Замечая, что согласно (2.9),

$$\xi_1^k = (I - P_k) \xi^k = (h'(x^k))^\top (h'(x^k)(h'(x^k))^\top)^{-1} h'(x^k) \xi^k,$$

отсюда и из оценок (2.10), (2.11) следует оценка

$$P_k \tilde{\omega}_1^k = o(\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|). \quad (2.16)$$

Принимая во внимание (2.8) и вытекающую из (2.10) оценку,

$$x^k - \bar{x} = \tilde{x}^k - \bar{x} + \bar{\xi}^{k-1} = O(\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|),$$

имеем

$$P_k - P = O(\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|),$$

откуда и из (2.16) следует оценка (2.14).

Далее, согласно (2.13), используя (2.1), выводим

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_2^k &= -h(x^{k-1} + \xi^{k-1}) - h'(x^{k-1} + \xi^{k-1})(\bar{\xi}^{k-1} + \xi^k) \\
&= -h(x^{k-1} + \xi^{k-1}) - h'(x^{k-1})\bar{\xi}^{k-1} - (h'(x^{k-1} + \xi^{k-1}) - h'(x^{k-1}))\bar{\xi}^{k-1} - h'(x^{k-1} + \xi^{k-1})\xi^k \\
&= -(h'(x^{k-1} + \xi^{k-1}) - h'(x^k))\xi^k - h'(x^k)\xi^k + O(\|\xi^{k-1}\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) \\
&= -h'(x^k)\xi^k + O(\|\xi^{k-1}\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|) + O(\|\xi^k\|\|\bar{\xi}^{k-1}\|),
\end{aligned}$$

откуда и из оценок (2.10), (2.11) следует оценка (2.15).

Последнее утверждение теоремы вытекает из полученных оценок (2.14), (2.15) и из [3, предложение 4.4]. $\square$

Следующий пример был предложен в [4, пример 2].

Пример 2.1. Рассмотрим задачу (0.1), в которой $n = 2$, $l = 1$,

$$f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - \alpha x_1 x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{3\alpha}(x_1 - \alpha)^3,$$

$$h(x) = \frac{1}{(x_2 - 2)^2} - 1,$$

где α — вещественный параметр. Вблизи локального решения $\bar{x} = (\alpha, 1)$ такие f и h бесконечно дифференцируемы, причем в этом решении выполняется условие регулярности $\text{rank } h'(\bar{x}) = l$ (поскольку $h'(\bar{x}) \neq 0$) и достаточное условие второго порядка оптимальности (2.3) с единственным отвечающим $\bar{x}$ множителем Лагранжа $\bar{\lambda} = \alpha^2 - 1$.

В таблицах 1, 2 для каждой итерации k и полученного на ней приближения (x^k, λ^k) (и $\tilde{x}^k$ для метода с поправками второго порядка) приводятся следующие сведения:

- “Pert” есть величина $\|P_k \omega_1^{k-1}\|/(\|x^k - x^{k-1}\| + \|x^{k-1} - \bar{x}\|)$ (см. (0.6); нормы везде евклидовы);
- “Res” есть невязка системы Лагранжа (0.4);
- “Dist” есть расстояние $\|x^k - \bar{x}\|$ до прямого решения;
- “PR” (от “primal ratio”) есть величина $\|x^k - \bar{x}\|/\|x^{k-1} - \bar{x}\|$;
- “PDR” (от “primal-dual ratio”) есть величина $\|(x^k - \bar{x}, \lambda^k - \bar{\lambda})\|/\|(x^{k-1} - \bar{x}, \lambda^{k-1} - \bar{\lambda})\|$;
- “PR-SOC” есть величина $\|\tilde{x}^k - \bar{x}\|/\|\tilde{x}^{k-1} - \bar{x}\|$ (для метода с поправками второго порядка).

Таблица 1

Численные результаты для примера 2.1: метод без поправок второго порядка

k	Pert	Res	Dist	PR	PDR
0	–	5.8e+0	1.0e-1	–	–
1	7.4e-1	6.7e+0	5.0e-1	5.0e+0	4.7e+1
2	4.9e-2	2.0e+0	1.0e-4	2.0e-4	4.2e-1
3	8.2e-1	7.4e-3	5.0e-4	5.0e+0	2.5e-3
4	5.0e-5	2.5e-3	9.2e-16	1.8e-12	5.1e-1
5	9.7e-1	1.1e-14	8.9e-16	9.7e-1	2.9e-12
6	0	3.6e-15	0.0e+0	0.0e+0	5.0e-1

Таблица 2

Численные результаты для примера 2.1: метод с поправками второго порядка

k	Pert	Res	Dist	PR	PDR	PR-SOC
0	–	5.8e+0	1.0e-1	–	–	–
1	7.4e-1	7.1e+0	5.0e-1	5.0e+0	4.7e+1	–
2	8.6e-3	2.7e+0	5.1e-2	1.0e-1	5.1e-1	5.1e-2
3	5.9e-7	2.5e-1	5.1e-4	1.0e-2	1.0e-1	8.5e-4
4	0.0e+0	2.5e-3	5.3e-8	1.0e-4	1.0e-2	1.0e-6
5	0.0e+0	2.6e-7	8.9e-16	1.7e-8	1.0e-4	1.7e-12
6	0.0e+0	3.6e-15	0.0e+0	0.0e+0	1.4e-8	0.0e+0

Результаты в таблицах 1, 2 получены с использованием $\alpha = 5$ и начального приближения $x^0 = \bar{x} + (0, 0.1)$, $\lambda^0 = \bar{\lambda}$.

Таблица 1 демонстрирует наличие у метода последовательного квадратичного программирования с суженной матрицей Гессе двухшаговой сверхлинейной сходимости, но

отсутствие настоящей сверхлинейной сходимости: на каждой второй итерации расстояние до прямого решения (см. столбцы “Dist” и “PR”) возрастает, по крайней мере пока приближения не попадают в достаточно малую окрестность решения, где существенную роль начинают играть ошибки округления. Это согласуется с поведением величин в столбце “Pert”.

Согласно таблице 2, для варианта метода с поправками второго порядка очевидно имеет место сверхлинейная (квадратичная) сходимость последовательности $\{\tilde{x}^k\}$ (столбец “PR-SOC”). Основная последовательность $\{x^k\}$ здесь тоже асимптотически сходится сверхлинейно (и даже квадратично; столбцы “Dist” и “PR”). Вместе с тем, шаг из точки x^0 в точку x^1 увеличивает расстояние до решения (примерно в 5 раз; столбцы “Dist” и “PR”), и эта ситуация сохраняется, каким бы близким x^0 не было к $\bar{x}$. Это является свидетельством принципиальных трудностей доказательства сверхлинейной сходимости основной последовательности метода последовательного квадратичного программирования с суженной матрицей Гессе, снабженного поправками второго порядка. Вместе с тем, примеры, демонстрирующие отсутствие сверхлинейной сходимости таких последовательностей, авторам не известны.

References

- [1] J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed., Springer, New York, 2006.
- [2] А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов, *Численные методы оптимизации*, 2-е изд., перераб. и доп., Физматлит, М., 2008. [A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Chislennyye Metody Optimizatsii*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2008 (In Russian)].
- [3] A. F. Izmailov, M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for Optimization and Variational Problems*, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, Springer, Cham, 2014.
- [4] R. H. Byrd, “An example of irregular convergence in some constrained optimization methods that use the projected Hessian”, *Mathematical Programming*, **32** (1985), 232–237.
- [5] Y. Yuan, “An only 2-step Q-superlinear convergence example for some algorithms that use reduced Hessian approximations”, *Mathematical Programming*, **32** (1985), 224–231.
- [6] R. H. Byrd, “On the convergence of constrained optimization methods with accurate Hessian information on a subspace”, *SIAM J. on Numerical Analysis*, **27** (1990), 141–153.
- [7] R. H. Byrd, J. Nocedal, “An analysis of reduced Hessian methods for constrained optimization”, *Mathematical Programming*, **49** (1990), 285–323.
- [8] J. Nocedal, M. L. Overton, “Projected Hessian updating algorithms for nonlinearly constrained optimization”, *SIAM J. on Numerical Analysis*, **22** (1985), 821–850.
- [9] J. F. Bonnans, J. Ch. Gilbert, C. Lemaréchal, C. Sagastizábal, *Numerical Optimization: Theoretical and Practical Aspects*, 2nd ed., Springer, Berlin, 2006.
- [10] T. F. Coleman, A. R. Conn, “On the Local Convergence of a Quasi-Newton Method for a Nonlinear Programming Problem”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **21**:4 (1984).

Информация об авторах

Волков Андрей Андреевич, магистр, кафедра исследования операций, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: and_rei99@mail.ru

Information about the authors

Andrey A. Volkov, Master, Operations Research Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: and_rei99@mail.ru

Измаилов Алексей Ферилович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры исследования операций, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Усков Евгений Иванович, научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: euskov@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:

Измаилов Алексей Ферилович

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 21.01.2024 г.

Поступила после рецензирования 06.03.2024 г.

Принята к публикации 11.03.2024 г.

Alexey F. Izmailov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Operations Research Department, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation. E-mail: izmaf@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9851-0524>

Evgeniy I. Uskov, Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: euskov@cs.msu.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3639-0317>

There is no conflict of interests.

Corresponding author:

Alexey F. Izmailov

E-mail: izmaf@cs.msu.ru

Received 21.01.2024

Reviewed 06.03.2024

Accepted for press 11.03.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Лангаршоев М.Р., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76>

УДК 517.53



Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{B}_{2,\mu}$

Мухтор Рамазонович ЛАНГАРШОЕВ

ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты МЧС России»

141435, Российская Федерация, Московская область, г. Химки, мкр. Новогорск, ул. Соколовская, 1А

Аннотация. В работе изучаются вопросы наилучшего приближения аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{B}_{2,\mu}$. В этом пространстве для наилучших приближений аналитических в круге функций алгебраическими комплексными полиномами получены точные неравенства через обобщенные модули непрерывности высших порядков производных $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$. Для классов аналитических в единичном круге функций, задаваемых при помощи характеристики $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$ и мажоранты Φ , вычислены точные значения некоторых n -поперечников. При доказательстве основных результатов настоящей работы используются методы решения экстремальных задач в нормированных пространствах аналитических в круге функций, метод Н. П. Корнейчука оценки верхних граней наилучших приближений классов функций подпространством фиксированной размерности и метод оценки снизу n -поперечников функциональных классов в различных банаховых пространствах.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, обобщенный модуль непрерывности высшего порядка, весовое пространство Бергмана, поперечники

Для цитирования: Лангаршоев М.Р. Наилучшее приближение аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{B}_{2,\mu}$ // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 65–76. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76>

SCIENTIFIC ARTICLE

© M. R. Langarshoev, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76>

The best approximation of analytic in a unit circle functions in the Bergman weight space $\mathcal{B}_{2,\mu}$

Mukhtor R. LANGARSHOEV

Civil Defence Academy of EMERCOM of Russia

1A Socolovskaya St., Novogorsk Microdistrict, Khimki, Moscow Region 141435, Russian Federation

Abstract. The paper studies the issues of the best approximation of analytical functions in the Bergman weight space $\mathcal{B}_{2,\mu}$. In this space, for best approximations of functions analytic in the circle by algebraic complex polynomials we obtain the exact inequalities by means of generalized modules of continuity of higher order derivatives $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$, $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}$. For classes of functions analytic in the unit circle defined by the characteristic $\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)$, and the majorant Φ , the exact values of some n -widths are calculated. When proving the main results of this work, we use methods for solving extremal problems in normalized spaces of functions analytic in the circle, N. P. Korneichuk's method for estimating upper bounds for the best approximations of classes of functions by a subspace of fixed dimension, and a method for estimating from below the n -widths of function classes in various Banach spaces.

Keywords: best polynomial approximation, generalized modulus of continuity of high order, Bergman weight space, diameters

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30E10, 42A10.

For citation: Langarshoev M.R. The best approximation of analytic in a unit circle functions in the Bergman weight space $\mathcal{B}_{2,\mu}$. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 65–76. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-65-76> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Теория приближения функций является одной из наиболее интенсивно развивающихся областей математического анализа. Особое место в этой теории занимают экстремальные задачи наилучшего приближения аналитических в круге функций комплексными полиномами в различных банаховых пространствах аналитических функций. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций и вычисления колмогоровских n -поперечников (определенных в [1]) получены в [2–4]. В дальнейшем эта тематика нашла свое отражение в работах [5–7] и многих других. В пространстве Бергмана указанная задача впервые была рассмотрена в [8, 9], результаты были развиты в ряде работ, в частности, в [10–12]. В работе [13] было введено в рассмотрение весовое пространство Бергмана $B_p(\gamma|z|, D)$, $1 \leq p < \infty$, аналитических в единичном круге D функций $f(z)$, где $\gamma|z|$ — положительная в области D функция. В этом пространстве для наилучших приближений аналитических в круге функций алгебраическими комплексными полиномами получены точные неравенства через усредненные модули непрерывности высшего порядка производных функций в пространстве $B_{2,\gamma}$. В дальнейшем вопросы нахождения точных оценок для наилучших приближений аналитических функций через усредненные значения разных характеристик в весовом пространстве Бергмана $B_p(\gamma|z|, D)$, $1 \leq p < \infty$, рассматривались в работах [14–16] (также см. приведенную в них библиографию). В частности, в работе [16] получено обобщение результатов [13], а также вычислены значения n -поперечников классов аналитических функций.

В настоящей работе для наилучших приближений аналитических в единичном круге функций алгебраическими комплексными полиномами получены точные неравенства через усредненные значения обобщенного модуля непрерывности высших порядков производных функций в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{B}_{2,\mu}$.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в этой плоскости и $U(\mathbb{D})$ — множество функций аналитических в $\mathbb{D}$.

Через $\mathcal{B}_{2,\mu}$, $\mu > -1$, обозначим банахово пространство Бергмана, которое состоит из всех функций $f \in U(\mathbb{D})$, для которых норма

$$\|f\|_{2,\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_{\mathcal{B}_{2,\mu}} = \left(\int_D |f(z)|^2 dA_\mu(z) \right)^{1/2}, \quad (1.1)$$

конечна, где

$$dA_\mu(z) = (\mu + 1)(1 - |z|^2)^\mu dA(z),$$

$dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$ — элемент площади и интеграл понимается в смысле Лебега.

Введем обозначение $z = x + iy = \rho e^{it}$, $0 < \rho \leq 1$, $0 < t \leq 2\pi$, норму (1.1) запишем в виде

$$\|f\|_{2,\mu} = \left(\int_0^1 (\mu + 1)(1 - \rho^2)^\mu \mathcal{L}_2^2(\rho, f) \rho d\rho \right)^{1/2},$$

где

$$\mathcal{L}_2(\rho, f) = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Отметим, что если $\mu = 0$, то пространство $\mathcal{B}_{2,0} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{B}_2$ является известным пространством Бергмана.

Через $\mathcal{P}_{n-1}$ обозначим множество всех комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n-1$

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f) z^k, a_k(f) \in \mathbb{C} \right\}.$$

Величина

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \} \quad (1.2)$$

называется *наилучшим приближением функции* $f \in \mathcal{B}_{2,\mu}$ *множеством* $\mathcal{P}_{n-1}$. Равенством

$$\Omega_m(f, t)_{2,\mu} = \left\{ \frac{1}{t^m} \int_0^t \cdots \int_0^t \|\Delta_{\bar{h}}^m f(\rho e^{i\theta})\|_{2,\mu}^2 dh_1 \dots dh_m \right\}^{1/2}, \quad t > 0, \quad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{h} &= (h_1, h_2, \dots, h_m), \quad \Delta_{\bar{h}}^m = \Delta_{h_1}^1 \circ \cdots \circ \Delta_{h_m}^1, \\ \Delta_{h_j}^1 f(\rho e^{i\theta}) &= f(\rho e^{i(\theta+h_j)}) - f(\rho e^{i\theta}), \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

будем определять *обобщенный модуль непрерывности m -го порядка функции* $f \in \mathcal{B}_{2,\mu}$ (см., например, [17, 18]).

Для любых $r \in \mathbb{Z}_+$ обычную производную r -го порядка функции $f(z)$ обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f / dz^r$.

Так как функция $f \in \mathcal{B}_{2,\mu}$ аналитична в $\mathbb{D}$, то из разложения f в ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

следует, что

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где

$$\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2) \cdots (k-r+1) = k! \{(k-r)!\}^{-1}, \quad k \geq r, \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+,$$

$c_k(f)$ — коэффициенты Маклорена функции f .

Через $\mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $r \in \mathbb{Z}_+$ обозначим множество функций $f \in U(\mathbb{D})$ таких, что $z^r f^{(r)} \in \mathcal{B}_{2,\mu}$.

Символ

$$(u)_n = u(u+1)(u+2) \cdots (u+n-1) \quad (1.5)$$

называется *символом Похгаммера* [19].

2. Наилучшее приближение функций в пространстве $\mathcal{B}_{2,\mu}$

Лемма 2.1. Среди произвольных полиномов $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$ наименьшее значение величины (1.2) в пространстве $\mathcal{B}_{2,\mu}$ доставляет частная сумма Тейлора $T_{n-1}(f; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$ — разложения функции $f(z)$ в круге $|z| < 1$. При этом

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!}{(\mu+2)_k} \right\}^{1/2}. \quad (2.1)$$

Доказательство. Полагая $p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^2(\rho, f - p_{n-1}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it}) - p_{n-1}(\rho e^{it})|^2 dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |c_k(f) - a_k(f)|^2 \cdot \rho^{2k} + \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cdot \rho^{2k}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\inf \{ \mathcal{L}_2^2(\rho, f - p_{n-1}) : p_{n-1}(z) \in \mathcal{P}_{n-1} \} = \mathcal{L}_2^2(\rho, f - T_{n-1}(f, z)) = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \rho^{2k},$$

то из равенства (1.2), с учетом (1.5) будем иметь

$$\begin{aligned} E_n(f)_{\mathcal{B}_{2,\mu}} &= \inf \{ \|f - p_{n-1}\|_{2,\mu} : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1} \} \\ &= \left\{ \int_0^1 (\mu+1)(1-\rho^2)^\mu \mathcal{L}_2^2(\rho, f - T_{n-1}(f; z)) d\rho \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ \int_0^1 (\mu+1)(1-\rho^2)^\mu \left(\sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \cdot \rho^{2k} \right) d\rho \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!}{(\mu+2)_k} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, установлено равенство (2.1) и лемма доказана. $\square$

Теорема 2.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t)$ — весовая на $(0, h)$ функция. Тогда для любого $0 < p \leq \infty$ справедливо неравенство

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt} \right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}. \quad (2.2)$$

Неравенство (2.2) является точным в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, для которой оно обращается в равенство.

Доказательство. Применяя равенство Парсеваля к разности (1.4), получим

$$\|\Delta_h^m f(\rho e^{i\theta})\|_{\mathcal{B}_{2,\mu}}^2 = 2^m \sum_{k=0}^{\infty} |c_k(f)|^2 \prod_{j=1}^m (1 - \cos kh_j) \frac{k!}{(\mu+2)_k}. \quad (2.3)$$

Подставим соотношение (2.3) в правую часть равенства (1.3) и запишем его в виде

$$\Omega_m^2(f, t)_{2,\mu} \geq 2^m \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \frac{k!}{(\mu+2)_k} \left(1 - \frac{\sin kt}{kt}\right)^m. \quad (2.4)$$

Легко показать, что для произвольной функции $f(z) \in \mathcal{B}_{2,\mu}$ такой, что $z^r f^{(r)} \in \mathcal{B}_{2,\mu}$, имеет место неравенство

$$E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{2,\mu} \geq \alpha_{n,r} E_{n-1}(f)_{2,\mu}. \quad (2.5)$$

Заменим в соотношении (2.4) $f(z)$ на $z^r f^{(r)}(z)$. Используя неравенство (2.5), равенство (2.1), и учитывая тот факт, что (см. [20])

$$\max\{|\sin u|/u : u \geq nt\} = \sin(nt)/(nt), \quad 0 < nt \leq \pi/2,$$

получаем

$$\Omega_m^2(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \geq 2^m \alpha_{n,r}^2 \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m E_n^2(f)_{2,\mu}. \quad (2.6)$$

В неравенстве (2.2) для параметра p , удовлетворяющего условию $0 < p \leq \infty$, функционал $\|\Omega_m \varphi^{1/p}\|_p$ определен соотношением

$$\|\Omega_m \varphi^{1/p}\|_p = \begin{cases} \left\{ \int_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \max\{\Omega_m(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu}, t \in (0, h]\}, & p = \infty, \end{cases}$$

и оно лишь при $1 \leq p \leq \infty$ является нормой. Возведем обе части неравенства (2.6) в степень $p/2$, результат умножим на $\varphi(t)$ и проинтегрируем по переменной t от 0 до h , и таким образом получим

$$\int_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \geq 2^{mp/2} \alpha_{n,r}^p E_{n-1}^p(f)_{2,\mu} \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt.$$

Отсюда следует неравенство (2.2).

Чтобы доказать точность неравенства (2.2), рассмотрим функцию $f_0(z) = z^n \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $r < n$. Для этой функции из соотношений (1.2) и (1.3) имеем

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\mu} = \left\{ \frac{n!}{(\mu+2)_n} \right\}^{1/2}, \quad (2.7)$$

$$\Omega_m(z^r f_0^{(r)}, t)_{2,\mu} = 2^{m/2} \alpha_{n,r} \left\{ \frac{n!}{(\mu+2)_n} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m \right\}^{1/2}. \quad (2.8)$$

С учетом равенств (2.7) и (2.8) запишем

$$\begin{aligned}
 E_{n-1}(f_0)_{2,\mu} &\leq \frac{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(z^r f_0^{(r)}, t)_{2,\mu} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/p}} \\
 &= \frac{\left(\int_0^h 2^{mp/2} \alpha_{n,r}^p \left\{ \frac{n!}{(\mu+2)_n} \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^m \right\}^{p/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \left(\int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} \varphi(t) dt \right)^{1/p}} = \left\{ \frac{n!}{(\mu+2)_n} \right\}^{1/2}.
 \end{aligned}$$

□

Из теоремы 2.1 вытекают ряд следствий.

Следствие 2.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) \equiv 1$. Тогда

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{\left\{ \int_0^h \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \right\}^{1/p}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \left\{ \int_0^h \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} dt \right\}^{1/p}}. \quad (2.9)$$

В частности, при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ из (2.9) имеем

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \left\{ \frac{n}{nh - \text{Si}(nh)} \right\}^{m/2} \left\{ \int_0^h \Omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \right\}^{m/2}. \quad (2.10)$$

При $h = \pi/n$ из (2.10) получаем

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \left\{ \frac{n}{\pi - \text{Si}(\pi)} \right\}^{m/2} \left\{ \int_0^{\pi/n} \Omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \right\}^{m/2}.$$

Следствие 2.2. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq \pi/n$, $\varphi(t) = t$. Тогда

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{\left\{ \int_0^h t \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \right\}^{1/p}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \left\{ \int_0^h t \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)^{mp/2} dt \right\}^{1/p}}. \quad (2.11)$$

В частности, при $p = 2/m$, $m \in \mathbb{N}$ из (2.11) получаем

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{n^m}{\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{1}{n^2 h^2 - 4 \sin^2 \frac{nh}{2}} \right\}^{m/2} \left\{ \int_0^h t \Omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \right\}^{m/2}. \quad (2.12)$$

При $h = \pi/n$ из (2.12) имеем

$$E_{n-1}(f)_{2,\mu} \leq \frac{n^m}{\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{1}{\pi^2 - 4} \right\}^{m/2} \left\{ \int_0^{\pi/n} t \Omega_m^{2/m}(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} \right\}^{m/2}.$$

3. Значения поперечников классов $W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$ в пространстве $\mathcal{B}_{2,\mu}$

Пусть S — единичный шар в пространстве $\mathcal{B}_{2,\mu}$, $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $\mathcal{B}_{2,\mu}$, $\Lambda_n \subset \mathcal{B}_{2,\mu}$ — n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset \mathcal{B}_{2,\mu}$ — подпространство коразмерности n , $\mathcal{L} : \mathcal{B}_{2,\mu} \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор и $\mathcal{L}^\perp : \mathcal{B}_{2,\mu} \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования.

Величины

$$b_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) = \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N} \} : \Lambda_{n+1} \subset \mathcal{B}_{2,\mu} \},$$

$$d_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) = \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_{\mathcal{B}_{2,\mu}} : \varphi \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{N} \} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_{2,\mu} \},$$

$$\lambda_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_{\mathcal{B}_{2,\mu}} : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}\mathcal{B}_{2,\mu} \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_{2,\mu} \},$$

$$d^n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) = \inf \{ \sup \{ \|f\|_{\mathcal{B}_{2,\mu}} : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset \mathcal{B}_{2,\mu} \},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) = \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_{\mathcal{B}_{2,\mu}} : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}^\perp \mathcal{B}_{2,\mu} \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_{2,\mu} \},$$

называют соответственно *бернштейновским*, *колмогоровским*, *линейным*, *гельфандовским* и *проекционным n -поперечниками* в пространстве $\mathcal{B}_{2,\mu}$.

Поскольку $\mathcal{B}_{2,\mu}$ является гильбертовым пространством, то между перечисленными n -поперечниками выполняются следующие соотношения (см. [21, с. 239]):

$$b_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) \leq d^n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) \leq d_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) = \lambda_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}) = \Pi_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_{2,\mu}). \quad (3.1)$$

Также полагаем

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}) := \sup \{ E_n(f) : f \in \mathfrak{N} \}.$$

Пусть $\Phi(u)$ ($u \geq 0$) — произвольная непрерывная возрастающая функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Будем ее называть мажорантой.

Через $W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$, где $m, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$, $0 < h \leq \pi/n$, обозначим класс функций $f \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$, удовлетворяющих условию

$$\frac{1}{h^2} \int_0^h t \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} t dt \leq \Phi^p(u).$$

Обозначим через τ_* значение аргумента, при котором функция $\sin \tau / \tau$ достигает на полусегменте $[0, \infty)$ своего наименьшего значения. Очевидно, τ_* есть минимальный положительный корень уравнения $\frac{\operatorname{tg} \tau}{\tau} = 1$ и $4,49 < \tau_* < 4,51$ (см. [18]). Положим

$$\left(1 - \frac{\sin \tau}{\tau}\right)_* := \begin{cases} 1 - \frac{\sin \tau}{\tau}, & \text{если } 0 \leq \tau \leq \tau_*; \\ 1 - \frac{\sin \tau_*}{\tau_*}, & \text{если } \tau \geq \tau_*. \end{cases}$$

Эта функция будет играть важную роль при нахождении значения вышеперечисленных поперечников указанных классов функций.

Теорема 3.1. Пусть $m, n, r \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq \infty$ и функция Φ при любых $h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\Phi(h)}{\Phi(\pi/n)}\right)^p \geq \left(\frac{\pi}{nh}\right)^2 \frac{\int_0^{nh} \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt}{\int_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt}. \quad (3.2)$$

Тогда справедливы равенства

$$\sigma_n(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi); \mathcal{B}_{2,\mu}) = \mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)) = \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi(\pi/n),$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n -поперечников. Множество мажорант Φ , для которых выполняется условие (3.2), не пусто.

Доказательство. Из неравенства (2.11) при $h = \pi/n$, для любого $f \in \mathfrak{B}_{2,\mu}^{(r)}$ имеем

$$E_{n-1}(f) \leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \cdot \left\{ \frac{n^2}{\pi^2} \int_0^{\pi/n} t \Omega_m^p(z^r f^{(r)}, t)_{2,\mu} dt \right\}^{1/p}.$$

Отсюда, согласно определению класса $W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$ и в силу соотношения (3.1), получаем оценку сверху для проекционного n -поперечника

$$\begin{aligned} \Pi_n(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi); \mathcal{B}_{2,\mu}) &\leq \mathcal{E}_{n-1}(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)) \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \left(\frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right)^{-1/p} \Phi(\pi/n). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_{n-1} : \|p_n\| \leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \left[\frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)^{mp/2} dt \right]^{-1/p} \Phi(\pi/n) \right\}$$

и покажем, что $S_{n+1} \subset W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$. Действительно, для любого $p_n(z) \in \mathcal{P}_n$ из соотношения (2.4) имеем

$$\Omega_m^p(z^r p_n^{(r)}, t)_{2,\mu} \leq 2^{mp/2} \alpha_{n,r}^p \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp/2} \|p_n\|^p. \quad (3.4)$$

Из неравенства (3.4) для произвольного полинома $p_n \in S_{n+1}$ и любого $h \in \mathbb{R}_+$, с учетом условия (3.2), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \int_0^h t \Omega_m^p(z^r p_n^{(r)}, t)_{2,\mu} dt &\leq 2^{mp/2} \cdot \alpha_{n,r}^p \|p_n\|^p \cdot \frac{1}{h^2} \int_0^h t \left(1 - \frac{\sin nt}{nt}\right)_*^{mp/2} dt \\ &\leq \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \right\}^{-1} \Phi^p(\pi/n) \cdot \frac{1}{(nh)^2} \int_0^{nh} t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \leq \Phi^p(h), \end{aligned}$$

а это и значит, что $S_{n+1} \subset W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi)$. Используя определение бернштейновского n -поперечника, с учетом соотношения (3.1), будем иметь

$$\begin{aligned} b_n(W_{m,p}^{(r)}(h, \Phi); \mathcal{B}_{2,\mu}) &\geq b_n(S_{n+1}; \mathcal{B}_{2,\mu}) \\ &\geq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \left\{ \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt \right\}^{-1/p} \Phi(\pi/n). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из сопоставления оценки сверху (3.3) и оценки снизу (3.5) вышеперечисленных n -поперечников получаем утверждение теоремы 3.1. $\square$

Условие (3.2) выполняется, например, для функции (см. [22]) $\Phi_0(t) = t^{\lambda/p}$, где

$$\lambda := \frac{\pi^2}{\int_0^\pi t \left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)_*^{mp/2} dt} - 2, \quad mp/2 < \alpha < mp.$$

References

- [1] A. Kolmogoroff, “Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionen klasse”, *Annals of Mathematics*, **37**:1 (1936), 107–111.
- [2] К. И. Бабенко, “О наилучших приближениях одного класса аналитических функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **22**:5 (1958), 631–640. [K. I. Babenko, “Best approximations to a class of analytic functions”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **22**:5 (1958), 631–640 (In Russian)].
- [3] В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений”, *УМН*, **15**:3 (1960), 81–120; англ. пер.: V. M. Tikhomirov, “Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15**:3 (1960), 75–111.
- [4] Л. В. Тайков, “О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций”, *Матем. заметки*, **1**:2 (1967), 155–162; англ. пер.: L. V. Taikov, “On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions”, *Math. Notes*, **1**:2 (1967), 104–109.
- [5] М. З. Двейрин, “Поперечники и ε -энтропия классов функций, аналитических в единичном круге”, *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, **23** (1975), 32–46. [M. Z. Dveyrin, “Widths and ε -entropy of classes of functions that are analytic in the unit circle of functions”, *Function theory, functional analysis and their applications*, **23** (1975), 32–46 (In Russian)].

- [6] С. Б. Вакарчук, “Точные значения поперечников классов аналитических в круге функций и наилучшие линейные методы приближения”, *Матем. заметки*, **72**:5 (2002), 665–669; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Exact values of widths of classes of analytic functions on the disk and best linear approximation methods”, *Math. Notes*, **72**:5 (2002), 615–619.
- [7] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций”, *ДАН России*, **382**:6 (2002), 747–749; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, G. A. Yusupov, “Best approximation and widths of some classes of analytic functions”, *Doklady Mathematics*, **65**:1 (2002), 111–113.
- [8] С. Б. Вакарчук, “О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I”, *Укр. матем. журн.*, **42**:7 (1990), 873–881; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Diameters of certain classes of functions analytic in the unit disc. I”, *Ukrainian Math. J.*, **42**:7 (1990), 769–778.
- [9] С. Б. Вакарчук, “Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций”, *Матем. заметки*, **57**:1 (1995), 30–39; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk”, *Math. Notes*, **57**:1 (1995), 21–27.
- [10] М. Ш. Шабозов, М. Р. Лангаршоев, “Приближение некоторых классов аналитических функций в пространстве B_p ”, *Вестник ХогУ*, **1**:1 (1999), 45–50. [M. Sh. Shabozov, M. R. Langarshoev, “Approximation of some classes of analytic functions in the space B_p ”, *Vestnik KhSU*, **1**:1 (1999), 45–50 (In Russian)].
- [11] М. Р. Лангаршоев, “Наилучшее приближение и значение поперечников некоторых классов функций в пространстве Бергмана”, *Докл. АН Респ. Таджикистан*, **48**:3–4 (2005), 12–17. [M. R. Langarshoev, “Best approximation and the value of the diameters of some classes of functions in Bergman space”, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, **48**:3–4 (2005), 12–17 (In Russian)].
- [12] М. Ш. Шабозов, “О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 ”, *Матем. заметки*, **114**:3 (2023), 435–446; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, “On the best simultaneous approximation in the Bergman space B_2 ”, *Math. Notes*, **114**:3 (2023), 377–386.
- [13] М. Ш. Шабозов, О. Ш. Шабозов, “О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $\mathfrak{B}_{2,\gamma}$ ”, *ДАН*, **412**:4 (2007), 466–469; англ. пер.:M. Sh. Shabozov, O. Sh. Shabozov, “On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces”, *Doklady Mathematics*, **75**:1 (2007), 97–100.
- [14] С. Б. Вакарчук, “Оценки значений n -поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$ ”, *Матем. заметки*, **108**:6 (2020), 803–822; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, “Estimates of the values of n -widths of classes of analytic functions in the weight spaces $H_{2,\gamma}(D)$ ”, *Math. Notes*, **108**:6 (2020), 775–790.
- [15] М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов, “Среднеквадратическое приближение некоторых классов функций комплексного переменного рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ ”, *Чебышевский сборник*, **23**:1 (2022), 167–182. [M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov, “Mean-squared approximation of some classes of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$ ”, *Chebyshevskii sb.*, **23**:1 (2022), 167–182 (In Russian)].
- [16] М. Р. Лангаршоев, “Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана $B_{2,\gamma}$ ”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:142 (2023), 182–192. [M. R. Langarshoev, “The best approximation and the values of the widths of some classes of analytical functions in the weighted Bergman space $B_{2,\gamma}$ ”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:142 (2023), 182–192 (In Russian)].
- [17] К. В. Руновский, “О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p , $0 < p < 1$ ”, *Матем. сборник*, **185**:8 (1994), 81–102; англ. пер.:K. V. Runovskii, “On approximation by families of linear polynomial operators in L_p -spaces, $0 < p < 1$ ”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **82**:2 (1995), 441–459.
- [18] С. Б. Вакарчук, В. И. Забутная, “Точное неравенства типа Джексона–Стечкина в L_2 и поперечники функциональных классов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 328–336; англ. пер.:S. B. Vakarchuk, V. I. Zabutnaya, “A sharp inequality of Jackson–Stechkin type in L_2 and the widths of functional classes”, *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 306–313.

- [19] М. Абрамовица, И. Стигана, *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами*, Наука, М., 1979. [M. Abramovica, I. Stigana, *Special Functions Reference with Formulas, Graphs and Tables*, Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russian)].
- [20] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438; англ. пер.: L. V. Taikov, “Inequalities containing best approximations and the modulus of continuity of functions in L_2 ”, *Math. Notes*, **20**:3 (1976), 797–800.
- [21] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976. [V. M. Tikhomirov, *Some Questions of Approximation Theory*, Moscow State University Publ., Moscow, 1976 (In Russian)].
- [22] М. Р. Лангаршоев, “Точные неравенства типа Джексона–Стечкина и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве L_2 ”, *Модел. и анализ информ. систем*, **20**:5 (2013), 90–105. [M. R. Langarshoev, “The Exact Inequalities of Jackson–Stechkin Type and the Width Values for Some Classes of Functions in L_2 Space”, *Model. Anal. Inform. Sist.*, **20**:5 (2013), 90–105 (In Russian)].

Информация об авторе

Лангаршоев Мухтор Рамазонович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Академия гражданской защиты МЧС России, г. Химки, Российская Федерация. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Поступила в редакцию 06.11.2023 г.
Поступила после рецензирования 01.03.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the author

Mukhtor R. Langarshoev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Civil Defence Academy of EMERCOM of Russia, Khimki, Russian Federation. E-mail: mukhtor77@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3278-4781>

Received 06.11.2023
Reviewed 01.03.2024
Accepted for press 11.03.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Родина Л.И., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-77-85>

УДК 517.925.54



О некоторых классах систем дифференциальных уравнений

Людмила Ивановна РОДИНА

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

119049, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 4

Аннотация. Рассматривается автономная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{где } x \in \mathbb{R}^n,$$

вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) непрерывны. Выделены три класса автономных систем и описаны свойства, которыми обладают решения систем каждого класса.

Будем считать, что система относится к первому классу на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, если правые части этой системы не зависят от переменных $x_1, \dots, x_n$, то есть данная система имеет вид $\dot{x} = C$, где $C \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$. Ко второму классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «каждая из функций f_i является возрастающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i , $i = 1, \dots, n$ ». Решения систем первого и второго классов обладают свойством монотонности относительно начальных условий.

К третьему классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «каждая из функций f_i является убывающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i , $i = 1, \dots, n$ ».

Получены условия отсутствия периодических решений для автономных систем второго порядка, дополняющие известные условия Бендиксона. Доказано, что системы двух дифференциальных уравнений всех трех указанных классов не могут иметь периодических решений.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, периодические решения

Для цитирования: Родина Л.И. О некоторых классах систем дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 77–85.
<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-77-85>



On some classes of systems of differential equations

Lyudmila I. RODINA

Vladimir State University

87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

National University of Science and Technology “MISiS”

4 Leninskii Pr., Moscow 119049, Russian Federation

Abstract. We consider an autonomous system of differential equations

$$\dot{x} = f(x), \quad \text{where } x \in \mathbb{R}^n,$$

the vector function $f(x)$ and its derivatives $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) are continuous. Three classes of autonomous systems are identified and the properties that systems of each class possess are described.

We will assume that the system belongs to the first class on the set $D \subseteq \mathbb{R}^n$, if the right parts of this system do not depend on variables $x_1, \dots, x_n$, that is this system has the form $\dot{x} = C$, where $C \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$. We will assign to the second class the systems that are not included in the first class, for which the next condition is met “each of the function f_i is increasing on the set $D \subseteq \mathbb{R}^n$ with respect to all variables on which it explicitly depends, with the exception of variable x_i , $i = 1, \dots, n$ ”. Solutions of systems of the first and second classes have the property of monotonicity with respect to initial conditions.

We will assign to the third class the systems that are not included in the first class, for which the condition is met “each of the function f_i is decreasing on the set $D \subseteq \mathbb{R}^n$ with respect to all variables on which it explicitly depends, with the exception of variable x_i , $i = 1, \dots, n$ ”.

The conditions for the absence of periodic solutions for autonomous systems of the second order are obtained, complementing the known Bendikson conditions. It is proved that systems of two differential equations of all three specified classes cannot have periodic solutions.

Keywords: systems of differential equations, periodic solutions

Mathematics Subject Classification: 34A34, 34C05, 34C25.

For citation: Rodina L.I. On some classes of systems of differential equations. *Vestnik Rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 77–85. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-77-85> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \quad (0.1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(x)$ и ее производные $\partial f_i / \partial x_j$ ($i, j = 1, \dots, n$) непрерывны. Обозначим через $\varphi(t, x) = (\varphi_1(t, x), \dots, \varphi_n(t, x))$ решение данной системы, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$.

Выделим три класса систем дифференциальных уравнений (0.1) и опишем свойства, которыми обладают решения (интегральные кривые) систем каждого класса.

Будем считать, что система относится к первому классу на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$, если правые части этой системы не зависят от переменных $x_1, \dots, x_n$, то есть система (0.1) имеет вид $\dot{x} = C$, где $C \in \mathbb{R}^n$, $x \in D$. Решением данной системы является вектор-функция $\varphi(t, x(0)) = Ct + x(0)$. Пусть $\varphi(t, x(0)) \in D$ и $\varphi(t, y(0)) \in D$ при $t \in [0, T]$, где $0 < T \leq +\infty$. Тогда $\varphi(t, x(0)) - \varphi(t, y(0)) = x(0) - y(0)$, то есть разность $\varphi(t, x(0)) - \varphi(t, y(0))$ постоянная для всех $t \in [0, T]$.

Ко второму классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых на некотором множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ выполнено условие «каждая из функций f_i является возрастающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i , $i = 1, \dots, n$ ». Свойства систем второго класса описаны в работе [1], в которой показано, что решения систем второго класса (0.1) обладают свойством монотонности относительно начальных условий. Очевидно, что свойство монотонности также выполнено для систем первого класса.

К третьему классу отнесем системы, не входящие в первый класс, для которых выполнено условие «каждая из функций f_i является убывающей на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^n$ по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i , $i = 1, \dots, n$ ». Показано, что системы третьего класса могут не быть монотонными относительно начальных условий, но для них справедливо следующее свойство: «если $x(0) < y(0)$, то не существует точки $t^* \in (0, +\infty)$, такой, что $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$ ». Здесь и далее неравенство $x < y$, записанное для векторов $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, будем понимать как неравенства $x_i < y_i$, $i = 1, \dots, n$. Аналогично, $x \leq y$ означает, что $x_i \leq y_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Получены условия отсутствия периодических решений для автономных систем второго порядка, которые можно определить по свойствам правых частей уравнений. Доказано, что системы двух дифференциальных уравнений всех трех указанных классов не могут иметь периодических решений.

1. Свойства систем второго класса (свойство монотонности решений относительно начальных условий)

Приведем основные результаты о свойствах решений систем второго класса.

Рассмотрим сначала линейную систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = Ax$, где A — постоянная матрица размеров $n \times n$. Известно, что решение данной системы можно записать в виде $\varphi(t, x) = e^{At}x$, где e^{At} — матричная экспонента. Матрица A называется экспоненциально неотрицательной, если $e^{At} \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Матрица A называется матрицей Метцлера, если ее элементы удовлетворяют неравенствам $a_{ij} \geq 0$ при $i \neq j$, $i = 1, \dots, n$, см. [2].

Лемма 1.1. (см. [2]). *Матрица A является экспоненциально неотрицательной тогда и только тогда, когда она является матрицей Метцлера.*

Первоначально данное утверждение, по-видимому, было доказано в работе Т. Важевского [3] в 1950 году. Из леммы 1.1 очевидно следует, что если A – матрица Метцлера и $x \leq y$, то $\varphi(t, x) = e^{At}x \leq e^{At}y = \varphi(t, y)$ для любого $t \geq 0$. Таким образом, линейная система с матрицей Метцлера обладает свойством монотонности решений.

Условия, при которых справедливо свойство монотонности решений нелинейной системы (0.1), исследовались в работе [1]. В ней, в частности, показано, что свойство монотонности выполнено для любого дифференциального уравнения вида (0.1).

Напомним, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *положительно инвариантным относительно системы* (0.1), если для любой начальной точки $x(0) \in D$ траектория решения $\varphi(t, x(0))$ содержится в D .

Теорема 1.1. (см. [1]). *Пусть выполнены следующие условия:*

- 1) *множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы (0.1);*
- 2) *каждая из функций f_i является возрастающей на множестве D по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i , $i = 1, \dots, n$;*
- 3) *$x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) \leq y(0)$.*
Тогда $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geq 0$.

З а м е ч а н и е 1.1. Если система (0.1) линейная и выполнены условия теоремы 1.1, то матрица A данной системы является матрицей Метцлера.

Следствие 1.1. *Предположим, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы (0.1) и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$ либо $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ для всех $x \in D$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда, если $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) \leq y(0)$, то $\varphi(t, x(0)) \leq \varphi(t, y(0))$ для всех $t \geq 0$.*

Отметим, что свойство монотонности, сформулированное в теореме 1.1, важно для решения многих прикладных задач, среди которых задачи оценки характеристик добычи возобновляемого ресурса, см. [4–6].

2. Свойства систем третьего класса

Системы третьего класса могут не обладать свойством монотонности относительно начальных условий, которое выполнено для систем первого и второго классов (см. ниже пример 2.1). Покажем, что для этих систем справедливо другое свойство, представленное в следующем утверждении.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия:*

- 1) *множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы (0.1);*
- 2) *каждая из функций f_i является убывающей на множестве D по всем переменным, от которых она явным образом зависит, за исключением переменной x_i , $i = 1, \dots, n$;*
- 3) *$x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) < y(0)$.*
Тогда не существует точки $t^ \in (0, +\infty)$, такой, что $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение функции

$$R_i(t) = R_i(t, x(0), y(0)) \doteq \varphi_i(t, x(0)) - \varphi_i(t, y(0)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

которые непрерывны по t как разность непрерывных функций. Заметим, что $R_i(0) = x_i(0) - y_i(0)$.

Если $x(0) < y(0)$, то $R_i(0, x(0), y(0)) < 0$, $i = 1, \dots, n$. Предположим, что утверждение теоремы не верно, тогда существует $t^* \in (0, +\infty)$, такое, что $\varphi_i(t^*, x(0)) > \varphi_i(t^*, y(0))$, $i = 1, \dots, n$, то есть $R_i(t^*, x(0), y(0)) > 0$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Следовательно, найдутся $t_i^* \in (0, t^*)$ такие, что $R_i(t_i^*, x(0), y(0)) = 0$, $i = 1, \dots, n$. Пусть

$$\tau_i = \sup\{t \in (0, t^*) : R_i(t, x(0), y(0)) = 0\}, \quad \tau = \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}.$$

Из выбора точки τ следует, что $R_i(t, x(0), y(0)) > 0$ при всех $t \in (\tau, t^*)$. Поскольку $\tau_i \in (0, t^*)$, то $\tau \in (0, t^*)$.

Пусть $\delta \in (0, \Delta]$, где $\Delta = t^* - \tau$. Переходя от системы дифференциальных уравнений (0.1) к интегральным уравнениям, получаем

$$\varphi_i(\tau + \delta, x(0)) = \varphi_i(\tau, x(0)) + \int_{\tau}^{\tau+\delta} f_i(\varphi(s, x(0))) ds, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Определим непустое множество $I(\tau)$ как множество индексов $i \in \{1, \dots, n\}$ таких, что $R_i(\tau, x(0), y(0)) = 0$. Заметим, что $I(\tau) \neq \{1, \dots, n\}$, поскольку траектории с началом в точках $x(0) < y(0)$ не могут прийти за время τ в одну и ту же точку. Рассмотрим функции

$$F_i(t, x(0), y(0)) \doteq f_i(\varphi(t, x(0))) - f_i(\varphi(t, y(0))), \quad i = 1, \dots, n.$$

Из равенства (2.2) получаем, что для всех $i \in I(\tau)$ и всех $\delta \in (0, \Delta]$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{\tau+\delta} F_i(s, x(0), y(0)) ds &= \varphi_i(\tau + \delta, x(0)) - \varphi_i(\tau, x(0)) - \varphi_i(\tau + \delta, y(0)) + \varphi_i(\tau, y(0)) \\ &= R_i(\tau + \delta, x(0), y(0)) > 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что из непрерывности подинтегральной функции для всех $i \in I(\tau)$ следует неравенство $F_i(\tau, x(0), y(0)) \geq 0$, то есть

$$f_i(\varphi(\tau, x(0))) \geq f_i(\varphi(\tau, y(0))), \quad i \in I(\tau). \quad (2.4)$$

Теперь возможны следующие два случая, в первом из которых хотя бы одна из функций f_i , $i \in I(\tau)$ зависит от некоторой переменной x_j , $j \notin I(\tau)$. Пусть это будет функция f_k , $k \in I(\tau)$, тогда $\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0))$ для всех $i \in I(\tau)$, $\varphi_i(\tau, x(0)) > \varphi_i(\tau, y(0))$ при $i \notin I(\tau)$ и из второго условия теоремы следует $f_k(\varphi(\tau, x(0))) < f_k(\varphi(\tau, y(0)))$. Получили противоречие с (2.4).

Во втором случае все функции f_i , $i \in I(\tau)$ не зависят от переменных x_i , $i \in J(\tau)$. Тогда

$$\varphi_i(\tau, x(0)) = \varphi_i(\tau, y(0)) \quad \text{для всех } i \in I(\tau), \quad (2.5)$$

и можно выделить из исходной системы (0.1) отдельную подсистему, в которую входят только уравнения с x_i , $i \in I(\tau)$. Поэтому из (2.5) следует равенство

$$\varphi_i(t, x(0)) = \varphi_i(t, y(0)) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}, \quad i \in I(\tau),$$

из которого получаем $f_i(\varphi(s, x(0))) - f_i(\varphi(s, y(0))) \equiv 0$, $i \in I(\tau)$, что противоречит (2.3). $\square$

Следствие 2.1. *Предположим, что множество $D \subseteq \mathbb{R}^n$ положительно инвариантно относительно системы (0.1) и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0$ либо $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0$ для всех $x \in D$, $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$. Тогда, если $x(0) \in D$, $y(0) \in D$ и $x(0) < y(0)$, то не существует точки $t^* \in (0, +\infty)$, такой, что $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$.*

Пример 2.1. Рассмотрим свойства линейной системы третьего класса

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = -3x_1 + 4x_2. \end{cases} \quad (2.6)$$

Решением системы является функция $\varphi(t, x(0)) = (\varphi_1(t, x(0)), \varphi_2(t, x(0)))$, где

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, x(0)) &= \frac{3x_1(0) + x_2(0)}{4}e^t + \frac{x_1(0) - x_2(0)}{4}e^{5t}, \\ \varphi_2(t, x(0)) &= \frac{3x_1(0) + x_2(0)}{4}e^t - \frac{3x_1(0) - 3x_2(0)}{4}e^{5t}. \end{aligned}$$

Выпишем функции $R_i(t) = R_i(t, x(0), y(0))$, $i = 1, 2$, заданные равенством (2.1):

$$\begin{aligned} R_1(t) &= \frac{3R_1(0) + R_2(0)}{4}e^t + \frac{R_1(0) - R_2(0)}{4}e^{5t} = \frac{R_1(0)}{4}(3e^t + e^{5t}) + \frac{R_2(0)}{4}(e^t - e^{5t}), \\ R_2(t) &= \frac{3R_1(0) + R_2(0)}{4}e^t - \frac{3R_1(0) - 3R_2(0)}{4}e^{5t} = \frac{3R_1(0)}{4}(e^t - e^{5t}) + \frac{R_2(0)}{4}(e^t + 3e^{5t}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Покажем, что для данной системы не выполнено свойство монотонности решений относительно начальных условий, которым обладают системы первого и второго классов. Пусть, например, $x(0) = (1, 1)$, $y(0) = (5, 9)$, тогда $R_1(0) = -4$, $R_2(0) = -8$. Из (2.7) найдем $R_1(t) = e^{5t} - 5e^t$, $R_2(t) = -5e^t - 3e^{5t}$. Следовательно,

$$\varphi_1(t, x(0)) > \varphi_1(t, y(0)) \text{ при } t > 0, 25 \ln 5; \quad \varphi_2(t, x(0)) < \varphi_2(t, y(0)) \text{ при всех } t > 0.$$

Отметим, что для решений системы (2.6) выполнено свойство, доказанное в теореме 2.1. Действительно, пусть $x(0) < y(0)$, тогда $R_1(0) < 0$, $R_2(0) < 0$. Если $R_1(0) \leq R_2(0)$, то из (2.7) следует, что $R_1(t) \leq R_2(0)e^t < 0$ при $t > 0$, то есть $x_1(t) < y_1(t)$ для всех $t > 0$. Если $R_1(0) > R_2(0)$, то $R_2(t) < R_1(0)e^t < 0$ при $t > 0$, то есть $x_2(t) < y_2(t)$ для всех $t > 0$. Таким образом, если $x(0) < y(0)$, то не существует точки $t^* \in (0, +\infty)$, для которой $\varphi(t^*, x(0)) > \varphi(t^*, y(0))$.

Системы второго и третьего классов в популяционной динамике двух видов

Пусть численности видов равны $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, тогда в соответствии с гипотезами Вольтерра модели взаимодействия двух видов могут быть описаны системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 + b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2, \\ \dot{x}_2 = a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 - c_2x_2^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь параметры $a_i > 0$ являются постоянными собственной скорости роста видов, $c_i > 0$ — постоянные самоограничения численности (внутривидовой конкуренции), b_{ij} — постоянные взаимодействия видов, $i, j = 1, 2$. Знаки коэффициентов b_{ij} определяют тип

взаимодействия, которые классифицированы Е. Одумом по результатам изменения численности каждого вида в присутствии другого вида. Свойства решений системы (2.8) при различных типах взаимодействий подробно изложены в [7, с. 143–157].

Среди систем вида (2.8) нет систем первого класса, поскольку $a_i > 0$, $c_i > 0$, $i = 1, 2$. К системам второго класса относятся системы вида (2.8), для которых выполнены следующие неравенства: $b_{12} > 0$, $b_{21} > 0$ (модель симбиоза по классификации Е. Одума), $b_{12} > 0$, $b_{21} = 0$ (комменсализм), $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$ (нейтрализм). Системами третьего класса являются системы, для которых $b_{12} < 0$, $b_{21} < 0$ (модель конкуренции) или $b_{12} = 0$, $b_{21} < 0$ (аменсализм). Система «хищник-жертва», для которой $b_{12} > 0$, $b_{21} < 0$, не относится к трем рассмотренным классам и имеет периодические решения.

3. Условия отсутствия периодических решений для автономных систем второго порядка

Вопросам существования периодических и почти-периодических решений для различных дифференциальных уравнений и систем посвящено множество исследований, среди которых работы [8–10].

В данном разделе получены условия отсутствия периодических решений, которые можно определить по свойствам правых частей систем второго порядка

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2). \quad (3.1)$$

Одним из таких условий является известный критерий Бендиксона: «Если в односвязной области D частные производные от функций $P(x_1, x_2)$ и $Q(x_1, x_2)$ непрерывны, и выражение $\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2}$ сохраняет знак и не тождественно обращается в нуль, то в области D не содержится замкнутых решений» [11, с. 142].

Докажем свойство, верное для системы второго порядка (3.1), принадлежащей одному из трех описанных классов.

Теорема 3.1. Пусть для системы (3.1) в области D выполнено хотя бы одно из условий:

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x_1} > 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} \equiv 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} \equiv 0. \quad (3.2)$$

Тогда в области D система (3.1) не имеет периодических решений.

Доказательство. Из условий (3.2) следует, что система второго порядка (3.1) принадлежит одному из трех рассмотренных классов, тогда для нее справедливы утверждения теоремы 1.1 или теоремы 2.1. Предположим, что утверждение теоремы 3.1 не верно. Тогда данная система имеет периодическое решение, которое обозначим $\varphi_0(t)$, а его траекторию обозначим γ_0 .

Рассмотрим случай, когда движение по циклу идет по часовой стрелке. Определим прямые $x_1 = \ell_1$ и $x_1 = \ell_2$, которые являются вертикальными касательными к траектории γ_0 , такие, что $\ell_1 < \ell_2$, левее прямой $x_1 = \ell_1$ и правее прямой $x_1 = \ell_2$ нет точек данной траектории. Выберем точки $x(0)$ и $x(t^*)$ на кривой γ_0 , так, что $x_1(0) = \ell_1$, $x_1(t^*) = \ell_2$; тогда на кривой γ_0 найдутся точки $y(0)$ и $y(t^*) = \varphi_0(t^*, y(0))$ такие, что $y(0) > x(0)$ и $y(t^*) < x(t^*)$. Следовательно, существует $t^* > 0$, такое, что $R_i(0) < 0$, $R_i(t^*) > 0$ при $i = 1, 2$. Получили противоречие, так как последнее свойство не может выполняться для

систем первых трех классов. Аналогичное доказательство справедливо в случае, когда движение по циклу идет против часовой стрелки (здесь нужно построить горизонтальные касательные к периодической траектории). $\square$

З а м е ч а н и е 3.1. Если линейная система второго порядка $\dot{x} = Ax$ принадлежит второму или третьему классу, то собственные значения матрицы A вещественные. Следовательно, особая точка $x = 0$ не может быть фокусом или центром.

П р и м е р 3.1. Приведем следствие теоремы 3.1 для уравнения нелинейных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0, \quad (3.3)$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы. Отметим, что достаточные условия для того, чтобы уравнение (3.3) имело устойчивый предельный цикл, получены в работе А. Ф. Филиппова [9].

Следствие 3.1. Если в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2$ выполнено неравенство

$$f'(x_1)x_2 + g'(x_1) < 0, \quad (3.4)$$

то в этой области нет периодических решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему, соответствующую данному уравнению

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -f(x_1)x_2 - g(x_1).$$

Найдем $\frac{\partial P}{\partial x_2} = 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x_1} = -f'(x_1)x_2 - g'(x_1)$; поэтому при выполнении неравенства (3.4) указанная система относится ко второму классу. В силу теоремы 3.1 данная система не может иметь периодических решений в области G . $\square$

References

- [1] Л. И. Родина, М. С. Волдеаб, “О свойстве монотонности решений нелинейных систем относительно начальных условий”, *Дифференциальные уравнения*, **59**:8 (2023), 1022–1028; англ. пер.: L. I. Rodina, M. S. Woldeab, “On the monotonicity of solutions of nonlinear systems with respect to the initial conditions”, *Differential Equations*, **59**:8 (2023), 1025–1031.
- [2] D. Noutsos, M. J. Tsatsomeros, “Reachability and holdability of nonnegative states”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **30**:2 (2008), 700–712.
- [3] T. Wazewski, “Systemes des equations et des inegalites differentielles ordinaires aux deuxiemes membres monotones et leurs applications”, *Annales de la Societe Polonaise de Mathematique*, **23** (1950), 112–166.
- [4] Л. И. Родина, “Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, “Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft”, *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].
- [5] L. I. Rodina, A. H. Hammadi, “Optimization problems for models of harvesting a renewable resource”, *Journal of Mathematical Sciences*, **25**:1 (2020), 113–122.
- [6] М. С. Волдеаб, Л. И. Родина, “О способах добычи возобновляемого ресурса из структурированной популяции”, *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 16–26. [M. S. Woldeab, L. I. Rodina, “About the methods of renewable resource extraction from the structured population”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 16–26 (In Russian)].

- [7] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 232 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Scientific-Publishing Centre “Regular and Chaotic Dynamics”, Izhevsk, 2002 (In Russian), 232 pp.]
- [8] М. А. Красносельский, А. И. Перов, “Об одном принципе существования ограниченных периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Доклады Академии наук*, **123**:2 (1958), 235–238. [M. A. Krasnosel'skiy, A. I. Perov, “On a certain principle of the existence of bounded, periodical and almost periodical solutions to systems of ordinary differential equations”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **123**:2 (1958), 235–238 (In Russian)].
- [9] А. Ф. Филиппов, “Достаточные условия существования устойчивого предельного цикла для уравнения второго порядка”, *Математический сборник (новая серия)*, **30(72)**:1 (1952), 171–180. [A. F. Filippov, “A sufficient condition for the existence of a stable limit cycle for an equation of the second order”, *Matematicheskii Sbornik. Novaya Seriya*, **30(72)**:1 (1952), 171–180 (In Russian)].
- [10] В. Н. Лаптинский, “О построении периодических решений дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **20**:3 (1984), 536–539. [V. N. Laptinskiy, “Construction of periodic solutions of differential equations”, *Differential Equations*, **20**:3 (1984), 536–539 (In Russian)].
- [11] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М.–Л., 1949, 448 с. [V. V. Nemytskiy, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Gostekhizdat Publ., M.–L., 1949 (In Russian), 448 pp.]

Информация об авторе

Родина Людмила Ивановна, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры функционального анализа и его приложений, Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир; профессор кафедры математики, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», г. Москва, Российская Федерация. E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Поступила в редакцию 13.11.2023 г.
Поступила после рецензирования 07.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the author

Ludmila I. Rodina, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Professor of the Functional Analysis and its Applications Department, Vladimir State University, Vladimir; Professor of the Mathematics Department, National University of Science and Technology “MISIS”, Moscow, Russian Federation.
E-mail: LRodina67@mail.ru
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1077-2189>

Received 13.11.2023
Reviewed 07.02.2024
Accepted for press 11.03.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Романенков А.М., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97>

УДК 517.953, 517.929.7



О решении смешанной задачи для уравнения колебаний движущегося вязкоупругого полотна

Александр Михайлович РОМАНЕНКОВ

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4

ФИЦ «Информатика и управление» Российской академии наук

119333, Российская Федерация, г. Москва, ул. Вавилова, 44/2

Аннотация. Рассматривается модельная начально-краевая задача малых поперечных колебаний вязкоупругого движущегося полотна с шарнирным условием закрепления. Колебания такого полотна описываются линейным дифференциальным уравнением 5-го порядка по пространственной переменной с постоянными коэффициентами. Стоит отметить, что в уравнение входят смешанные производные искомой функции как по пространственной переменной, так и по времени. В работе описан прием для построения решения в виде функционального ряда по системе базисных функций. Для решения начально-краевой задачи при дополнительном условии сохранения энергии получено условие, обеспечивающее единственность решения. Явно описан специальный класс функций, для которых выполняется теорема единственности.

Ключевые слова: линейное уравнение в частных производных, начально-краевая задача, колебания вязкоупругого полотна, точные решения краевой задачи, единственность решения

Для цитирования: Романенков А.М. О решении смешанной задачи для уравнения колебаний движущегося вязкоупругого полотна // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 86–97. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97>

SCIENTIFIC ARTICLE

© A. M. Romanenkov, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97>

On the solution of a mixed problem for the equation of vibrations of a moving viscoelastic web

Alexandr M. ROMANENKOV

Moscow Aviation Institute (National Research University)

4 Volokolamskoye shosse, Moscow 125993, Russian Federation

FRC “Informatics and management” of the Russian Academy of Sciences

44/2 Vavilov St., Moscow 119333, Russian Federation

Abstract. A model initial boundary value problem of small transverse oscillations of a viscoelastic moving web with a hinged condition of fastening is considered. The vibrations of such a canvas are described by a linear differential equation of the 5th order in a spatial variable with constant coefficients. It is worth noting that the equation includes mixed derivatives of the desired function both with respect to the spatial variable and with respect to time. The paper describes a technique for constructing a solution in the form of a functional series based on a system of basis functions. To solve the initial-boundary value problem under the additional condition of conservation of energy, a condition is obtained that ensures the uniqueness of the solution. A special class of functions for which the uniqueness theorem holds is explicitly described.

Keywords: linear partial differential equation, initial boundary value problem, vibrations of a viscoelastic web, exact solutions of a boundary value problem, uniqueness of the solution

Mathematics Subject Classification: 35C10, 35G16, 35L25, 35L35, 35L65.

For citation: Romanenkov A.M. On the solution of a mixed problem for the equation of vibrations of a moving viscoelastic web. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 86–97. <https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-86-97> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Построением и исследованием математических моделей колебаний движущихся вязкоупругих материалов занимались многие исследователи. В работе [1] рассмотрены модели, в которых учитываются вязкоупругие эффекты. В этой работе исследованы модель Кельвина–Фойгта колебаний линейной пружины с амортизатором и модель упругих колебаний вязкоупругого полотна, выведено дифференциальное уравнение колебаний этого полотна и приведены численные схемы для построения приближенного решения соответствующей начально-краевой задачи. В работах [2, 3] выполнено исследование устойчивости гармонического режима движения вязкоупругого полотна при условии погружения движущегося полотна в жидкую и воздушную среды. В работе [4] выполнена систематизация результатов моделирования движения вязкоупругих материалов при различных предположениях, проведено исследование устойчивости колебаний и рассмотрены некоторые задачи управления колебаниями. В [5] с помощью метода разложения по малому параметру и применения преобразования Фурье проведено исследование частот поперечных колебаний вязкоупругой балки и установлено существенное влияние на характер колебаний, слагаемых с производной по времени. В работе [6] с применением техники комплексных уравнений на собственные значения выполнен анализ динамических характеристик и устойчивости движения при условии наличия пьезоэлектрических слоев, с помощью численных методов построены области устойчивости и неустойчивости колебаний. Авторы работ [7, 8] рассмотрели нелинейные модели движения упругого полотна и для такого случая выполнили численный расчет областей устойчивости и неустойчивости движения.

Отметим также некоторые приложения, где возникает уравнение вязкоупругих колебаний. В статье [9] рассмотрена задача о флаттере вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей с сосредоточенными массами в геометрически нелинейной постановке. Необходимость изучения данных флаттеров обусловлена тем, что конструкции такого типа, которые изготовлены из современных композиционных материалов, используются в авиационной промышленности. А в этой области особо важными вопросами являются вопросы прочности, демпфирования колебаний и динамической устойчивости. Для решения рассматриваемой задачи в [9] предложен численный метод, который основан на методе Бубнова–Галеркина. Работы [10, 11] посвящены исследованию колебаний вязкоупругих панелей. В основе численных алгоритмов в цитируемых работах также лежит метод Бубнова–Галеркина. Отметим, что идея применения метода Бубнова–Галеркина для численного решения и исследования уравнений вязкоупругих колебаний оказывается весьма плодотворной.

Для исследования решений краевых задач широко применяются асимптотические и приближенные методы, что позволяет получить аппроксимации точного решения. Причем непосредственно явные формулы, которые определяют решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний вязкоупругого полотна, в известных источниках не приводятся. В данной работе реализован прием построения явного решения, который изложен в [12]. Стоит обратить внимание, что для исследуемой краевой задачи в общем случае закон сохранения энергии не выполняется. Рассматриваемое линейное уравнение пятого порядка по пространственной переменной содержит смешанные производные по времени и пространственной переменной. Этот факт значительно затрудняет получение решения в виде ряда Фурье по системе собственных функций некоторой краевой задачи.

1. Основные понятия

Пусть функция $u(x, t) \in C^{5,2}((0, l) \times [0, T])$, здесь $l > 0, T > 0$, то есть рассматриваемая функция имеет производные до пятого порядка включительно по пространственной переменной x , производные до второго порядка включительно по t и все смешанные производные по x и t до пятого порядка включительно. А именно, определены функции $\frac{\partial^{n+k}u}{\partial x^n \partial t^k}$, где $k \in \{0, 1, 2\}$, $\max_{n \geq 0}(n+k) = 5$. Для удобства будем обозначать

$$\frac{\partial^{n+k}u}{\partial x^n \partial t^k} = \underbrace{u_{xx \dots x}}_n \underbrace{tt \dots t}_k.$$

Математической моделью колебаний, которые возникают при движении вязкоупругих панелей (см. [4]), является начально-краевая задача для безразмерного уравнения

$$u_{tt} + 2cu_{xt} + \gamma\alpha u_{xxxxt} + (c^2 - 1)u_{xx} + \alpha u_{xxx} + \gamma\alpha c u_{xxxx} = 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = u|_{x=l} = u_{xx}|_{x=l} = 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x). \quad (1.3)$$

Здесь α — безразмерный коэффициент упругости, c — безразмерная скорость продольного движения панели с ограничением $c < 1$ и γ — безразмерное время запаздывания. Далее, если иное не оговорено, везде будем считать, что u — решение исходной начально-краевой задачи (1.1)–(1.3).

Определим линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами соотношением

$$L(\cdot) = (\cdot)_{tt} + 2c(\cdot)_{xt} + \gamma\alpha(\cdot)_{xxxxt} + (c^2 - 1)(\cdot)_{xx} + \alpha(\cdot)_{xxx} + \gamma\alpha c(\cdot)_{xxxx} \quad (1.4)$$

и запишем уравнение (1.1) в операторном виде $Lu = 0$. Сформулируем вспомогательное утверждение об операторе L .

Символом $(\cdot, \cdot)$ будем обозначать «обычное» скалярное произведение, определяемое, как интеграл от произведения функций.

Утверждение 1.1. Пусть $\omega, v \in C^{5,2}((0, l) \times [0, T])$ — функции, удовлетворяющие краевым условиям (1.2). Тогда

$$(L\omega, v) = \int_0^T \int_0^l (\omega_{tt}v - 2c\omega_t v_x + \gamma\alpha\omega_{xtt}v_{xx} - (c^2 - 1)\omega_x v_x + \alpha\omega_{xx}v_{xx} + \gamma\alpha c\omega_{xxx}v_{xx}) dx dt.$$

Доказательство. Применение формулы интегрирования по частям по пространственной переменной x , с учетом краевых условий (1.2), непосредственно дает требуемое соотношение. $\square$

О п р е д е л е н и е 1.1. Функцию $E(\tau)$, определяемую соотношением

$$E(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^l (u_t^2(x, \tau) + (1 - c^2)u_x^2(x, \tau) + \alpha u_{xx}^2(x, \tau)) dx, \quad (1.5)$$

будем называть энергией движущегося полотна в момент времени $\tau \geq 0$.

Энергия $E(\tau)$ обладает следующим свойством.

Утверждение 1.2. Пусть функция $E(\tau)$ определена соотношением (1.5). Тогда при любом $\tau \geq 0$ имеет место равенство

$$E(\tau) + \gamma\alpha \int_0^\tau \int_0^l u_{txx} (u_t + cu_x)_{xx} dx dt = E(0). \quad (1.6)$$

Доказательство. Применим утверждение 1.1, в котором положим $\omega = u$, $v = u_t$, $T = \tau$. Таким образом, так как $Lu = 0$, получим

$$\begin{aligned} 0 = (Lu, u_t) &= \int_0^\tau \int_0^l (u_{tt}u_t - 2cu_t u_{tx} + \gamma\alpha u_{xxt}^2 - (c^2 - 1)u_x u_{tx} + \alpha u_{xx} u_{txx} + \gamma\alpha c u_{xxx} u_{txx}) dx dt \\ &= \int_0^\tau \int_0^l \left(\frac{1}{2} (u_t^2 + (1 - c^2) u_x^2 + \alpha u_{xx}^2)_t + \gamma\alpha u_{txx} (u_t + cu_x)_{xx} \right) dx dt \\ &= E(\tau) - E(0) + \gamma\alpha \int_0^\tau \int_0^l u_{txx} (u_t + cu_x)_{xx} dx dt. \end{aligned}$$

□

Замечание 1.1. Согласно доказанному предложению, закон сохранения энергии в общем случае не выполняется.

Естественно, следующим шагом выделим класс решений, который обеспечивает выполнение закона сохранения энергии.

Теорема 1.1. Пусть решение $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.3) существует и имеет вид

$$u(x, t) = T(t)X(x), \quad (1.7)$$

где $X(x)$ — комплекснозначная функция вещественной переменной. Тогда, если

$$\int_0^l (X'')^2 dx = 0, \quad (X''(l))^2 - (X''(0))^2 = 0, \quad (1.8)$$

то имеет место закон сохранения энергии, то есть $E(\tau) = E(0)$ при любом $\tau > 0$

Доказательство. Обозначим через I интеграл в тождестве (1.6) и вычислим его. Получим

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\tau \int_0^l u_{txx} (u_t + cu_x)_{xx} dx dt \\ &= \int_0^\tau \int_0^l ((T(t)X(x))_{xxt})^2 + c(T(t)X(x))_{xxt} (T(t)X(x))_{xxx} dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\tau (T')^2 dt \int_0^l (X'')^2 dx + c \int_0^\tau TT' dt \int_0^l X'' X''' dx \\
&= \int_0^\tau (T')^2 dt \int_0^l (X'')^2 dx + \frac{c}{4} (T^2(\tau) - T^2(0)) ((X''(l))^2 - (X''(0))^2)
\end{aligned}$$

Теперь замечаем, что при выполнении условий (1.8) теоремы имеем $I = 0$, что обеспечивает равенство $E(\tau) = E(0)$ для любого $\tau > 0$. $\square$

Из доказанной теоремы получаем условия единственности решения рассматриваемой начально-краевой задачи.

Следствие 1.1. Если решение задачи (1.1)–(1.3) существует, то при выполнении условий теоремы 1.1 это решение единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции $v_1(x, t), v_2(x, t)$ являются решениями задачи (1.1)–(1.3) и $v_1(x, t) \neq v_2(x, t)$. Тогда функция $u(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$ является решением уравнения (1.1), удовлетворяет краевым условиям (1.2) и начальным условиям (1.3) с начальными значениями $u_0(x) = u_1(x) = 0$. Поэтому при выполнении условий теоремы 1.1 для любого $\tau \geq 0$ выполнено $E(\tau) = E(0)$. Отсюда по формуле (1.5) получаем, что $u(x, t) = 0$ и $v_1(x, t) = v_2(x, t)$. $\square$

С в о й с т в о 1.1. Пусть $X_1(x), X_2(x)$ — вещественнозначные функции вещественной переменной. Пусть, далее, $X(x) = X_1(x) + iX_2(x)$. Тогда для выполнения условия (1.8) необходимо

$$\int_0^l \left((X_1''(x))^2 - (X_2''(x))^2 \right) dx + 2i \int_0^l X_1''(x) X_2''(x) dx = 0.$$

П р и м е р 1.1. При $X_1(x) = \cos \frac{\pi n}{l} x$, $X_2(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем $X(x) = e^{i \frac{\pi n}{l} x}$, и условие (1.8) из теоремы 1.1 выполнено.

2. Основные результаты. Явное решение.

Теперь определим точный вид решения задачи (1.1)–(1.3). Воспользуемся подходом, предложенным в работе [12].

Пусть $u = T(t)e^{\lambda x}$. После подстановки этой функции в уравнение (1.1), сокращения на общий множитель и группировки слагаемых получаем

$$T'' + (2c + \gamma\alpha\lambda^3)\lambda T' + (c^2 - 1 + \alpha\lambda^2 + \gamma\alpha c\lambda^3)\lambda^2 T = 0. \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами относительно неизвестной функции $T(t)$. Составим для этого уравнения характеристическое уравнение

$$\mu^2 + (2c + \gamma\alpha\lambda^3)\lambda\mu + (c^2 - 1 + \alpha\lambda^2 + \gamma\alpha c\lambda^3)\lambda^2 = 0.$$

Корни этого уравнения определяются формулой

$$\mu_{1,2} = \lambda \left(-c - \frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \pm \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \right)^2} \right). \quad (2.2)$$

Рассмотрим нерезонансный случай, а именно, $\mu_1 \neq \mu_2$. Тогда можно выписать решение для уравнения (2.1) в виде линейной комбинации экспонент

$$T(t) = e^{\lambda(-c - \frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3)t} \left(C_1 e^{\lambda \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \right)^2} t} + C_2 e^{-\lambda \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \right)^2} t} \right),$$

и функция $u(x, t)$ определяется формулой

$$u(x, t) = \left(C_1 e^{\lambda \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \right)^2} t} + C_2 e^{-\lambda \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \right)^2} t} \right) e^{\lambda(x - (c + \frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3)t)}. \quad (2.3)$$

Положим

$$\sigma(\lambda) = \sqrt{1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \right)^2}, \quad (2.4)$$

и в частном случае при $\lambda = i\frac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\sigma_n = \sigma\left(i\frac{\pi n}{l}\right) = \sqrt{1 + \alpha\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha\gamma^2}{4} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4\right)}. \quad (2.5)$$

С учетом обозначения (2.4) искомое решение определяется формулой

$$u(x, t) = \left(C_1 e^{\lambda\sigma(\lambda)t} + C_2 e^{-\lambda\sigma(\lambda)t} \right) e^{\lambda(x - (c + \frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3)t)}. \quad (2.6)$$

Пример 2.1. Используя пример 1.1, по формуле (2.6) при $\lambda = i\frac{\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, получим

$$u(x, t) = \left(C_1 e^{-\frac{\pi n}{l} \sigma_n t} + C_2 e^{\frac{\pi n}{l} \sigma_n t} \right) e^{i\frac{\pi n}{l} \left(x - \left(c - \frac{\gamma\alpha}{2} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^3 \right) t \right)}.$$

Обратим внимание на выражения в показателях экспонент в примере 2.1. Заметим, что лишь конечное число значений σ_n будут вещественными, то есть существует такое $N \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ число $\sigma_n \in \mathbb{C}$ будет чисто мнимым. Этот факт позволяет сделать вывод о качественном поведении колебательного процесса. Для действительной части $\Re$ коэффициента при t , когда σ_n — чисто мнимое комплексное число, имеем

$$\Re \left(\lambda \sigma_n - \frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^4 - ic\lambda \right) = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\left| 1 + \alpha \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{\alpha\gamma^2}{4} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4 \right) \right|} - \frac{\gamma\alpha}{2} \left(\frac{\pi n}{l} \right)^4.$$

А так как вещественная функция $G(z) = z \sqrt{\left| 1 + \alpha z^2 \left(1 - \frac{\alpha\gamma^2}{4} z^4 \right) \right|} - \frac{\gamma\alpha}{2} z^4$ при больших значениях аргумента z положительна, то решение дифференциального уравнения содержит растущую по модулю экспоненту при увеличении аргумента t .

Далее, для уравнения (1.1) с начальными условиями экспоненциального вида построим решения в виде функционального ряда. Пусть A_1, A_2, a — некоторые числа, быть может, и комплексные. Начальные условия (1.3) определим выражениями

$$u|_{t=0} = A_1 e^{ax}, \quad u_t|_{t=0} = A_2 e^{ax}. \quad (2.7)$$

Корни характеристического уравнения (2.2) обозначим $\mu_1 = \mu_1(\lambda)$, $\mu_2 = \mu_2(\lambda)$. Согласно формуле (2.3)

$$u(x, t) = C_1 e^{\mu_1 t + \lambda x} + C_2 e^{\mu_2 t + \lambda x}.$$

Определим неизвестные параметры C_1, C_2 таким образом, чтобы условие (2.7) было выполнено. Положим $\lambda = a$. Тогда $u(x, 0) = (C_1 + C_2)e^{ax}$ и $u_t(x, 0) = (C_1\mu_1 + C_2\mu_2)e^{ax}$. Далее, получим систему уравнений для нахождения параметров C_1 и C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = A_1 \\ C_1\mu_1 + C_2\mu_2 = A_2 \end{cases},$$

решив которую, получаем

$$C_1 = \frac{A_1\mu_2 - A_2}{\mu_2 - \mu_1}, \quad C_2 = \frac{A_2 - A_1\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}.$$

Итак, решение уравнения (1.1) с начальными условиями (2.7) определяется формулой

$$u(x, t) = \frac{e^{ax} ((A_1\mu_2(a) - A_2)e^{\mu_1(a)t} + (A_2 - A_1\mu_1(a))e^{\mu_2(a)t})}{\mu_2(a) - \mu_1(a)}.$$

Если начальные условия представляют собой линейную комбинацию экспонент

$$u|_{t=0} = \sum_n A_{1n} e^{a_n x}, \quad u_t|_{t=0} = \sum_n A_{2n} e^{a_n x}, \quad (2.8)$$

то в силу линейности уравнения (1.1) решение определяется формулой

$$u(x, t) = \sum_n \frac{e^{a_n x} ((A_{1n}\mu_2(a_n) - A_{2n})e^{\mu_1(a_n)t} + (A_{2n} - A_{1n}\mu_1(a_n))e^{\mu_2(a_n)t})}{\mu_2(a_n) - \mu_1(a_n)}. \quad (2.9)$$

Рассмотрим неоднородное уравнение с правой частью специального вида

$$Lu = F(t)e^{\rho x}, \quad (2.10)$$

здесь выражение Lu определяется формулой (1.4), а начальные условия (1.3) являются тривиальными

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

Будем искать решение в виде $u(x, t) = T(t)e^{\rho x}$. Тогда после подстановки в (2.10) и сокращения на общий множитель получаем

$$T'' + (2c + \gamma\alpha\rho^3)\rho T' + (c^2 - 1 + \alpha\rho^2 + \gamma\alpha c\rho^3)\rho^2 T = F(t).$$

После применения стандартного метода вариации постоянных для этого неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами получаем решение

$$T(t) = \frac{1}{\mu_2(\rho) - \mu_1(\rho)} \int_0^t (e^{\mu_2(\rho)(t-\tau)} - e^{\mu_1(\rho)(t-\tau)}) F(\tau) d\tau.$$

Теперь можем написать решение уравнения (2.10)

$$u(x, t) = \frac{e^{\rho x}}{\mu_2(\rho) - \mu_1(\rho)} \int_0^t (e^{\mu_2(\rho)(t-\tau)} - e^{\mu_1(\rho)(t-\tau)}) F(\tau) d\tau$$

Если же правая часть уравнения имеет вид $\sum_n F_n(t) e^{\rho_n x}$, то, в силу линейности оператора L , решение определяется формулой

$$u(x, t) = \sum_n \frac{e^{\rho_n x}}{\mu_2(\rho_n) - \mu_1(\rho_n)} \int_0^t (e^{\mu_2(\rho_n)(t-\tau)} - e^{\mu_1(\rho_n)(t-\tau)}) F_n(\tau) d\tau.$$

Далее, рассмотрим случай совпадения корней характеристического уравнения. Будем считать, что $\mu_1 \equiv \mu_2$ и $\lambda \neq 0$. Тогда дискриминант характеристического уравнения обращается в ноль, то есть

$$1 - \alpha\lambda^2 + \left(\frac{\gamma\alpha}{2}\right)^2 \lambda^6 = 0, \quad (2.11)$$

а корень характеристического уравнения равен

$$\mu = \mu(\lambda) = -\lambda \left(c + \frac{\gamma\alpha}{2} \lambda^3 \right).$$

В этом случае функция $T(t)$ будет определяться формулой

$$T(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\mu t},$$

и поэтому решением однородного уравнения (1.1) будет функция

$$u(x, t) = (C_1 + C_2 t) e^{\mu(\lambda)t + \lambda x}. \quad (2.12)$$

Определим решение начальной задачи для однородного уравнения (1.1) с начальными условиями (2.7), при этом предполагаем параметр a таковым, что при $\lambda = a$ выполняется условие (2.11). Тогда

$$u(x, 0) = C_1 e^{ax} = A_1 e^{ax}, \quad u_t(x, 0) = (\mu C_1 + C_2) e^{ax} = A_2 e^{ax}.$$

Отсюда сразу получаем, что

$$C_1 = A_1, \quad C_2 = A_2 - A_1 \mu.$$

Подставляя найденные значения в (2.12), получаем точное решение

$$u(x, t) = (A_1 + (A_2 - A_1 \mu(a))t) e^{\mu(a)t + ax}.$$

Уравнение (2.11) имеет ровно 6 комплексных корней с учетом их кратностей. Пусть все корни различны. Тогда, если начальные условия представляют собой сумму экспонент

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^6 A_{1n} e^{a_n x}, \quad u_t|_{t=0} = \sum_{n=1}^6 A_{2n} e^{a_n x},$$

где a_n — корни уравнения (2.11), то аналогично (2.9) получаем

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^6 (A_{1n} + (A_{2n} - A_{1n}\mu(a_n))t) e^{\mu(a_n)t + a_n x}.$$

Рассмотрим далее неоднородное уравнение (2.10) с тривиальными начальными условиями. Будем считать, что ρ — корень уравнения (2.8). Применим метод вариации постоянных. Пусть

$$T(t) = (C_1(t) + C_2(t)t)e^{\mu t},$$

где

$$C_1(t) = - \int_0^t \tau F(\tau) d\tau, \quad C_2(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau.$$

Искомая функция определяется формулой

$$u(x, t) = e^{\mu(\rho)t + \rho x} \int_0^t (t - \tau) F(\tau) d\tau.$$

Теперь, если правая часть уравнения (2.10) имеет вид $\sum_{n=1}^6 F_n(t)e^{\rho_n x}$, где ρ_n — корни уравнения (2.11), то

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^6 e^{\mu(\rho_n)t + \rho_n x} \int_0^t (t - \tau) F_n(\tau) d\tau.$$

Пример 2.2. Рассмотрим набор функций $X_j(x) = \sin\left(\frac{\pi j}{l}x\right)$, где $j \in \mathbb{N}$. Легко проверяется, что они удовлетворяют краевым условиям (1.2). Пусть, далее, функции в начальном условии (1.3) разлагаются в сходящийся ряд Фурье, то есть

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{0j} X_j(x), \quad u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{1j} X_j(x), \quad (2.13)$$

где $u_{0j} = \frac{(u_0(x), X_j(x))}{\|X_j(x)\|^2}$, $u_{1j} = \frac{(u_1(x), X_j(x))}{\|X_j(x)\|^2}$. В силу формулы Эйлера из (2.13) получаем

$$u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_{0j}}{2i} e^{\frac{\pi j}{l}x} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_{0j}}{2i} e^{-\frac{\pi j}{l}x}, \quad u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_{1j}}{2i} e^{\frac{\pi j}{l}x} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_{1j}}{2i} e^{-\frac{\pi j}{l}x}.$$

Для функции такого вида можно предъявить решение уравнения (1.1) в виде ряда.

В случае неоднородного уравнения (см. (2.10)), если $F(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} F_j(t) X_j(x)$, то также правую часть можно представить в виде

$$F(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_j(t)}{2i} e^{\frac{\pi j}{l}x} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{F_j(t)}{2i} e^{-\frac{\pi j}{l}x},$$

для которой можно предъявить частное решение $u(x, t)$.

3. Заключение.

Описанный в работе метод построения решений начально-краевых задач может быть использован для построения решений в виде рядов Фурье линейных задач математической физики, которые содержат смешанные производные по временной и пространственным переменным. Также, в дальнейшем, с использованием найденного в работе решения можно исследовать задачу оптимального управления колебаниями, возникающими в вязкоупругом полотне.

References

- [1] T. Saksa, N. Banichuk, J. Jeronen, M. Kurki, T. Tuovinen, “Dynamic analysis for axially moving viscoelastic panels”, *International Journal of Solids and Structures*, **49**:23–24 (2012), 3355–3366.
- [2] T. Saksa, J. Jeronen, T. Tuovinen, “Stability of moving viscoelastic panels interacting with surrounding fluid. Rakenteiden Mekaniikka”, *Journal of Structural Mechanics*, **45**:3 (2012), 88–103.
- [3] T. Saksa, J. Jeronen, N. Banichuk, M. Kurki, “On travelling web stability including material viscoelasticity and surrounding air”, *Advances in Pulp and Paper Research*, 15th Fundamental Research Symposium, Cambridge, 2013, 449–468.
- [4] N. Banichuk, J. Jeronen, P. Neittaanmäki, T. Saksa, T. Tuovinen, *Mechanics of Moving Materials*. V. 207, Solid Mechanics and its Applications, Springer, Switzerland, 2014, 253 pp.
- [5] H. Ding, Y.-Q. Tang, L.-Q. Chen, “Frequencies of transverse vibration of an axially moving viscoelastic beam”, *Journal of Vibration and Control*, **23**:20 (2017), 3504–3514.
- [6] Y. Wang, X. Cao, T. Jing, J. Wu, “Dynamic characteristics and stability of axially moving viscoelastic plate with piezoelectric layer”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, **33**:3 (2014), 341–355.
- [7] Y. Wang, X. Cao, T. Jing, J. Wu, “Transverse vibrations of an axially accelerating viscoelastic string with geometric nonlinearity”, *Journal of Engineering Mathematics*, **48** (2004), 171–182.
- [8] L.-Q. Chen, “Nonlinear Vibrations of Axially Moving Beams”, *Nonlinear Dynamics*. V.7, ed. T. Evans, IntechOpen Limited, United Kingdom, 2010.
- [9] Б. Х. Эшматов, Х. Эшматов, Д. А. Ходжаев, “Нелинейный флаттер вязкоупругих прямоугольных пластин и цилиндрических панелей из композиционного материала с сосредоточенными массами”, *Прикладная механика и техническая физика*, **54**:4 (2013), 74–85. [B. Kh. Eshmatov, Kh. Eshmatov, D. A. Khodzhaev, “Nonlinear flutter of viscoelastic rectangular plate cylindrical panels from composite material with local masses”, *Applied Mechanics and Engineering Physics Sciences*, **54**:4 (2013), 74–85 (In Russian)].
- [10] Б. А. Худаяров, Н. Г. Бандурин, “Нелинейный флаттер вязкоупругих ортотропных цилиндрических панелей”, *Матем. моделирование*, **17**:10 (2005), 79–86. [B. A. Khudayarov, N. G. Bandurin, “Nonlinear flutter of viscoelastic orthotropic cylindrical panels”, *Mathematical Models*, **17**:10 (2005), 79–86 (In Russian)].
- [11] Р. А. Абдикаримов, Д. А. Ходжаев, “Компьютерное моделирование задач динамики вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций переменной толщины”, *Magazine of Civil Engineering*, **49**:5 (2014), 83–94. [Abdikarimov Rustamkhan Alimkhanovich, Khodzhaev Dadakhan Akmarkhanovich, “Computer modeling of tasks in dynamics of viscoelastic thin-walled elements in structures of variable thickness”, *Magazine of Civil Engineering*, **49**:5 (2014), 83–94 (In Russian)].
- [12] А. М. Романенков, “О решениях уравнения малых поперечных колебаний движущегося полотна”, *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*, **9**:2 (2022), 346–356; англ. пер.: А. М. Romanenkov, “On solutions of the equation of small transverse oscillations of a moving web”, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, **55** (2022), 235–242.

Информация об авторе

Романенков Александр Михайлович,
кандидат технических наук, доцент, доцент ка-
федры 916 Математика, Московский авиацион-
ный институт, г. Москва, Российская Федерация.
E-mail: romanaleks@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>

Поступила в редакцию 27.07.2023 г.
Поступила после рецензирования 14.02.2024 г.
Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the author

Alexandr M. Romanenkov , Candidate of
Technical Sciences, Associate Professor, Associate
Professor of the 916 Mathematics Department,
Moscow Aviation Institute, Moscow, Russian
Federation. E-mail: romanaleks@gmail.com
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0700-8465>

Received 27.07.2023
Reviewed 14.02.2024
Accepted for press 11.03.2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

© Ступин Д.Л., 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120>

УДК 517.53, 517.54, 519.615.7



Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций

Денис Леонидович СТУПИН

ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет»

170100, Российская Федерация, г. Тверь, ул. Желябова, 33

Аннотация. Задача получения точной оценки модуля тейлоровского коэффициента с номером n на классе B ограниченных не обращающихся в нуль функций сведена к задаче об оценке функционала над классом нормированных ограниченных функций, которая в свою очередь сведена к задаче о поиске условного максимума неотрицательной целевой функции $2n - 3$ действительных аргументов с ограничениями типа неравенств, что позволяет применять стандартные численные методы поиска условных экстремумов.

Получены аналитические выражения для первых шести целевых функций и показана их липшицевость. Исходя из липшицевости целевой функции с номером n обосновывается метод точной оценки модуля тейлоровского коэффициента с номером n на классе B . Обсуждается алгоритм поиска глобального условного максимума целевой функции. Первый шаг этого алгоритма состоит в поиске полным перебором с довольно-таки большим шагом. На втором шаге алгоритма используется метод поиска локального максимума с начальными точками, полученными на предыдущем шаге.

Результаты численных вычислений приведены в графическом виде и подтверждают гипотезу Кшижа при $n = 1, \dots, 6$. На основе этих расчетов, а также на основе так называемых асимптотических оценок выводится точная оценка модулей первых шести тейлоровских коэффициентов на классе B . Полученные результаты сравниваются с известными ранее оценками модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе B и его подклассах B_t , $t \geq 0$. Обсуждаются экстремали для подклассов B_t и гипотеза Кшижа уточняется для подклассов B_t . Дается краткий исторический обзор исследований по тематике оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе B .

Ключевые слова: гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные функции, подчиненные функции, проблема коэффициентов, условная липшицева оптимизация, поиск перебором

Для цитирования: Ступин Д.Л. Новый метод оценки модулей начальных тейлоровских коэффициентов на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 145. С. 98–120.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120>

SCIENTIFIC ARTICLE

© D. L. Stupin, 2024

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120>

A new method of estimation of moduli of initial Taylor coefficients on the class of bounded non-vanishing functions

Denis L. STUPIN

Tver State University

33 Zhelyabova St., Tver 170100, Russian Federation

Abstract. The task of obtaining the sharp estimate of the modulus of the n -th Taylor coefficient on the class B of bounded non-vanishing functions has been reduced to the problem of estimating a functional over the class of normalized bounded functions, which in turn has been reduced to the problem of finding the constrained maximum of a non-negative objective function of $2n - 3$ real arguments with constraints of the inequality type, that allows us to apply the standard numerical methods of finding constrained extrema.

Analytical expressions of the first six objective functions have been obtained and their Lipschitz continuity has been proved. Based on the Lipschitz continuity of the objective function with number n , a method for the sharp estimating of the modulus of the n -th Taylor coefficient on the class B is rigorously proven. An algorithm of finding the global constrained maximum of the objective function is being discussed. The first step of this algorithm involves a brute-force search with a relatively large step. The second step of the algorithm uses a method for finding a local maximum with the initial points obtained at the previous step.

The results of the numerical calculations are presented graphically and confirm the Krzyz conjecture for $n = 1, \dots, 6$. Based on these calculations, as well as on so-called asymptotic estimates, a sharp estimate of the moduli of the first six Taylor coefficients on the class B is derived. The obtained results are compared with previously known estimates of the moduli of initial Taylor coefficients on the class B and its subclasses B_t , $t \geq 0$. The extremals for B_t subclasses are discussed and the Krzyz hypothesis is updated for B_t subclasses. A brief historical overview of research of the estimations of moduli of initial Taylor coefficients on the class B is provided.

Keywords: Krzyz's conjecture, Krzyz's problem, bounded functions, subordinate functions, coefficient problem, constrained Lipschitz optimization, brute-force search

Mathematics Subject Classification: 30C50, 65E99.

For citation: Stupin D.L. A new method of estimation of moduli of initial Taylor coefficients on the class of bounded non-vanishing functions. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika* = *Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:145 (2024), 98–120.

<https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-145-98-120> (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Классом B будем называть множество, состоящее из голоморфных в открытом единичном круге Δ функций f , таких, что $0 < |f(z)| \leq 1$, $z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж предположил [1, 2], что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \quad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi} F(e^{i\varphi} z^n, 1)$, где

$$F(z, t) := e^{-t \frac{1-z}{1+z}} = e^{-t} + 2te^{-t}z + 2t(t-1)e^{-t}z^2 + \dots, \quad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Это предположение мы будем называть гипотезой Кшижа, а задачу о точной оценке $|\{f\}_n|$, $n \in \mathbb{N}$, на классе B — проблемой Кшижа.

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков. В настоящее время она доказана до пятого тейлоровского коэффициента включительно [3]. Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное в себе семейство функций (в топологии локально равномерной сходимости).

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t . Как известно из теории подчиненных функций [4], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \quad \omega \in \Omega_0, \quad (0.1)$$

где Ω_0 — класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω , таких, что

$$|\omega(z)| < 1, \quad \omega(0) = 0, \quad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t > 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t .

Класс, состоящий из функций $\omega \in \Omega_0$ с действительными коэффициентами, обозначим через Ω_0^r , а класс, состоящий из функций $f \in B_t$ с действительными коэффициентами, обозначим через B_t^r . При каждом $t \geq 0$ формула (0.1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0^r и B_t^r .

Заметим также, что класс B_0 состоит только из одной функции $f \equiv 1$, поэтому B_0 можно считать полностью изученным. В дальнейшем мы будем для полноты указывать, что $t \geq 0$, однако фактически можно всюду далее считать, что $t > 0$. Эта оговорка позволяет нам, например, свободно делить на t .

Проблема Кшижа имеет непосредственную связь с полиномами Лагерра, Фабера, а также с проблемой коэффициентов на классах ограниченных функций, которая в свою очередь тесно связана с теорией подчиненных функций [4] и с теорией пространств Харди. Проблема Кшижа для коэффициента с номером n есть задача на экстремум функционала, которую можно свести к задаче об экстремуме действительнзначной функции $2n - 3$ действительных переменных [5]. Задачи на экстремум широко распространены в науке и технике и имеют разнообразные приложения.

Многие задачи геометрической теории функций комплексной переменной сводятся к изучению свойств функции через ее тейлоровские коэффициенты. Класс B посредством класса Ω_0 связан с классами однолистных функций, в частности, с классами выпуклых и звездных функций. Соответственно, и проблема коэффициентов для B связана с проблемой коэффициентов для упомянутых классов. Также имеются параллели между гипотезой Кшижа и теоремой Де Бранжа (ранее гипотезой Бибераха).

1. Постановка задачи

Во введении мы упоминали, что гипотеза Кшижа доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно. Краткий исторический обзор по начальным коэффициентам имеется в конце этой работы. Заметим также, что оценки на B_t , точные для всех $t \geq 0$, получены только до третьего тейлоровского коэффициента включительно (первый и второй коэффициенты см. [6], третий коэффициент см. [7]). Оценки модулей четвертого [8–10] и пятого [3] коэффициентов не являются точными при каждом $t \geq 0$. Гипотеза Кшижа для шестого коэффициента не доказана, хотя оценки 6-го коэффициента имеются в [11, с. 19] и в [12].

Судя по всему, если некоторый метод дает оценки $\Psi_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, точные не при всех $t \geq 0$, то найдутся n и $t_0 \in (t_1(n), t_2(n))$ такие, что $\Psi_n(t_0) > 2/e$, $t_2(n) > t_1(n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Таковым, например, является метод Брауна [8] при $k \geq 5$ и метод Шапеля [10] при $k \geq 6$ (см. [12]).

Даже при $n = 3$ оценки на B_t , точные при каждом $t \geq 0$ аналитическими методами получить достаточно сложно [7]. Так как уже при $n = 3$ в оценках [7] фигурируют полиномы степени 4, то в силу теоремы Абеля–Руффини о неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах, при $n > 4$ оценки по всей видимости уже не будут выражаться в радикалах. С другой стороны, если ограничиться подклассом функций с действительными коэффициентами, то задача сильно упрощается, при этом получаемые оценки не сильно отличаются от оценок, имеющих место в общем случае [13].

Задача данной работы состоит в том, чтобы предложить и обосновать метод «точной» оценки модуля тейлоровского коэффициента с любым номером n на классе B_t , $t \geq 0$. На некоторых интервалах изменения параметра t мы будем использовать численные методы, поэтому оценки будут получаться с некоторой погрешностью, вносимой в расчеты с одной стороны машинной арифметикой, а с другой стороны — самим численным методом.

Численные методы мы будем использовать исключительно на конечном интервале $(t_1(n), t_2(n))$, $t_2(n) > t_1(n) > 0$, изменения параметра t , так как при $t \in [0, t_1(n)]$ и $t \geq t_2(n)$ у нас есть точная оценка, полученная аналитическим методом. Заметим, что несмотря на использование приближенных вычислений, при $n \leq 6$ можно получить оценку, точную на классе B . Подробнее об этом рассказывается в следующих пунктах.

2. Метод подчинения

Остановимся подробнее на представлениях вида (0.1). Пусть функции $G(z)$ и $g(z)$ голоморфны в Δ . Функция $g(z)$ называется подчиненной в Δ для функции $G(z)$, если она может быть представлена в Δ в форме $g(z) = G(\omega(z))$, где $\omega \in \Omega_0$. Функцию $G(z)$ будем называть мажорантой для $g(z)$ в Δ .

Понятие подчинения восходит к Е. Линделефу [14], термин был введен Д. И. Литлвудом [15] и В. Рогозинским [4], они же разработали метод и получили с его помощью некоторые результаты. Принцип подчинения Литлвуда и Рогозинского часто используется при выводе оценок коэффициентов в классе B (см. [6, 10, 16–18]).

В случае проблемы Кжижа, трудность применения этого метода заключается в сложности коэффициентов $\{F\}_k(t)$ функции $F(z, t)$.

Отметим, что теория подчинения позволяет очень легко находить точные оценки первого и второго коэффициентов на классе функций $g(z)$, подчиненных функции $G(z)$. Известно [4], что

$$\{g\}_0 = \{G\}_0, \quad |\{g\}_1| \leq |\{G\}_1|, \quad |\{g\}_2| \leq \max(|\{G\}_1|, |\{G\}_2|);$$

все оценки точные, и равенство достигается только на вращениях функции G в плоскости переменной z .

3. Асимптотические оценки коэффициентов

Пользуясь упомянутой в пункте 2. теорией подчинения [4] и критерием Каратеодори–Теплица [19], Р. Перец сформулировал [16] две теоремы, содержащие асимптотические оценки $|\{f\}_n|$ при достаточно больших или достаточно малых положительных t .

Теорема 3.1 (Peretz). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_1(n) > 0$ такое, что для любой функции $f \in B_t$ при $0 \leq t \leq t_1(n)$ справедливы точные оценки

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Теорема 3.2 (Peretz). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Существует число $t_2(n) \geq 0$ такое, что для $f \in B_t$ при $t \geq t_2(n)$ справедливы точные оценки

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_n(t)|.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z, t)$, $|\eta| = 1$.

Заметим, что числа $t_1(n)$ и $t_2(n)$ упоминались выше в пункте 1.

Для случая малых t явный результат получен автором данной работы в [17]:

Теорема 3.3. Для любого $t > 0$ и каждой $f \in B_t$ справедливы точные оценки

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1(t)|, \quad n \in \{1, \dots, [2/t] + 1\}.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Этот результат также получен с использованием метода подчинения и неравенств Каратеодори–Теплица.

Из теоремы 3.3 следует, что чем меньшее число $t > 0$ мы зафиксируем, тем большее количество тейлоровских коэффициентов сможем оценить на классе B_t .

Этот результат интересен при $t \leq 2$. Например, при $t > 2$ мы можем оценить только один коэффициент, при $t \leq 2$ — два коэффициента, при $t \leq 1$ — три коэффициента, а при $t \leq 1/2$ — пять, и так далее.

Необходимо отметить, что указанные в теореме 3.3 границы для t не наилучшие. Автор пользовался тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z, t)$ можно продолжить до выпуклой однолистной функции. В этом случае получилась простая закономерность, связывающая n и t .

Заметим, что из теоремы 3.3 сразу следует теорема 3.1. Однако Р. Перец доказал свою теорему намного раньше. Он пользовался тем, что при каждом $t > 0$ некоторый отрезок тейлоровского разложения функции $F(z, t)$ можно продолжить до функции класса Каратеодори. Используя этот подход при $t = 2$, мы по-прежнему сможем оценить только два коэффициента на классе B_t , зато при $t = 1$ этот метод позволяет оценить уже целых шесть коэффициентов.

Д. В. Прохоров и С. В. Романова методами оптимального управления получили аналогичные результаты [20, 21]. В частности, в статье [21] получены точные оценки для малых t , гарантирующие локальный максимум модуля n -го коэффициента.

4. Границы применимости асимптотических оценок

В формулировках Перца не упоминаются границы для n и t , однако эти границы можно вычислить используя критерий Каратеодори–Теплица [19].

Переформулируем теорему 3.1

Теорема 4.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B_t$, тогда $|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1(t)|$, $t \in [0, t_1]$, где $t_1(n)$ — наименьший положительный корень уравнения $M_n^1 = 0$, а

$$M_n^1 := \begin{vmatrix} \{F\}_1 & \{F\}_2 & \cdots & \{F\}_{n-1} & \{F\}_n \\ \{F\}_2 & \{F\}_1 & \cdots & \{F\}_{n-2} & \{F\}_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \{F\}_n & \{F\}_{n-1} & \cdots & \{F\}_2 & \{F\}_1 \end{vmatrix}.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z^n, t)$, $|\eta| = 1$.

Переформулируем теорему 3.2.

Теорема 4.2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in B_t$, тогда $|\{f\}_n| \leq |\{F\}_n(t)|$, $t \geq t_2(n)$, где $t_2(n)$ — наибольший положительный корень уравнения $M_n^2 = 0$, а

$$M_n^2 := \begin{vmatrix} \{F\}_n & \{F\}_{n-1} & \cdots & \{F\}_2 & \{F\}_1 \\ \{F\}_{n-1} & \{F\}_n & \cdots & \{F\}_3 & \{F\}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \{F\}_1 & \{F\}_2 & \cdots & \{F\}_{n-1} & \{F\}_n \end{vmatrix}.$$

Равенство достигается если и только если $f(z) = F(\eta z, t)$, $|\eta| = 1$.

Воспользовавшись этими формулировками, имеем для $n \leq 7$:

$$\begin{aligned} t_1(1) &= +\infty, & t_2(1) &= 0, \\ t_1(2) &= 2, & t_2(2) &= 2, \\ t_1(3) &= 3/2, & t_2(3) &= 2 + 2^{1/3} + 2^{-1/3} \approx 4.05, \\ t_1(4) &= 3 - 3^{1/2} \approx 1.27, & t_2(4) &= 6, \\ t_1(5) &= 1.129457\dots, & t_2(5) &= 7.899361\dots, \\ t_1(6) &= 1.037289\dots, & t_2(6) &= 9.785796\dots, \\ t_1(7) &= 0.972469\dots, & t_2(7) &= 11.67275\dots \end{aligned}$$

Таким образом, мы видим, что для $n = 1$ и $n = 2$ поставленная задача решена полностью. Однако, задача точной оценки при $n \geq 3$ решена только частично. С другой стороны, при каждом $n \geq 3$ интервал, в котором задача не решена, конечен.

Заметим, что границы, указанные в теоремах 4.1 и 4.2, так же, как и в теореме 3.3, не наилучшие. В частности, в пункте 9.1. будет показано, что $t_1^*(3) \approx 1.65$, а $t_2^*(3) \approx 3.82$ — наилучшие значения для $n = 3$. К этому мы еще вернемся далее в пункте 10.

В завершении этого пункта отметим, что теорему 3.2 можно получить с привлечением выпуклых однолистных функций (см. [18]). В этом случае вычисления дают следующие значения для $t_2(n)$:

$$t_2(1) = 0, \quad t_2(2) = 2, \quad t_2(3) \approx 4.58, \quad t_2(4) \approx 6.88, \quad t_2(5) \approx 9.01, \quad t_2(6) \approx 11.04, \quad t_2(7) \approx 13.02.$$

5. Анализ задачи

Рассмотрим числа $t_1(1), \dots, t_1(7)$, введенные в предыдущем пункте, и заметим, что $1 < t_1(6) < \dots < t_1(1)$, но $t_1(7) < 1$. Если гипотеза Кшижа верна при $n \leq 6$, то, поскольку $t_1(n) > 1$ для $n \leq 6$, существует $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ такое, что

$$\max_{f \in B_t} |\{f\}_n| < 2/e - \varepsilon, \quad t \in (t_1(n), t_2(n)), \quad n \leq 6.$$

То есть при $n \leq 6$ и $t \in (t_1(n), t_2(n))$ мы можем, имея даже не точную оценку $|\{f\}_n|$ на B_t , получить точную оценку $|\{f\}_n|$ на B . При $n \geq 7$ рассуждения, основанные на результатах предыдущего пункта, уже не позволяют нам получить оценки, точные на B .

Ради определенности пусть $n = 6$. Как показано в статье [5], задачу об оценке функционала $|\{f\}_6|$ на классах B_t , $t \geq 0$, можно свести к исследованию на условный глобальный максимум действительнзначной функции $|h_6(x_1, z_2, z_3, z_4, z_5, t)|$ (выражение для h_6 см. в конце этого пункта) при ограничениях $x_1 \in [0, 1]$, $z_2, \dots, z_5 \in \bar{\Delta}$. Стало быть, если функция $|h_6|$ липшицева по переменным x_1, z_2, z_3, z_4, z_5 , то гипотезу Кшижа (при $n = 6$) можно доказать или опровергнуть, просто вычислив значения $|h_6|$ в узлах конечной эпсилон-сети, разбивающей множество $[0, 1] \times \bar{\Delta}^4$, при том условии, что расстояние между соседними узлами этой сети не превышает некоторой величины, вычисленной исходя из константы Липшица для h_6 (см. пункт 6.).

Фиксируем номер $n > 2$. В работе [5] задача оценки функционала $|\{f\}_n|$ на классах B_t , $t \geq 0$, была сведена к исследованию на условный глобальный максимум действительнзначной функции $|h_n(x_1, z_2, \dots, z_{n-1}, t)|$, при ограничениях $x_1 \in [0, 1]$, $z_k \in \bar{\Delta}$, $k \in 2, \dots, n-1$. Напомним, что в обозначениях статьи [5] $x_k := |z_k|$, $k \in 1, \dots, n-1$.

Пусть $r_1 := 1$, $r_k := \prod_{j=1}^{k-1} (1 - x_j^2)$, $k = 2, 3, \dots$

Выпишем h_n при $n = 3$. Имеем $h_3 = \{F\}_1 g_3^1 + \{F\}_2 g_3^2 + \{F\}_3 g_3^3$, где

$$g_3^1 := r_3 - r_2 x_1 z_2^2, \quad g_3^2 := 2r_2 x_1 z_2, \quad g_3^3 := x_1^3.$$

Выпишем h_n при $n = 4$. Имеем $h_4 = \{F\}_1 g_4^1 + \{F\}_2 g_4^2 + \{F\}_3 g_4^3 + \{F\}_4 g_4^4$, где

$$\begin{aligned} g_4^1 &:= r_4 - r_3(2x_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3) z_3 + r_2 x_1^2 z_2^3, \\ g_4^2 &:= 2r_3 x_1 z_3 + r_2(1 - 3x_1^2) z_2^2, \\ g_4^3 &:= 3r_2 x_1^2 z_2, \\ g_4^4 &:= x_1^4. \end{aligned}$$

При $n = 5$ имеем $h_5 = \{F\}_1 g_5^1 + \{F\}_2 g_5^2 + \{F\}_3 g_5^3 + \{F\}_4 g_5^4 + \{F\}_5 g_5^5$, где

$$\begin{aligned} g_5^1 &:= r_5 - r_4(\bar{z}_3 z_4 + 2(x_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3))z_4 + \\ &\quad + r_3(\bar{z}_2^2 z_3^2 - x_1(1 - 3|z_2|^2)z_3 + 3x_1^2 z_2^2)z_3 - r_2 x_1^3 z_2^4, \\ g_5^2 &:= 2(r_4 x_1 z_4 + r_3((1 - 3x_1^2)z_2 - x_1 \bar{z}_2 z_3)z_3 - r_2 x_1(1 - 2x_1^2)z_2^3), \\ g_5^3 &:= 3(r_2 x_1(1 - 2x_1^2)z_2^2 + r_3 x_1^2 z_3), \\ g_5^4 &:= 4r_2 x_1^3 z_2, \\ g_5^5 &:= x_1^5. \end{aligned}$$

Наконец $h_6 = \{F\}_1 g_6^1 + \{F\}_2 g_6^2 + \{F\}_3 g_6^3 + \{F\}_4 g_6^4 + \{F\}_5 g_6^5 + \{F\}_6 g_6^6$, где

$$\begin{aligned} g_6^1 &:= r_6 - r_5(2(x_1 z_2 + \bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_4) + \bar{z}_4 z_5)z_5 + r_4(3(x_1^2 z_2^2 + \bar{z}_2^2 z_3^2) + \bar{z}_3^2 z_4^2 \\ &\quad + (2x_1 z_2 \bar{z}_3 - \bar{z}_2(1 - 3|z_3|^2))z_4 - 2x_1(1 - 3|z_2|^2)z_3)z_4 \\ &\quad + r_3((3x_1^2(1 - 2|z_2|^2)z_2 - \bar{z}_2^3 z_3^2)z_3 + 2x_1(1 - 2|z_2|^2)\bar{z}_2 z_3^2 - 4x_1^3 z_2^3)z_3 + r_2 x_1^4 z_2^5, \\ g_6^2 &:= 2r_5 x_1 z_5 + 2r_4((1 - 3x_1^2)z_2 - x_1(2\bar{z}_2 z_3 + \bar{z}_3 z_4))z_4 + r_3^2 z_3^2 \\ &\quad + 2r_3(x_1(\bar{z}_2^2 z_3^2 - x_1(1 - 3|z_2|^2)z_3) - 3x_1(1 - 2x_1^2)z_2^2 - r_2|z_2|^2 z_3)z_3 + r_2 x_1^2(3 - 5x_1^2)z_2^4, \\ g_6^3 &:= 3(r_4 x_1^2 z_4 - r_3 x_1(x_1 \bar{z}_2 z_3 - 2(1 - 2x_1^2)z_2)z_3) + r_2(r_2^2 - 3x_1^2(2 - 3x_1^2))z_2^3, \\ g_6^4 &:= 4r_3 x_1^3 z_3 + 2r_2 x_1^2(3 - 5x_1^2)z_2^2, \\ g_6^5 &:= 5r_2 x_1^4 z_2, \\ g_6^6 &:= x_1^6. \end{aligned}$$

Итак, учитывая сказанное в пункте 4., приходим к выводу, что рассматриваемая задача сводится к исследованию на глобальный условный максимум целевых функций $|h_n|$ при каждом значении параметра t , $t \in (t_1(n), t_2(n))$, $n = 3, 4, 5, 6$, и ограничениях $x_1 \in [0, 1]$, $z_k \in \bar{\Delta}$, $k = 2, \dots, n - 1$.

6. Липшицевость целевой функции

Функция f называется липшицевой на множестве X , если найдется такое число $L > 0$ (константа Липшица), что $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ при любых $x, y \in X$. Дилатацией (растяжением) будем называть наилучшую, то есть наименьшую константу Липшица на рассматриваемом компакте.

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. В предыдущем пункте задача об оценке целевого функционала была сведена к задаче о поиске условного глобального максимума действительнзначной функции $2n - 3$ действительных аргументов $|h_n|$.

Лемма о липшицевости [22, с. 22–24] гласит, что непрерывно дифференцируемая функция на компактном подмножестве евклидова пространства удовлетворяет условию Липшица.

Обозначим область определения целевой функции $|h_n|$ через

$$\Delta_n := [0, 1] \times \bar{\Delta}^{n-2}.$$

Для доказательства липшицевости функции h_n мы можем рассматривать ее как многочлен от переменных $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{n-2}$. Многочлен, как известно, есть липшицева функция на компакте Δ_n по каждой из своих переменных.

Доказать липшицевость функции h_n мы также можем, рассмотрев ее реальную и мнимую части. Действительно, принимая во внимание то, что $z_k = x_k e^{i\varphi_k}$, $k = 1, \dots, n-1$, видим, что $\operatorname{Re} h_n$ и $\operatorname{Im} h_n$ есть липшицевы функции по каждой переменной, так как $\operatorname{Re} h_n$ и $\operatorname{Im} h_n$ — бесконечно гладкие по всем переменным. Из липшицевости $\operatorname{Re} h_n$ и $\operatorname{Im} h_n$ следует липшицевость h_n .

Если h_n — липшицева, то очевидно, что и $|h_n|$ — липшицева.

Мы можем разбить Δ_n некоторым достаточно равномерным образом и вычислить значения $|h_n|$ во всех узлах получившейся конечной эпсилон-сети. Обозначим наибольшее из вычисленных значений через v_n . Так как $|h_n|$ — липшицева, то мы можем оценить разность $\varepsilon_n := \max_{\Delta_n} |h_n| - v_n$ через произведение дилатации и шага сети (под шагом сети мы подразумеваем супремум расстояний между соседними узлами сети). Это и будет основная погрешность наших вычислений. Отметим, что погрешностью, вносимой в расчеты машинной арифметикой, можно пренебречь, так как она очень мала по сравнению с ε_n .

Пусть L_n — максимальная из дилатаций по каждой из переменных $x_1, z_2, \dots, z_{n-1}$. То есть если δ_n — максимальное расстояние между узлами сети, то погрешность ε_n не будет превосходить $L_n \delta_n$.

Заметим, что термин «эпсилон-сеть» относится к устоявшейся терминологии. Тем не менее, здесь для обозначения шага сети используется символ δ , а символ ε используется для обозначения погрешности вычислений. Поэтому мы вместо ε -сеть пишем эпсилон-сеть, или просто сеть.

7. Об оценке константы дилатации

Итак, проведенный в пункте 6. анализ показывает, что для решения задачи максимизации целевой функции $|h_n|$ целесообразно использовать методы теории многомерной глобальной липшицевой оптимизации.

Выбор константы Липшица существенно влияет на скорость работы алгоритма глобального поиска. Поэтому необходимо иметь достаточно хорошую верхнюю оценку L_n дилатации. Действительно, если взять L_n меньше дилатации, то алгоритм может сойтись к локальному, а не глобальному максимуму, если же взять слишком большое значение для L_n , то алгоритм будет сходиться очень медленно.

С другой стороны, мы занимаемся поиском глобального максимума, а вблизи экстремальных точек, как известно, производная становится близкой к нулю. То есть в окрестностях точек максимумов дилатация близка к нулю. Таким образом, даже если взять приращение аргумента несколько меньше рассчитанного исходя из глобальной дилатации, то вероятность нахождения стационарной точки остается высокой.

Поиск дилатации для целевой функции h_n на некотором компакте X в свою очередь также является глобальной оптимизационной задачей. В общем случае, эта задача по сложности сопоставима с задачей поиска глобального максимума целевой функции h_n на X . Например для нахождения дилатации h_6 по переменной x_1 достаточно найти $\max_{\Delta_6} |(h_6)'_{x_1}|$. Для работы нашего алгоритма требуется найти также дилатации по остальным переменным.

Грубую оценку дилатации можно получить так: находим производную по интересующей нас переменной и применяем неравенство треугольника. К сожалению, полученная таким образом константа Липшица, скорее всего, будет в несколько раз больше дилатации.

8. О численном методе

Для определенности будем рассматривать алгоритм поиска глобального максимума на примере $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$. В этой работе используется метод полного перебора. Здесь мы считаем, что $x_1 \in [0, 1]$, $z_k = u_k + iv_k$, $u_k^2 + v_k^2 \leq 1$, $k = 2, \dots, 5$.

Обсудим конечную эпсилон-сеть, охватывающую множество Δ_6 , в узлах которой мы будем вычислять значения функции $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$.

Отрезок $[0, 1]$ изменения переменной x_1 мы разобьем на равные части так, чтобы расстояние между соседними точками было не более δ .

8.1. Разбиение единичного круга

Замкнутый единичный круг, пробегаемый переменной z_2 , мы разобьем следующим образом. Разбиение начинается с точки в начале координат, которую следует рассматривать как отдельный шаг алгоритма разбиения. Далее круг разбивается на воображаемые концентрические окружности, величины радиусов которых делят отрезок $[0, 1]$ на равные части. На окружности с наименьшим положительным радиусом поместим 4 точки, разбивающие окружность на равные части, первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. На окружности со вторым по величине радиусом поместим 8 точек, разбивающие окружность на равные части, первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. На окружности с третьим по величине радиусом поместим 12 точек, разбивающие окружность на равные части, первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. И так далее, пока не дойдем до единичной окружности.

Итак, количества точек на концентрических окружностях образуют арифметическую прогрессию $4, 8, 12, \dots, 4n$, где n — общее количество окружностей. То есть количество точек N в таком разбиении будет $2n(n+1) + 1$ с учетом дополнительной точки в начале координат.

Например, если $n = 10$, то $N = 221$, если $n = 100$, то $N = 20201$, если $n = 1000$, то $N = 2002001$ и так далее.

Круги для переменных z_3, z_4, z_5 разбиваются аналогично, с небольшой оговоркой. Дело в том, что x_1 входит в $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$ чаще всех остальных переменных и с самой большой степенью, z_2 входит в $|h_6|$ чаще переменных z_3, z_4, z_5 и с самой большой степенью и так далее, переменная z_5 входит в $|h_6|$ всего дважды с максимальной степенью 2. Этим обусловлено то, что дилатация убывает от x_1 к z_5 . То есть количество точек в разбиениях тоже может убывать от x_1 к z_5 без потери точности вычислений.

На рисунке 1 показаны радиальные разбиения единичного круга, точки разбиения лежат на 10 концентрических окружностях плюс одна точка в начале координат.



Рис. 1. Четырехсекторное и шестисекторное разбиения единичного круга

Заметим, что у приведенных разбиений единичного круга есть точки, лежащие на оси абсцисс, причем располагаются они там достаточно плотно. Дело в том, что случай функций с действительными коэффициентами является весьма важным частным случаем. Если $f \in B_t^r$, то

$$h_6 = h_6(x_1, x_2, \dots, x_5, t), \quad x_1 \in [0, 1], \quad x_2, \dots, x_5 \in [-1, 1],$$

и мы просто разбиваем эти отрезки на равные части.

Сеть называется однородной, если все ее внутренние узлы имеют одинаковое число соседних узлов. Будем называть сеть подавляюще однородной, если все ее внутренние вершины, кроме центральной, имеют одинаковое количество соседних вершин.

Построенная здесь сеть называется сетью на основе 4 секторов и обладает хорошим качеством [23], а также подавляющей однородностью. Каждая внутренняя вершина имеет 6 соседних вершин, кроме вершины в начале координат, которая имеет только 4 соседних. Граничные вершины, лежащие на осях координат, имеют по 3 соседних вершины, остальные вершины имеют по 4 соседних.

Отметим, что сеть на основе 6 секторов обладает полной однородностью. Для ее построения на окружности с самым маленьким радиусом нужно разместить не 4, а 6 точек, разбивающих окружность на равные части, причем первая из этих точек должна лежать на положительном луче оси абсцисс. Следующую окружность разобьем 12 точками на равные части, так чтобы одна из точек лежала на положительном луче оси абсцисс. Следующую окружность разобьем 18 точками на равные части, так чтобы одна из точек лежала на положительном луче оси абсцисс. И так далее, пока не дойдем до единичной окружности.

Заметим для полноты изложения, что, имея сеть, мы можем построить триангуляцию круга, соединяя ближайшие друг к другу точки отрезками прямой. Начинать процесс триангуляции можно из любой точки сети.

8.2. Алгоритм поиска условного глобального максимума

Промежуток изменения параметра t разбиваем равномерно. После этого вычисляем и сохраняем в памяти компьютера числа

$$\{F\}_1(t_k), \dots, \{F\}_6(t_k), \quad k = 1, \dots, m,$$

где m — количество точек в разбиении по t .

Заметим, что $\{F\}_1, \dots, \{F\}_6$ не зависят от $x_1, z_2, \dots, z_5$, а g_6^j , $j = 1, \dots, 6$, не зависят от параметра t .

Точки сети, разбивающей Δ_6 , обозначим через D_6 .

Перебираем точки D_6 . В каждой точке D_6 вычисляем один раз значения функций g_6^j , $j = 1, \dots, 6$. Затем вычисляем $|h_6(x_1, z_2, \dots, z_5, t)|$ по формуле

$$|h_6| = \{F\}_1 g_6^1 + \{F\}_2 g_6^2 + \{F\}_3 g_6^3 + \{F\}_4 g_6^4 + \{F\}_5 g_6^5 + \{F\}_6 g_6^6$$

для всех значений t_k , $k = 1, \dots, m$. Полученный набор значений сравниваем с набором, вычисленным в предыдущей точке D_6 , если предыдущая точка имеется. Таким образом, мы в итоге вычисляем приближение к максимуму и к точке максимума для каждого значения параметра t .

Только что был описан метод полного перебора. Для получения приемлемых результатов этот метод требует больших вычислительных ресурсов и времени. Дело в том, что сеть, дающая приемлемый результат, должна содержать очень много точек. Несколько забегаая вперед, сообщим, что при определенных условиях нас бы устроило $\delta = 0.007$. Здесь рассмотрим более легкий в вычислительном плане случай. Расстояния между концентрическими окружностями возьмем 0.01. Это значит, что $\delta \approx 0.02$. В этом случае D_6 будет состоять из

$$101 \cdot 20201^5 = 339770537321572210601101$$

точек сети или вычислений значений функции $|h_6|$, а вычисление h_6 есть очень затратная операция. На процессорах современных персональных компьютеров эти вычисления займут годы. Как вариант, можно использовать суперкомпьютер или, как минимум, вычисления на графических ускорителях.

Заметим, что в этом примере мы взяли равномерное разбиение по всем переменным. Если уменьшать количество точек в разбиениях $x_1, z_2, \dots, z_5$ по мере роста номера переменной, то вычислений будет необходимо значительно меньше.

С другой стороны, взяв менее подробную сеть, но проводя в каждой ее точке локальный поиск, задавая эту точку как отправную для локального поиска и сравнивая результат локального поиска с текущим максимальным значением, можно получить очень хорошие результаты, так как вероятность попадания во все области притяжения экстремальных точек достаточно большая.

В любом случае, вычисления всегда заканчиваются локальным поиском при каждом значении параметра t , начальными точками для которого служат точки, найденные перебором. Здесь используется метод М. Дж. Д. Пауэлла [24], также известный как метод сопряженных направлений. Метод не требует вычисления производных, что хорошо, так как в нашем случае целевая функция содержит модуль.

Заметим, что этот метод не относится к методам условной оптимизации, поэтому применяются специальные ухищрения. В частности, редукция размерности точки с целью превращения граничной точки Δ_6 во внутреннюю точку Δ_k , $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, а также обработка события выхода точки за границу (штрафы).

Расчеты производятся параллельно. Для распараллеливания вычислений пространство поиска Δ_6 разбивается на «кубики», и описанный алгоритм применяется к нескольким «кубикам» параллельно, после чего результаты расчетов обобщаются.

9. Результаты вычислений

Все вычисления, описанные в этой работе, проведены на компьютере автора. Результаты вычислений будут представлены в графическом виде. Ради полноты изложения приведем результаты для $n = 1$ и $n = 2$.

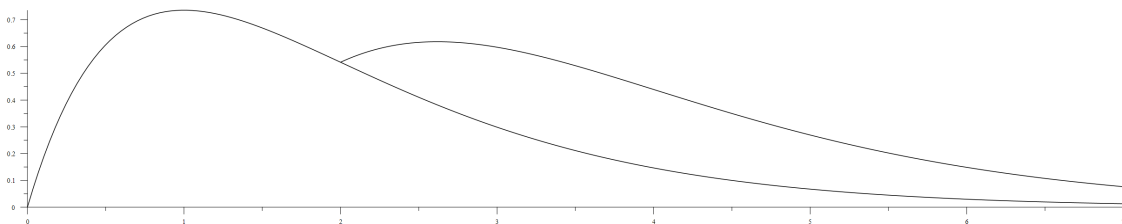


Рис. 2. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_1|$, $\max_{f \in B_t} |\{f\}_2|$ на промежутке $[0, 7]$

На рисунке 2 изображены 2 кривые $|\{F\}_1(t)|$ и $\max_t(|\{F\}_1(t)|, |\{F\}_2(t)|)$ на промежутке $[0, 7]$. Как известно [6]

$$|\{f\}_1| \leq |\{F\}_1(t)|, \quad |\{f\}_2| \leq \max(|\{F\}_1(t)|, |\{F\}_2(t)|), \quad f \in B_t, \quad t > 0.$$

Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_2|$ совпадают на промежутке $[0, 2]$.

9.1. Случай $n = 3$.

Имеет место следующий результат [7]

Теорема 9.1 (Прохоров, Шиналь). *Если $f \in B_t$, то справедлива следующая точная оценка*

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{(2t-1)^3}}{t}, & t \in [t_1, t_2], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{2t^2 - 6t + 3}{t} \sqrt{\frac{(t-2)^3}{t-3}}, & t \in [t_2, t_3], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2 + 6t - 6}}, & t \in [t_3, t_4], \\ \frac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3), & t \geq t_4, \end{cases} \quad (9.1)$$

где $t_1 = 1.65\dots$, $t_2 = 3.22\dots$, $t_3 = 3.47\dots$, $t_4 = 3.82\dots$.

Автор в статье [13] показал, что справедлива

Теорема 9.2. *Если $f \in B_t^r$, то справедлива следующая точная оценка*

$$|\{f\}_3| \leq 2te^{-t} \begin{cases} 1, & t \in [0, t_1], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\sqrt{(2t-1)^3}}{t}, & t \in [t_1, t_2], \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{(2t-3)^3}{-t^2 + 6t - 6}}, & t \in [t_2, t_3], \\ \frac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3), & t \geq t_3, \end{cases} \quad (9.2)$$

где $t_1 = 1.65\dots$, $t_2 = 3.30\dots$, $t_3 = 3.82\dots$.

Оценка (9.1) отличается от оценки (9.2) только на интервале $(3.20\dots, 4.48\dots)$.

На рисунке 3 изображены сразу две кривые. Отличие между ними показано крупным планом в масштабе 1:1 на рисунке 4.

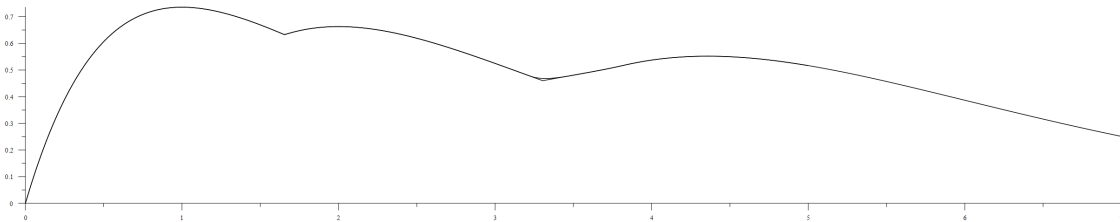


Рис. 3. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_3|$, $\max_{f \in B_t^r} |\{f\}_3|$ на промежутке $[0, 7]$

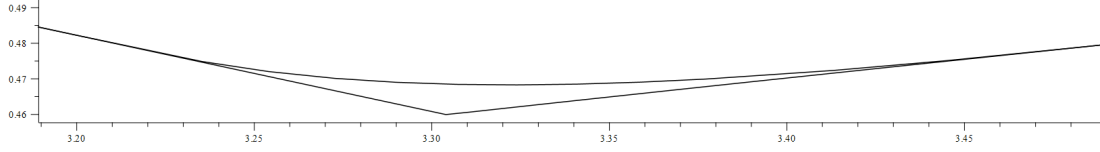


Рис. 4. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_3|$, $\max_{f \in B_t^*} |\{f\}_3|$ на промежутке $[3.2, 3.5]$

Переходим к численным вычислениям. На рисунке 5 показана кривая (верхний график), заданная формулой (9.1), и ее приближение (нижний график), найденное полным перебором на промежутке $[t_1(3), t_2(3)]$. Разбиение по t — 0.1, а по x_1 и по z_2 — 0.5. Мы видим, что результат вычислений местами далек от истины.

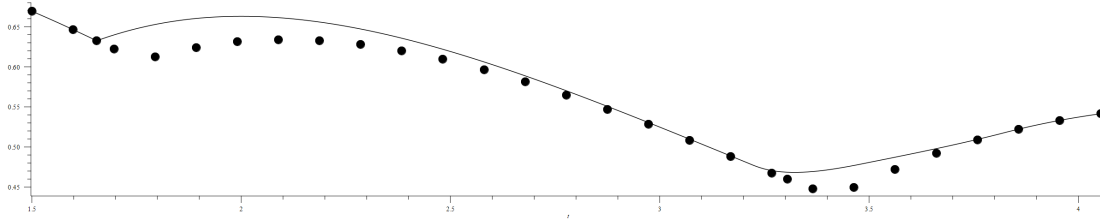


Рис. 5. Кривая $\max_{f \in B_t} |\{f\}_3|$ и ее грубое приближение на промежутке $[1.5, 4.053]$

На рисунке 6 показаны точки линии, аппроксимирующей кривую (9.1). Результат получен локальным поиском в каждой точке сети, упомянутой в предыдущем абзаце. Как видно из рисунка 6 все узловые точки полученной ломаной лежат на искомой кривой. Следовательно, для каждого t в сети нашлась точка, лежащая в области притяжения точки глобального максимума целевой функции.

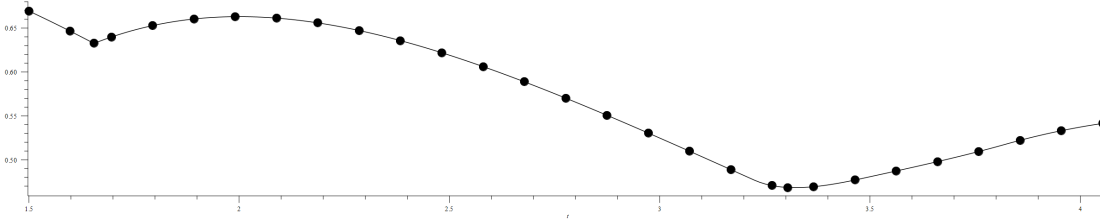


Рис. 6. Приближение к кривой $\max_{f \in B_t} |\{f\}_3|$ на промежутке $[1.5, 4.053]$

Итак, весьма скромными вычислениями (по t — 29 точек, по x_1 — 3 точки и по z_2 — 13 точек) получено очень хорошее приближение при $n = 3$.

В случае функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_3|$ совпадают на промежутке $[0, 1.654]$. Верхняя граница промежутка указана приблизительно.

9.2. Случай $n = 4$.

Для случая $n = 4$ точной оценки коэффициентов не найдено. Если взять разбиение 0.01 по t, x_1, z_2, z_3 , то мы получим очень хорошее приближение к кривой $\max_{f \in B_t} |\{f\}_4|$. В этом разбиении по t — 479 точек, по x_1 — 101 точка, а по z_2 и z_3 — 20201 точка.

Возьмем теперь сеть, полученную достаточно грубым разбиением по $t = 0.1$, а по $x_1, z_2, z_3 = 0.33$. В этом разбиении по $t = 53$ точки, по $x_1 = 5$ точек, а по z_2 и $z_3 = 41$ точка. Выполним локальный поиск в каждой точке получившейся сети. Все узловые точки полученной таким образом ломаной линии лежат на кривой, изображенной на рисунке 7. Следовательно, при каждом t на этой сети была найдена точка, лежащая в области притяжения точки глобального максимума целевой функции.

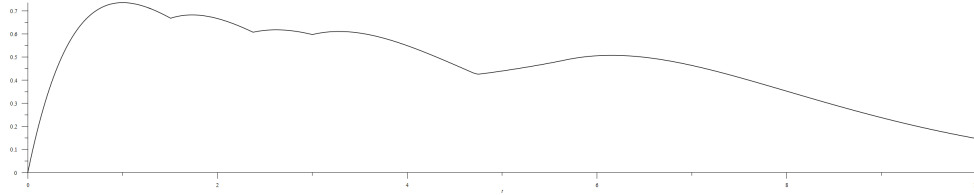


Рис. 7. Хорошее приближение к кривой $\max_{f \in B_t} |\{f\}_4|$ на промежутке $[0, 10]$

Как и в случае $n = 3$, весьма скромными вычислениями получено очень хорошее приближение при $n = 4$. В случае функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Отличие между кривыми в случае действительных и комплексных коэффициентов показано крупным планом в масштабе 1:1 на рисунке 8. Расчеты для функций с действительными коэффициентами проведены с разбиением 0.01 по t, x_1, x_2, x_3 . В этом разбиении по $t = 479$ точек, по $x_1 = 101$ точка, а по $x_2, x_3 = 201$ точка.

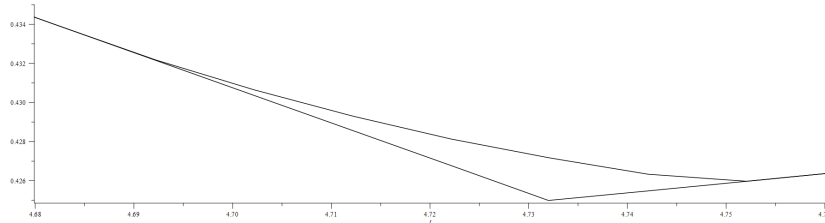


Рис. 8. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_4|$, $\max_{f \in B_t^c} |\{f\}_4|$ на промежутке $[4.68, 4.76]$

Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_4|$ совпадают на промежутке $[0, 1.506]$. Верхняя граница этого промежутка указана приблизительно.

На рисунке 9 показаны кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_2|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_4|$. Видно, что они совпадают на промежутках $[0, 1.5]$ и $[2.3752, 3]$. Границы промежутков указаны не точно.

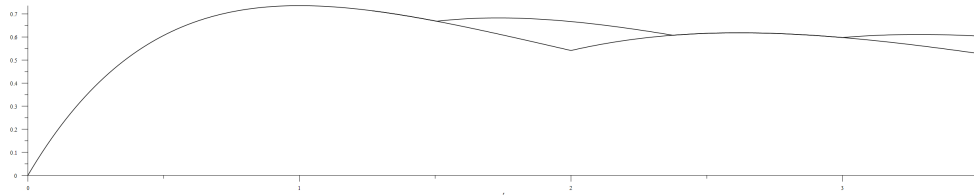


Рис. 9. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_2|$, $\max_{f \in B_t} |\{f\}_4|$ на промежутке $[0, 3.5]$

9.3. Случай $n = 5$.

Для случая $n = 5$ точной оценки коэффициентов не найдено. Если взять разбиение по $t = 0.01$, а по $x_1, z_2, z_3, z_4 = 0.033$, то мы получим очень хорошее приближение к кривой $\max_{f \in B_t} |\{f\}_5|$. В этом разбиении по $t = 685$ точек, по $x_1 = 32$ точки, а по $z_2, z_3, z_4 = 1985$ точек.

Возьмем теперь сеть, полученную достаточно грубым разбиением по $t = 0.1$, а по $z = 0.2$. В этом разбиении по $t = 75$ точек, по $x_1 = 6$ точек, а по $z_2, z_3, z_4 = 61$ точка. Выполним локальный поиск в каждой точке получившейся сети. Все узловые точки полученной таким образом ломаной линии лежат на кривой, изображенной на рисунке 10. Следовательно, при каждом t в этой сети была найдена точка, лежащая в области притяжения точки глобального максимума целевой функции.

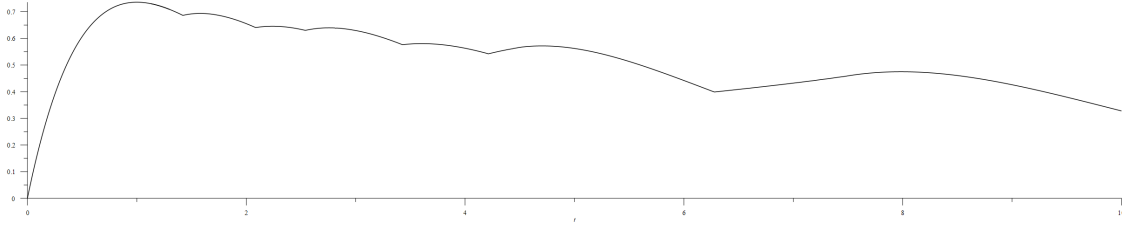


Рис. 10. Хорошее приближение к кривой $\max_{f \in B_t} |\{f\}_5|$ на промежутке $[0, 10]$

Как и в предыдущих случаях, весьма скромными вычислениями получено очень хорошее приближение при $n = 5$. Для функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Отличие между кривыми в случае действительных и комплексных коэффициентов показано крупным планом в масштабе 1:1 на рисунке 11. Расчеты для функций с действительными коэффициентами проведены с разбиением 0.01 по t, x_1, x_2, x_3, x_4 . В этом разбиении по $t = 685$ точек, по $x_1 = 101$ точка, а по $x_2, x_3, x_4 = 201$ точка.

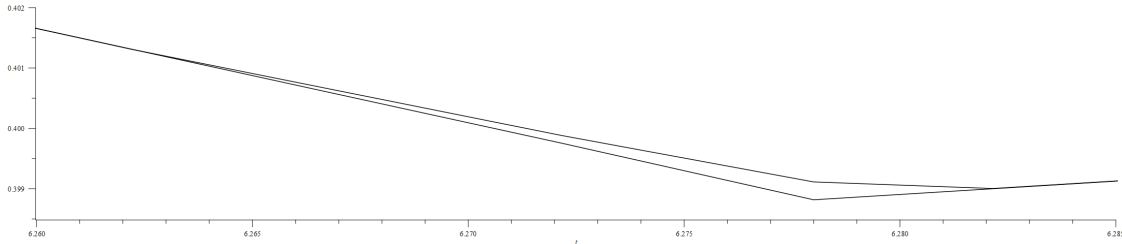


Рис. 11. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_5|$, $\max_{f \in B_t^r} |\{f\}_5|$ на промежутке $[6.26, 6.285]$

Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_5|$ совпадают на промежутке $[0, 1.421]$.

9.4. Случай $n = 6$.

Для случая $n = 6$ точной оценки коэффициентов не найдено даже в классе B . Если взять разбиение по $t = 0.02$, а по $z = 0.02$, то мы получим очень хорошее приближение к кривой $\max_{f \in B_t} |\{f\}_6|$. В этом разбиении по $t = 450$ точек, по $x_1 = 51$ точка, по $z_2 = 1513$ точек, по $z_3 = 481$ точка, по $z_4 = 145$ точек, а по $z_5 = 41$ точка.

В случае функций с действительными коэффициентами результаты аналогичны. Отличие между кривыми в случае действительных и комплексных коэффициентов показано на рисунке 12. Расчеты для функций с действительными коэффициентами проведены с разбиением по $t, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ — 0.01. В этом разбиении по t — 887 точек, по x_1 — 101 точка, а по x_2, x_3, x_4, x_5 — 201 точка.

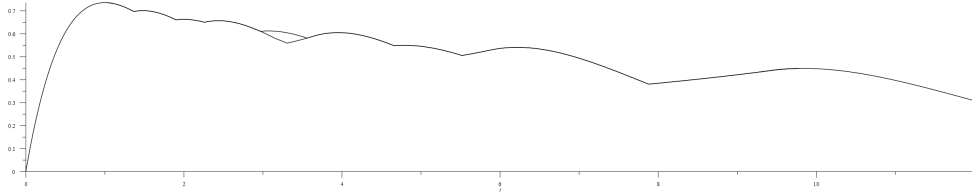


Рис. 12. Хорошее приближение к кривым $\max_{f \in B_t} |\{f\}_6|$ и $\max_{f \in B_t^r} |\{f\}_6|$ на промежутке $[0, 12]$

Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_1|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_6|$ совпадают на промежутке $[0, 1.367]$ (рисунок 12). Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_2|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_6|$ совпадают на промежутке $[3.155, 3.305]$. Это показано на рисунке 13. Кривые $\max_{f \in B_t} |\{f\}_3|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_6|$ совпадают на промежутке $[1.902, 2.257]$. Это показано на рисунке 14. Здесь границы всех промежутков приблизительные.

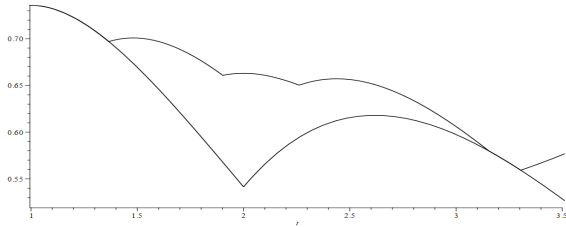


Рис. 13. $\max_{f \in B_t} |\{f\}_2|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_6|$ на $[1, 3.5]$

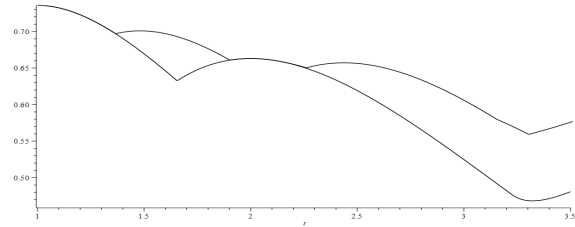


Рис. 14. $\max_{f \in B_t} |\{f\}_3|$ и $\max_{f \in B_t} |\{f\}_6|$ на $[1, 3.5]$

10. Экстремальные функции

В пункте 4. упоминалось, что

$$\max_{f \in B_t} |\{f\}_n| = \max_{f \in B_t} |\{f\}_1| = |\{F\}_1(t)|, \quad t \in [0, t_1(n)], \quad n = 1, \dots, 6.$$

В пункте 9. показано, что кривая $\max_{f \in B_t} |\{f\}_1|$ совпадает с каждой из кривых $\max_{f \in B_t} |\{f\}_n|$, $n = 2, 3, 4, 5, 6$ на промежутках $[0, t_1^*(n)]$, где

$$t_1^*(2) = 2, \quad t_1^*(3) \approx 1.65, \quad t_1^*(4) = 1.51, \quad t_1^*(5) = 1.42, \quad t_1^*(6) = 1.37.$$

Следовательно, нам известно (см. пункты 3. и 4.), что

$$\max_{f \in B_t} |\{f\}_n| = |\{F\}_1(t)|, \quad t \in [0, t_1^*(n)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Сопоставляя эти факты, видим, что $t_1(n) < t_1^*(n)$. Напрашивается следующая гипотеза:

$$t_1^*(n) > t_1^*(n+1) > 1, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad t_1^*(n) \rightarrow 1+0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Судя по результатам пункта 9., если $t_1^*(n) > 1$, $n \in \mathbb{N}$, то гипотеза Кшижа, скорее всего, верна. С другой стороны, численный метод, описанный здесь, хорошо подходит для опровержения этой гипотезы. Действительно, если гипотеза Кшижа не верна, например, при $n = N$, то, зная экстремальную точку, в которой $h_N > 2/e$, мы сможем предъявить функцию класса B_t , такую, что $|\{f\}_N| > 2/e$. Как это сделать, описано в статьях [5, 25].

В пунктах 3. и 4. упоминалось так же, что

$$\max_{f \in B_t} |\{f\}_n| = |\{F\}_n(t)|, \quad t \geq t_2(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

и приводились значения $t_2(n)$, $n = 1, \dots, 6$. Эти значения тоже не наименьшие, также как и $t_1(n)$ не наибольшие. Расчеты дают: $t_2^*(3) \approx 3.82$, $t_2^*(4) \approx 5.66$, $t_2^*(5) \approx 7.52$, $t_2^*(6) \approx 9.37$.

Из подпункта 9.2. следует, что

$$\max_{f \in B_t} |\{f\}_4| = \max_{f \in B_t} |\{f\}_2| = |\{F\}_2(t)|, \quad t \in [2.3752, 3].$$

Из подпункта 9.4. следует, что

$$\max_{f \in B_t^r} |\{f\}_6| = \max_{f \in B_t} |\{f\}_2| = |\{F\}_2(t)|, \quad t \in [3.155, 3.305],$$

и

$$\max_{f \in B_t} |\{f\}_6| = \max_{f \in B_t} |\{f\}_3| = 2 \frac{\sqrt{2}}{3} e^t \sqrt{(2t-1)^3}, \quad t \in [1.902, 2.257].$$

При $t \in [1.902, 2.257]$ экстремальной является функция

$$f(z) := e^{-t \frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}},$$

где

$$\omega(z) = z \frac{x^* - z}{1 - x^* z}, \quad x^* := \sqrt{\frac{1}{3} \frac{1+\mu}{1+\nu}}, \quad \mu := \frac{\{F\}_1}{2te^{-t}}, \quad \nu := \frac{\{F\}_2}{2te^{-t}}$$

с точностью до вращений в плоскости переменной z .

На оставшихся промежутках данный численный метод не позволяет найти точный вид экстремальных функций. Да и с проверкой угаданных экстремальных функций на отрезках промежутков $[t_1(4), t_2(4)]$ и $[t_1(6), t_2(6)]$ тоже не все гладко. Ведь вычисления проведены с некоторой погрешностью, пусть и не большой. Мы можем установить, что указанная функция лежит на границе n -го тела коэффициента класса B_t или B_t^r , но как показать, что функция является экстремальной, не ясно. Есть, конечно, некоторые признаки экстремальности, однако они только необходимые, но не достаточные [6, 11]. Еще, возможно, удастся доказать локальную экстремальность угаданных функций [26, 27].

Заметим, что оценки 1-го коэффициента на B_t и на B_t^r совпадают. Оценки 2-го коэффициента на B_t и на B_t^r также совпадают. В случае $n = 3, 4, 5$ отличия невелики. Случай $n = 6$ несколько выбивается из этого ряда, но и здесь отличие есть на относительно небольшом интервале. Таким образом, если провести оценку на B_t^r , то можно получить вид экстремальных функций для большей части промежутков $[t_1(n), t_2(n)]$, $n = 4, 5, 6$.

Если наше предположение о том, что $t_1^*(6) \approx 1.367$ верно, то при $t > t_1^*(6)$ численные вычисления дают значение глобального максимума $m_6 \approx 0.7008$, которое достигается

при $t \approx 1.4768$. Получается, для строгого доказательства гипотезы Кшижа при $n = 6$ методом полного перебора нам достаточно построить сеть с шагом не более чем ε_6/L_6 , где $\varepsilon_6 := 2/e - m_6$. То есть, если $L_6 = 5$, то шаг сети δ_6 должен быть не больше, чем 0.007.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $t \in (t_1(n), t_2(n))$. Заметим, что экстремальные функции для функционала $\{f\}_n$ на B_t можно искать в виде (по этому поводу см. [6, 25]):

$$f(z) := e^{-t \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1 - ze^{i\varphi_k}}{1 + ze^{i\varphi_k}}}, \quad 0 \leq \alpha_k \leq 1, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1, \quad \varphi_k \in [0, 2\pi), \quad \varphi_j \neq \varphi_k, \quad j \neq k.$$

Без уменьшения общности можно считать, что $0 \leq \varphi_1 < \dots < \varphi_n < 2\pi$. Более того, так как B_t инвариантен относительно вращений в плоскости переменной z , то можно считать, что $\varphi_1 = 0$. Заметим еще, что $f(z) = \prod_{k=1}^n F(ze^{i\varphi_k}, \alpha_k t)$.

11. Краткий исторический обзор по начальным коэффициентам

Из геометрических соображений очевидно, что $|\{f\}_0| \leq 1$. Точную оценку $|\{f\}_1|$ можно найти во многих работах начиная с 1934 года; первой была работа [28].

Оценка $|\{f\}_2|$ не вызывает сложности с 1943 года [4]. В статье [6] оценки $|\{f\}_1| \leq 2/e$ и $|\{f\}_2| \leq 2/e$ были найдены методом структурных формул, параметрическим методом и методом подчинения.

Я. Кшиж, располагая точными оценками $|\{f\}_1|$ и $|\{f\}_2|$, высказал свою гипотезу в 1968 году [2].

В 1977 году появилась работа Дж. Хаммеля, С. Шейнберга и Л. Зальцмана [6], в которой при помощи вариационного метода, перенесенного с класса Каратеодори, задача о максимизации функционала была сведена к задаче о максимизации функции, благодаря чему была впервые найдена оценка $|\{f\}_3| \leq 2/e$. Точная оценка $|\{f\}_3|$ дана этими авторами не для всех $t > 0$, однако ими доказано, что глобальный максимум $|\{f\}_3|$ достигается при $t = 1$.

Спустя 10 лет, Дж. Браун в [8] написал, что получил точно такой же результат, как и в [6], но другим методом. Точнее, в [8] приведена функция, которую нужно исследовать на максимум, причем точно такая же, как и в работе [6]. По всей видимости, для получения упомянутой функции использовалось, кроме прочего, неравенство треугольника. Исследование на максимум в [8] отсутствует.

Точная оценка $|\{f\}_3|$, при каждом t , была получена позднее Д. В. Прохоровым и Я. Шиналем [7] при помощи неравенств Каратеодори–Теплица.

Доказательство Р. Эрмерс [11] имеет алгебраическую форму, а сама оценка состоит всего из трех формул.

Оценка $|\{f\}_3|$, полученная автором в работе [29], совпадает с [6], но получена другим методом. Автор также получил точную оценку $|\{f\}_3|$ для функций с действительными коэффициентами в работе [13].

Доказательство того, что $|\{f\}_4| \leq 2/e$ появилось в 1983 году у Д. Тана в работе [9], но его рассуждения, основанные на принципе подчинения и лемме Шварца–Пика, не были полными [30]. В том же году появилось доказательство П. Н. Пронина [31], основанное на том же самом вариационном методе, который использовался в [6] при получении оценки

$|\{f\}_3|$. Позже, в 1987 году, Дж. Браун [8] опубликовал свой вариант подхода к доказательствам оценок $|\{f\}_n| \leq 2/e$ для $n = \overline{1, 4}$. Он использовал то, что

$$|\{f\}_n| \leq |\{F\}_1\{\omega^1\}_n + \dots + \{F\}_n\{\omega^n\}_n| \leq |\{F\}_1\{\omega^1\}_n| + \dots + |\{F\}_n\{\omega^n\}_n| \leq 2/e.$$

Однако, последнее из этих неравенств справедливо только при $n < 5$. Р. Эрмерс [11] предоставил более обстоятельное доказательство, проведенное при помощи алгебраического метода, восходящего к И. Шуру. Как отмечается в [30], наиболее убедительным стало доказательство В. Шапеля [10].

Впервые оценка пятого коэффициента методом В. Шапеля появилась в работе Н. Самариса [3]. Автор данной статьи в работе [12] при помощи метода Шапеля получил оценки $|\{f\}_n| \leq 2/e$, $n = \overline{1, 5}$, а также оценку $|\{f\}_6| \leq 2/e + 0.001163$. Интересно, что при $n = 2$ оценка получилась точной при всех t , а при $n = 3$ оценка, полученная автором этой статьи, совпала с оценкой Р. Эрмерс [11]. В. Шапель в [10] задал вопрос: до какого номера n применим его метод? Похоже, что ответ таков: $n = 6$.

Доказательство Шапеля [10], как и доказательство Самариса [3], нельзя считать строгим, так как оно основывается только на построении графиков мажорирующих функций на соответствующих отрезках изменения параметра t . Обоснование того, что эти графики нарисованы корректно, отсутствует. Отсутствует также оценка погрешности. Для обоснования корректности графиков можно, например, использовать оценку дилатации. Этим же недостатком грешит и статья автора [12].

Исследования по проблеме Кшижа не ограничиваются оценками модулей начальных тейлоровских коэффициентов. Обзор по тематике коэффициентов голоморфных функций, в частности по гипотезе Кшижа, имеется в статье [30].

12. Заключение

В настоящей статье описан подход к решению задачи получения точных оценок модулей тейлоровских коэффициентов $\{f\}_1, \dots, \{f\}_6$ на классах B_t , $t \geq 0$. Доказана корректность этого подхода в строгом математическом смысле.

В работе используются результаты, основанные на решении классической проблемы коэффициентов на классе Ω_0 [5], а также результаты, полученные методом подчинения [16].

В работе [5] решена задача перехода от функционала $|\{f\}_n|$ на классе B_t , к функционалу над классом Ω_0 . Далее задача сведена к задаче о поиске условного глобального максимума действительной функции действительных переменных с ограничениями типа неравенств, что в принципе позволяет даже применять стандартные методы дифференциального исчисления.

Графики точных при каждом $t \geq 0$ оценок функционалов $|\{f\}_n|$, $n = 1, \dots, 6$ на классах B_t получены на интервалах $(t_1(n), t_2(n))$ численным методом.

Полученные данные привели к уточнению гипотезы Кшижа (см. начало пункта 10.). Все собранные данные говорят о том, что гипотеза, скорее всего, справедлива. Тем не менее, в том же пункте 10. изложен вполне адекватный метод опровержения этой гипотезы.

Все изложенные здесь подходы можно применять не только на классах B_t , но и на других классах подчиненных функций. Таким образом, использование разработанного здесь математического аппарата является перспективным при решении экстремальных задач на классах B , B_t , а также на других классах голоморфных функций.

References

- [1] J. G. Krzyz, “Problem 1”, Proceedings of the Fourth Conference on Analytic Functions, *Annals of Polish Mathematicians*, **20**:3 (1968), 314.
- [2] J. G. Krzyz, “Coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *Annals of Polish Mathematicians*, **70** (1968), 314.
- [3] N. Samaris, “A proof of Krzyz’s conjecture for the fifth coefficient”, *Compl. Var. Theory and Appl.*, **48** (2003), 48–82.
- [4] W. Rogosinski, “On the coefficients of subordinate functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1943), 48–82.
- [5] Д. Л. Ступин, “Проблема коэффициентов для ограниченных функций и ее приложения”, *Вестник российских университетов. Математика*, **28**:143 (2023), 277–297. [D. L. Stupin, “The coefficient problem for bounded functions and its applications”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:143 (2023), 277–297 (In Russian)].
- [6] J. A. Hummel, S. Scheinberg, L. A. Zalcman, “A coefficient problem for bounded nonvanishing functions”, *J. d’Analyse Mathématique*, **31** (1977), 169–190.
- [7] D. V. Prokhorov, J. Szynal, “Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions”, *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math.*, **29**:5–6 (1981), 223–230.
- [8] J. E. Brown, “Iterations of functions subordinate to schlicht functions”, *Compl. Var.*, **9** (1987), 143–152.
- [9] Tan Delin, “Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions”, *Chinese Ann. Math.*, **A4** (1983), 97–104.
- [10] W. Szapiel, “A new approach to the Krzyz conjecture”, *Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska. Sec. A*, **48** (1994), 169–192.
- [11] R. Ermers, *Coefficient Estimates for Bounded Nonvanishing Functions*, Wibro Dissertatiedrukkerij, Helmond, 1990, 88 pp.
- [12] Д. Л. Ступин, “Теория меры и оценка модулей первых шести коэффициентов в проблеме Кшижа”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Издательство Тверского государственного университета, Тверь, 2015, 36–49. [D. L. Stupin, “Measure theory and moduli estimation of the first six coefficients in the Krzyz problem”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, Tver State University Publishing House, Tver, 2015, 36–49 (In Russian)].
- [13] Д. Л. Ступин, “Точная оценка модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций с действительными коэффициентами”, *Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации*, Материалы III Всероссийской научно-практической конференции (Тверь, 24–26 марта 2022 г.), Тверской государственный университет, Тверь, 2022, 205–209. [D. L. Stupin, “The sharp estimation of the modulus of the third Taylor coefficient on the class of bounded nonvanishing functions with real coefficients”, *Prospects for the development of mathematics education in the era of digital transformation*, Proceedings of the III All-Russian Scientific and Practical Conference (Tver, March 24–26, 2022), Tver State University Publishing House, Tver, 2022, 205–209 (In Russian)].
- [14] E. Lindelöf, “Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d’un point singulier essentiel”, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, **35**:7 (1909), 1–35.
- [15] J. E. Littlewood, *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1947, 251 pp.
- [16] R. Peretz, “Applications of subordination theory to the class of bounded nonvanishing functions”, *Compl. Var.*, **17**:3–4 (1992), 213–222.
- [17] Д. Л. Ступин, “Точные оценки коэффициентов в проблеме Кшижа”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Издательство Тверского государственного университета, Тверь, 2010, 52–60; англ. пер.: D. Stupin, *The sharp estimates of all initial taylor coefficients in the Krzyz’s problem*, Cornell University Library, 2011, 7 pp., arXiv: [1104.3984v1](https://arxiv.org/abs/1104.3984v1)

- [18] Д. Л. Ступин, *Гипотеза Кшижа и выпуклые однолистные функции*, 2023, 13 с., <https://doi.org/10.24108/preprints-3112695> [D. Stupin, *The Krzyz conjecture and convex univalent functions*, 2023, 13 pp., <https://doi.org/10.24108/preprints-3112695>].
- [19] O. Töplitz, “Über die Fouriersche Entwicklung Positiver Funktionen”, *Rendiconti Circ. Mat. di Palermo*, **32** (1911), 191–192.
- [20] С. В. Романова, “Асимптотические оценки линейных функционалов для ограниченных функций, не принимающих нулевого значения”, *Известия вузов. Математика*, 2002, № 11, 83–85; англ. пер.: S. V. Romanova, “Asymptotic estimates for linear functionals for bounded functions that do not take zero value”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **46**:11 (2002), 78–80.
- [21] Д. В. Прохоров, С. В. Романова, “Локальные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций без нулей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:4 (2006), 209–224; англ. пер.: D. V. Prokhorov, S. V. Romanova, “Local extremal problems for bounded analytic functions without zeros”, *Izvestiya: Mathematics*, **70**:4 (2006), 841–856.
- [22] П. И. Лизоркин, *Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа*, Наука, М., 1981, 384 с. [P. I. Lizorkin, *A Course in Differential and Integral Equations with Additional Chapters of Analysis*, Nauka Publ., Moscow, 1981 (In Russian), 384 pp.]
- [23] М. П. Галанин, И. А. Щеглов, *Разработка и реализация алгоритмов трехмерной триангуляции сложных пространственных областей: прямые методы*, Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2006, 32 с. [M. P. Galanin, I. A. Shcheglov, *Design and implementation of algorithms for three-dimensional triangulation of complex spatial areas: direct methods*, Preprints of the Keldysh Institute of Physics and Mathematics (IPM), 2006 (In Russian), 32 pp.]
- [24] M. J. D. Powell, “An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives”, *Computer Journal*, **7**:2 (1964), 155–162.
- [25] Д. Л. Ступин, “Проблема коэффициентов для функций, отображающих круг в обобщенный круг и задача Каратеодори–Фейера”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Издательство Тверского государственного университета, Тверь, 2012, 45–74. [D. L. Stupin, “The problem of coefficients for functions mapping a circle into a generalized circle and the Caratheodory–Feuer problem”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, Tver State University Publishing House, Tver, 2012, 45–74 (In Russian)].
- [26] Д. Л. Ступин, В. Г. Шеретов, “Доказательство локальной гипотезы Кшижа”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, 2005, № 6(12), 122–125. [D. L. Stupin, V. G. Sheretov, “A Proof of the local Krzyz conjecture”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika = Vestnik of Tver State University. Series: Applied Mathematics*, 2005, № 6(12), 122–125 (In Russian)].
- [27] Д. Л. Ступин, “Доказательство локального принципа подчинения и локальной справедливости гипотезы Кшижа”, *Применение функционального анализа в теории приближений*, Издательство Тверского государственного университета, Тверь, 2008, 70–72. [D. L. Stupin, “A Proof of the Local Subordination Principle and the Local Fairness of the Krzyz Conjecture”, *Application of Functional Analysis in Approximation Theory*, Tver State University Publishing House, Tver, 2008, 70–72 (In Russian)].
- [28] V. I. Levin, W. Fenchel, E. Reissner, “Lösing der Aufgabe 163”, *Jahresber. DM*, **44**:2 (1934), 80–83.
- [29] Д. Л. Ступин, *Новое доказательство гипотезы Кшижа при $n = 3$* , 2022, 13 с., <https://doi.org/10.24108/preprints-3112533>. [D. L. Stupin, *A new proof of the Krzyz conjecture for $n = 3$* , 2022, 13 pp., <https://doi.org/10.24108/preprints-3112533>].
- [30] Д. В. Прохоров, “Коэффициенты голоморфных функций”, *Комплексный анализ и теория представлений*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **71**, ВИНТИ РАН, М., 2000; англ. пер.: D. V. Prokhorov, “Coefficients of Holomorphic Functions”, *Journal of Mathematical Sciences*, **106**:6 (2001), 3518–3544.
- [31] П. Н. Пронин, *Достаточные условия однолистности различных операторов и экстремальные задачи на классе ограниченных функций*, Саратовский гос. ун-т, Саратов, 1983, 105 с. [P. N. Pronin, *Sufficient Conditions of Univalence of Various Operators and Extremal Problems on a Class of Bounded Functions*, Saratov State University, Saratov, 1983, 105 pp.]

Информация об авторе

Ступин Денис Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, Тверской государственной университет, г. Тверь, Российская Федерация. E-mail: dstupin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Поступила в редакцию 27.11.2023 г.

Поступила после рецензирования 05.03.2024 г.

Принята к публикации 11.03.2024 г.

Information about the author

Denis L. Stupin, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Mathematical Analysis Department, Tver State University, Tver, Russian Federation. E-mail: dstupin@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9183-9543>

Received 27.11.2023

Reviewed 05.03.2024

Accepted for press 11.03.2024

$$X^2 + X + 1$$

$$g(\varepsilon - 1) = \lambda$$

$$(i + \sqrt{2})$$

$$x = \gamma + 1$$

$$S_{25} = E$$

$$H^2(\Pi, M^{\Pi}) \rightarrow$$

$$\{ \mu_p^{(0)} \} \rightarrow \{ \mu_p^{(00)} \}$$

$$L_v(E, 1)$$

$$\{ \mu_p^{(0)} \}$$

$$\{ \mu_p^{(00)} \}$$

$$A^+ \{ \varphi, x \rightarrow$$

$$(\alpha - \sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + 2\alpha}$$

$$T \rightarrow \sum a_i T$$

$$(p-1) \times (p-1)$$

$$\alpha^2 + 2\alpha$$

$$\sigma_*$$

$$\bar{\alpha}$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\bar{\alpha}$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$

$$\sigma_x \in \mathbb{Z}_p$$

$$\alpha$$

$$\alpha$$